A GÖDEL-TÉTEL FILOZÓFIAI JELENTŐSÉGE

MICHAEL DUMMETT

Nyersfordítás.[1]

A Gödel-tétel az elemi aritmetika minden szemléletileg helyes formális rendszere számra ad ⟦ 1 ⟧
egy olyan U kijelentést, mely ugyan nem bizonyítható, de nem csak igaz, hanem számunkra felismerhető módon igaz: lévén a kijelentés $\forall x\, A(x)$ alakú, ahol $A(x)$ eldönthető predikátum. Ha a Gödel-tételt ilyen módon jogos megfogalmaznunk, akkor a „természetes szám” fogalmát, szerepeljen akár csupán olyan kijelentésben is, amelyben csak egyetlen kvantor van, a maga teljességében semmilyen formális rendszerben nem fogjuk tudni kifejezni. A nehézség ennek az episztemológiai [ismeretelméleti (ford.)] jelentőségének a megállapításában rejlik.

(1) Gödel első nemteljességi tétele azt mondja ki, hogy a *számelmélet axiómarendszerének* minden *ellentmondásmentes, rekurzív bővítése* olyan, hogy található hozzá egy számelméleti mondat, melyet ebből az axiómarendszerből sem levezetni, sem cáfolni nem lehet. A *rekurzív* lényegében azt jelenti, hogy az axiómarendszer az emberi elme által végiggondolható formában van prezentálva, ami lényegében azt jelenti, hogy van olyan formális algoritmus, ami alapján egy számítógép fel tudja sorolni az axiómarendszer összes axiómáját. Valójában ez a tétel az 1936-ban bizonyított úgy nevezett Gödel–Rosser-tétel, melyben az *ellentmondásmentesség* feltétele szerepel. Egy axiómarendszer ellentmondásmentes, ha a nyelvén megfogalmazott egyik S mondat esetén sem fordulhat elő, hogy S is és $\neg S$-is levezethető az axiómarendszerből.

(2) Az 1931-es eredeti Gödel-tétel az ellentmondásmentesség (a „sima” konzisztencia) feltétele helyett a következő úgy nevezett *ω-konzisztenciát* használja: legyen a formális számelmélet, azaz a Peano-aritmetika egy kibővített $\mathcal{A}$ axiómarendszere olyan, hogy minden olyan esetben amikor egy $A(x)$ számelméleti predikátum esetén az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... mondatok mindegyike levezethető $\mathcal{A}$-ból, akkor $\exists x\ \neg A(x)$ már nem levezethető $\mathcal{A}$-ból. Ez a feltétel nem nyilvánvaló. A Gödel-tétel következménye, hogy van olyan $A(x)$ számelméleti predikátum, hogy ha az $\mathcal{A}$ axiómarendszer ellentmondásmentes, akkor bár $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... mondatok mindegyike levezethető $\mathcal{A}$-ból, de $\forall x\ A(x)$ már nem vezethető le $\mathcal{A}$-ból (ez a $\forall x\ A(x)$ maga a Gödel-mondat, amit Dummett U-val jelöl.) (Ez utóbbi az $\mathcal{A}$ axiómarendszer *ω-nemteljessége.* Tehát ha a fenti $\mathcal{A}$ ellentmondásmentes, akkor ω-nemteljes.)

(3) Eldönthető egy $A(x)$ aritmetikai predikátum, ha van olyan (véges) p algoritmus, mely minden n természetes számra kiszámítható lépésszámban eldönti, hogy $A(n)$ levezethető-e az axiómákból vagy sem. Az U Gödel-mondatban szereplő $A(x)$ predikátum eldönthető: felírható az a p eldöntési eljárás, ami megmondja, hogy $A(n)$ levezethető-e vagy sem. p-hez könnyen megadható egy olyan n-től függő $k(n)$ szám, ami azt mondja, hogy ha 0-tól $k(n)$-ig végignézzük az össze számot és (mondjuk számítógép segítségével) kiszámítunk rajtuk egy rekurzív számelméleti függvényt, akkor $k(n)$-ig ki fog derülni, hogy $A(n)$ levezethető vagy cáfolható. Ha levezethető, akkor nyilván bármilyen általunk értelmesen választott igazságfogalom szerint igaz, ha cáfolható, akkor pedig bármilyen általunk értelmesen választott igazságfogalom szerint hamis. Erről mondja Dummett, hogy az eldönthető predikátumok igazságának és hamisságának kérdése problémamentes (hiszen véges eljárással ennek végére tudunk járni).

Date: 1963.

[1]Hevenyészve fordította és gondosan ellátа megjegyzésekkel: Molnár Zoltán Gábor.

⟦ 2 ⟧ Az értelmezések közül egy gyakori a következő. Minthogy U se nem bizonyítható, se nem cáfolható, ezért kell, hogy legyen a rendszernek olyan modellje, melyben igaz, és egy olyan is, melyben hamis. Mivel tehát U nem igaz *minden* modellben, ezért amikor azt mondjuk, hogy igazként tudjuk felismerni U-t akkor ezt úgy kell értenünk, hogy „igaz a rendszer *szándékolt* modelljében". Tehát egy elég határozott elképzelésünk van arról a fajta matematikai struktúráról, amire hivatkozni szándékozunk, amikor természetes számokról beszélünk; és erre az intuitív fogalomra való utalás az, amelynek segítségével ismerjük föl U-t igaznak. Másfelől viszont sosem érhetjük el ennek az intuitív fogalomnak egy formális rendszer értelmében vett teljes karakterizációját, a természetes számokra vonatkozó állítások bármely végesen összeállított rendszerének felállításával.

(4) Például a valós számok $+$-ra és $\cdot$-ra vonatkozó axiómarendszerének modellje a valós számok halmaza ($\mathbf{R}$), de a komplex számok halmaza ($\mathbf{C}$) és a racionális számok halmaza is ($\mathbf{Q}$). Ők játsszák el (mindegyikük és még végtelen sok modell) az axiómáknak engedelmeskedő dolgokat. Egy axiómarendszer modelljeit még *matematikai struktúráknak* is szokás nevezni.

(5) Az 1920-as Hilbert-féle pici aritmetikai axiómarendszernek pl. *modellje* a természetes számok (szokásos) $\mathbf{N}$ halmaza, de az axiómáknak eleget tesz a 2×2-es mátrixok $\mathbf{R}^{2\times 2}$ halmaza is, ha a $+$-t úgy értjük, hogy az a mátrixszorzás, és az 1-et úgy értjük, hogy mondjuk az az $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ mátrix. Érdekes, hogy míg $\mathbf{N}$, mint modell mindenkinek eszébe jut (ez a „szándékolt modell"), addig $\mathbf{R}^{2\times 2}$ nem. Sőt, míg az $\mathbf{N}$ modellben $+$ kommutatív, addig $\mathbf{R}^{2\times 2}$-ben nem. Nem csak arról van tehát szó, hogy más elemek is vannak $\mathbf{R}^{2\times 2}$-ben, de arról is, hogy ezek az elemek nagyon máshogy is tudnak viselkedni, mint $\mathbf{N}$ elemei. Miközben mindkettő ugyanannak a véges axiómarendszernek a modellje.

(6) A jelen cikk szempontjából a legfontosabb a számelmélet Peano-axiómarendszerének (PA-nak) modelljei. Nyilván $\mathbf{N}$ modellje neki (ezt a matematikai logikusok ω-val is jelölik), de ahogy Skolem 1920-ban igazolta, más modelljei is vannak. PA-nak „nem szándékolt" vagy „nem-sztenderd" modelljei is vannak. Ezekben az $\mathfrak{N}$ (gót enn) modellekben olyan elemek is vannak, amik nem érhetők el a nullából a rákövetkezés véges sok alkalmazásával, azaz olyan számok is, melyek *minden* „rendes", azaz sztenderd természetes számnál *nagyobbak,* ezek a végtelen természetes számok. Hogy kell egy ilyet elképzelni? Vegyük az összes $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ sorozat halmazát, ekkor a konstans sorozatok megfelelnek a „rendes" természetes számoknak. Vannak olyan sorozatok, amik azonban szintén úgy viselkednek, mint a természetes számok, azaz teljesítik a PA axiómáit. Ezek közül a felülről nem korlátos sorozatok előbb-utóbb minden konstans sorozatnál nagyobbak lesznek. Az $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$-re alapozott modellben ezek a sorozatok a nem-sztenderd természetes számok és így $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ segítségével definiálható PA-nak egy nem-sztenderd modellje. (Hogy pontosan hogyan definiálható az egy picit nehéz ügy, de két-három óra alatt elmagyarázható.)

(7) *Gödel teljességi(!) tétele* értelmében egy (elsőrendű logikai) $\mathcal{A}$ axiómarendszer esetén egy S mondat akkor és csak akkor levezethető $\mathcal{A}$-ból, ha S az $\mathcal{A}$ minden $\mathfrak{M}$ (gót emm) *modelljében igaz.* Most képzeljük el, hogy van egy olyan $A(x)$ számelméleti predikátum, mely a 0, 1, 2, ... , $\overline{n}$, ... számjelek mindegyike esetén olyan, hogy $A(\overline{n})$ levezethető $\mathcal{A}$-ból, de $\forall x\, A(x)$ se nem levezethető, se nem cáfolható $\mathcal{A}$-ból. Ekkor azzal a furcsa helyzettel állunk szemben, hogy a Gödel-féle teljességi tétel miatt van $\mathcal{A}$-nak van olyan $\mathfrak{M}_{\text{jó}}$ modellje, amiben $\forall x\, A(x)$ igaz, és van olyan $\mathfrak{M}_{\text{rossz}}$ modellje, amiben $\forall x\, A(x)$ hamis. Azaz $\mathfrak{M}_{\text{rossz}}$-ban van olyan n_{rossz} „troll" természetes szám, melyre $A(n_{\text{rossz}})$ hamis, holott $A(x)$ minden „jó" természetes számra igaz. Más modellekben (pl. $\mathfrak{M}_{\text{jó}}$-ban, amiben $\forall x\, A(x)$ igaz) nincsenek ilyen „troll" elemek.

⟦ 3 ⟧ Ebből a szempontból tehát van egy bizonyos, jól meghatározott fogalom, amit nem lehet teljesen jellemezni éppen amiatt, hogy pontos feltételezéseket teszünk róla. Esetleg karakterizálható lehetne a feltételeinkkel, azzal együtt, hogy ezek a feltételek azt jelentik, amit jelenteniük kell; de ebben az esetben viszont ez utóbbi állítás nem fejezhető ki kimerítő módon pusztán azoknak a feltételeknek a felhasználásával, amiket feltettünk. Amikor megkíséreljük karakterizálni a természetes számok totalitását – pl. azzal a céllal, hogy rámutassunk, hogy a formális rendszerünk bármely modellje melyben U hamis olyan elemeket fog tartalmazni, amik nincsenek benne ebben a totalitásban – olyan kifejezéseket kellene használnunk, mint „halmaz” vagy „véges sok”. Ha már most megpróbáljuk felhasználni ennek a kifejezésnek a jelentését oly módon, hogy olyan feltételeket rakunk össze, amik tartalmazzák *ezt,* akkor viszont olyan rendszert kapunk, amely beágyazható egy a „természetes szám” definícióját tartalmazó rendszerbe. Tekintettel arra azonban, hogy a Gödel-tétel érvényben van minden olyan rendszerben, mely tartalmazza az aritmetikát, lenne egy olyan aritmetikai kijelentés, mely kifejezhető a rendszerben, de nem bizonyítható és melyet azonban igazként ismerhetnénk fel: tehát nem sikerült teljesen karakterizálni a „természetes szám” fogalmát.

(8) Dummett ezt az érvét később is megismétli. Ott konkretizálja is. Világos, hogy a természetes számokat a halmazelméletben (SET-ben) jól tudjuk definiálni, pont olyan jól, mint ahogy az 5-ről meg tudjuk mondani, hogy az természetes szám. A „rendes” természetes számok a halmazelméletben a Neumann-rendszámok: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ De mivel SET tartalmazza a természetes számokat, ezért SET-nek is lesz egy olyan mondata, mely egy aritmetikai állítást fogalmaz meg és mely nem lesz levezethető SET-ben, de (valamiképpen, ahogy Dummett majd később beszél róla) igazként fogjuk tudni felismerni. Tehát nem kerültük ki a problémát: van olyan érzékünk, ami megmondja erről az aritmatikai állításról, hogy igaz (Dummett szerint), de ezt (a Gödel-tétel értelmében) nem lehet levezetni SET-ből (amennyiben SET ellentmondásmentes). Tehát ugyanott vagyunk, mintha SET-re nem is hivatkoztunk volna.

Akik a szóban forgó helyzet fenti nézetét fogadják el, arra a konklúzióra jutnak, hogy a „természetes szám” kifejezés ellenpélda arra a tézisre, hogy egy kifejezés *jelentése* a *használatában* megragadható. Ebben az összefüggésben a számnevek használata – az a használat, melyben ők a válaszok a „Mennyi?”, „Milyen gyakran?” kérdésekre – problémamentes; minthogy tudjuk, hogyan vessünk számot kielégítő módon a használatuk ezen vonatkozásaival, tehát csak az aritmetikai kijelentésekkel kell foglalkoznunk. És ezek között is csak az az, amit nem tudunk megtenni, hogy a „természetes szám” jelentését jellemezzük azáltal, hogy rögzítünk aritmetikai kijelentéseket, amiket fel kell tennünk és logikai következtetési szabályokat, amiket el kell fogadnunk. Mindenkinek, aki számára ismert a „természetes szám” kifejezés van ennek a jelentéséről egy tökéletesen világos intuitív képe; de ez a jelentés olyan, (eszerint a nézet szerint) hogy ennek a kifejezésnek az általunk történő használatának – vagy bármilyen használatának – semmilyen megközelítése nem tudja kimerítően leírni, hogy mi a jelentése. ⟦ 4 ⟧

(9) A használatelmélet a jelentés egy olyan elmélete, mely egy szó jelentésést nem direkt módon határozza meg, hanem a következőképpen. Milyen körülmények között mondhaton ezt a szót és ha valaki nekem mondja ezt a szót, akkor én ebből mire tudok következtetni.

Egy természetes ellenvetés, hogy mivel nem tudok belenézni egy másik ember elméjébe, hogy kiolvassam belőle, milyen jelentést társít a „természetes számhoz”, minthogy csak azzal tudok foglalkozni, amit csinál a kifejezéssel, ezért nem tudhatom biztosra, hogy ugyanazt társítja-e hozzá, mint én. Tehát egyfajta szkepticizmusnak nyílik tér hasonlóképpen ahhoz, mint amikor azt kérdezzük: „Honnan tudhatnám, hogy amit mindketten ‚kéknek’ nevezünk, nem úgy néze ki neked, mint az, amit én annak nézek, amit közösen ‚pirosnak’ nevezünk?” A két eset közti különbség az, hogy a feltételezett eltérés a „kék” egyéni jelentésében sosem kerülhet napvilágra, míg a „természetes számhoz” társított jelentés feltételezett eltérése napvilágra kerülhet. Ami azonban megmarad, hogy semmi, amit bárki tud mondani sem lenne képes garantálni, hogy amit ő ért a ⟦ 5 ⟧

„természetes szám" alatt, az ugyanaz, mint amit én értek. De valaki, akit ez a megközelítés vonz, hajlandó lesz enyhén kezelni az ilyen szkepticizmus lehetőségét; egyszerűen meg fogja erősíteni, hogy *tudja,* hogy mindannyiunknak azonos fogalmunk van a „természetes számról".

⟦ 6 ⟧ Evidens, hogy a szóban forgó téma nagy része a jelentés általános problémájával való kapcsolatából ered, és a jelentés és a használat viszonyából. A szavak, ahogy Arisztotelész mondta, ideák jelei. A mondatokat arra használjuk, hogy gondolatokat kommunikáljunk: mivel nem tudjuk a gondolatokat közvetlenül továbbítani, kódolnunk kell őket hallható és látható jelek segítségével, de ami érdekel minket a továbbításban az a gondolat aminek a mondat a kódja. Így hát a filozófusok hagyományosan nem a mondatok iránt érdeklődnek, vagy a szavak iránt, amikből állnak, hanem az *ideák* elemzésében érdekeltek, ami a szavak értelméből tevődnek össze.

⟦ 7 ⟧ A mai filozófia megfordítani látszik ezt a megközelítést. Egy gyereknek nyelvet tanítani nem olyan, mint kódolást tanítani. Vehetünk egy kódjelet és mellé tehetjük azt, aminek ez a jele, de nem izolálhatjuk a fogalmat, hogy megtaníthassuk a gyereknek, hogy melyik szó felel meg annak a fogalomnak. Egyedül azt tehetjük, hogy *használunk* mondatokat, amik tartalmazzák azt a szót, és treníroztathatjuk a gyereket, hogy imitálja azt a használatot. Minthogy azt ítéljük meg, hogy vajon a gyerek megtanulta-e a szó értelmét azzal, hogy úgy használja, ahogy mi, úgy tűnik, a fogalom megértését a helyes szóhasználattal kell azonosítanunk. A kód-analógia tehát a félrevezetőnek bizonyul. Még akkor is amikor fel tudok ismerni magamban valamit, amit egy fogalom megértésének szeretnék nevezni, és ami különbözik a használat képességének az adott szóra vonatkozóan, nem tudom felismerni ezt a dolgot egy másik emberben: róla csak azt tudom, hogy egy bizonyos módon használja a szót. Tehát, amit csak magamban tudok felismerni, nem tudja a szó értelmét alkotni mint ami a közös nyelvünk része, hanem a szó jelentését csak az alkothatja, amit mi a szó valamilyen értelemben vett használatával teszünk vele. Egy jobb analógia a szó és az értelme közötti kapcsolatra tehát inkább a sakkfiguráké és ezek játékbeli szerepük (erejük, lehetőségeik). Valójában ami érdekel minket a szakkfigurával kapcsolatban, az a játékbeli ereje (lehetőségei), és nem az anyagi tulajdonságai: a sakkfigura nem egy kódoló szimbólum erre az erőre vonatkozóan, abban az értelemben, hogy ez valami önmagában álló dolog lenne; a játékban a sakkfigurának tulajdonított erő (lehetőség, képesség) csak azokban a lehetőségekben foglalhatók egybe, amelyekkel a táblán való mozgásával kapcsolatban rendelkezik, a többi figurával együtt, a megfelelő játékszabályok szerint.

⟦ 8 ⟧ Az általános tézis, hogy egy kifejezés jelentése a használatával azonosítható, adott esetben valóban nem különösebben van a segítségünkre; addig, amíg ez a jelentés a használat eszközeivel kifejezve nem nyilvánul meg, a tézis pusztán egy elvi dolog. (Például, a teljes trivialitás határait érhetjük el, ha megengedjük, hogy valakinek a használati jelentéselméletét így definiálhassuk: pl. hogy a „szabad" szó jelentése valaki számára az, hogy „Ez a valaki a ‚szabad' értelmében használja ezt a szót.") Egy adott szó esetén a használat leírása problematikus marad. Például, egy adott szó esetén a használat leírása problematikus marad, ha a leírás bizonyos részeire nem világos, hogyan válaszoljunk a „Hogy ismerhetjük fel hogy ez egy megfelelő leírása a szónak?". Pl. ha a használat meghatározása a beszélő szándékát említi, felvetődik a kérdés, hogy mit értünk az alatt, hogy a beszélőnek mi a szándéka. Hasonlóképpen, a meghatározásban szereplő valamely kifejezéssel kapcsolatban felvethető, hogy milyen következményekkel jár a használata más dolgokra nézve; pl. ha valamilyen ajánlat valakinek a jogosultságaira vonatkozik, akkor felvethető, hogy milyen következményei vannak ennek a jogosultságnak. Erősen kételkedem abban, hogy lehet-e bármilyen *általános* leírását adni azoknak a kifejezésenket a használatára, amik az ajánlat leírásában szerepelnek úgy, hogy az problémamentes legyen; esetleg vázolhatjuk körülhatárolhatjuk azokat a területeket, amiken kívül további kérdéseknek már nem lesz jelentőségük. Nincs ok pl.

arra, hogy azt gondoljuk, hogy bármely olyan szó, ami nem egy egyszerű érzet minőséget fejez ki kell, hogy legyen informatív válasz arra a kérdésre, hogy miképpen ismerjük fel hogy a szó alkalmazható; pl. egy kísérlet sem hozott meggyőző eredményt, ami megpróbálta megmondani hogyan ismerünk fel, hogy valami *vicces.*

(10) Ebben a bekezdésben Dummett, ahogy azt már több helyen is megtette, a használatelméleti jelentés két jelentésrészére utal. Egy mondat *verifikacionista* jelentésrésze azt mondja meg, hogy mi tesz igazzá egy mondatot, azaz mikor lehet használni, a *pragmatikai* jelentésrész pedig arról ad számot, hogy mire lehet következtetni egy mondatból, azaz mire lehet használni. (ford.)

Mielőtt a jelentés használat általi definiálása mellett kötelezzük el magunkat, egy másik dolog mellett is döntést kell hoznunk. Amellett, hogy válaszolunk arra a kérésre, hogy mely kifejezésekkel írható le a használat, ha ez a dolog egyáltalán olyan dolog, ami leírható, arra is válaszolnunk kell, hogy miképpen ismerjük fel egy szó vagy kifejezés használatnak leírását helyesként vagy adekvátként: más szóval mi *alapozza meg* egy szó vagy kifejezés használatát. Ha általában matematikafilozófiával foglalkozunk, akkor a probléma ezen része elég makacs tud lenni: el kell tudnunk dönteni nem csak azt, hogy milyen elvek alapján ítélhetjük igaznak vagy hamisnak a matematikai állításokat, de azt is, hogy mi a *lényege* vagy *célja* az igazságérték eldöntésének. Ám, jelen esetben nem vagyunk érdekeltek ebben az összetett problémában; számunkra az most a fontos, hogy milyen fényben tünteti fel a „természetes szám” jelentését a Gödel-tétel, amennyiben a jelentés megértése magában foglalja az „igaz” predikátumnak az aritmetikai kijelentésekre vonatkozó alkalmazásának megértését is. ⟦ 9 ⟧

(11) Itt „lényegen” és „célon” Dummett valószínűleg azt érti, hogy az ’igaz’ minősítést mire akarjuk használni. Pl., hogy az igazságérték meghatározása milyen melléktermékekkel jár: azaz az igaz állításhoz direkt, indirekt, konstruktív vagy milyen bizonyítással jutottunk el. Vagy nem ezt gondolja... (ford.)

(12) Az utolsó mondatban Dummett végre visszatér a ⟦ 4 ⟧-es bekezdésben leírt problémára. Eszerint a „jelentés = használat” nyelvfilozófiai tézisre ellenpélda a „természetes szám” kifejezés, mégpedig a következők miatt. A jelentés fogalmának többek közt magába kell foglalnia az „igaz” predikátum használatát is. U igazsága nem kommunikálható, mert nem lehet levezetni (ha PA ellentmondásmentes). Két eset van: 1) U igazsága mégis felismerhető, és ekkor birtokában vagyunk egy olyan képességnek, ami annak ellenére eljut a jelentés ezen részéhet, hogy nem kommunikálható ez a tény; ez tehát valóban ellenmond a használatelméletnek. 2) U igazsága csak abban az értelemben ismerhető fel, hogy a szándékolt modellben igaz, ami viszont azért probléma, mert akkor az elménk ki képes választani a sztenderd modellt, ami azonban lehetetlen, ahogy az a SET-re vonatkozó érvelés mutatja. A későbbiekben Dummett majd amellett érvel, hogy miért nem lesz mégsem ellenpélda U felismerhető igazsága a használatelmélettel szemben.

A Gödel-tételből kiolvasható szituáció fent vázolt értelmezése vonzerejéhez tartozik, hogy azt gondolhatjuk, hogy a jelentés fogalmának a használatra való leszűkítése ellen ad ellenpéldát. A gondolatmenet vezérfonala a következő. Az a helyzet, hogy nem tehetjük le egymás mellé a szót és a fogalmat a gyerek számára, hogy bemutassuk: az egyik a kódoló szimbóluma a másiknak: ebből nem következik, hogy a fogalmat azonosítanunk kell a szó használatával. Semmilyen mértékű gyakorlással sem lehet megtanítani egy csimpánzt beszélni. Feltehetjük tehát, hogy a fogalom látensen van jelen a gyermek elméjében, valahogy úgy, hogy miközben a szó használatának a gyakorlása az, ami felébreszti a fogalmat, és ez elvezeti a gyermeket oda, hogy összekapcsolja a szót a fogalommal, mindemellett semmilyen véges leírása a szó használatának nem tudja kimeríteni ⟦ 10 ⟧

azt, hogy mit az, hogy bírni egy foglommal. Mi mind birtokoljuk a „természetes szám” fogalmát; de az aritmetikai állítások általunk való használatának semmilyen véges leírása sem alapozza meg teljes mértékben azt, hogy birtokoljuk a fogalmat, és ezt bizonyítja az a tény, hogy mindig képesek leszünk a fogalom intuitív megragadásához folyamodva felismerni igazként egyes állításokat melyek igazsága nem levezethető aritmetikai állítások használatának leírásából.

⟦ 11 ⟧ Ahogy beismertük, pusztán a jelentés használattal való azonosítása maga nem teljesít túl erősen: de visszautasítani az azonosítást nem más, mint minden reményünket feladni a jelentés megmagyarázhatóságára vonatkozóan, nem más, mint visszatérni a jelentés egy olyan fogalmához, amely valami elemezhetetlenként mutatja be azt; a jelentés fogalma ezzel olyanná válik, ami komoly szerepet játszik a magyarázatokban, de maga teljesen magyarázhatatlanná válik. Igaz ugyan, hogy néha rákényszerülünk, hogy védelmünkbe vegyük a magyarázhatatlanságot: mindaz, amit mondhatunk, hogy talán nincs mód arra, hogy vizsgálat tárgyává tegyük például a *viccesnek* lenni fogalmát. Egy jelentés, mely nem vezethető vissza a szóhoz általam csatolt használatra, máfelől olyan dolog, amit csak saját magamban ismerhetek fel: nem ismerhetem fel benned, és nem mondhatom el neked, hogy ismerheted fel magadban. Valójában biztosra vehetem, hogy azzal, hogy bizonyos dolgokat mondok neked, arra tudlak ösztökélni téged, hogy szavakhoz ugyanazt a jelentést csatold, mint én, de nincs arra bizonyítékom, hogy a feltételezésem korrekt; csak a vak bizalomra alapozhatok. A jelentés ilyen fogalma minden magyarázó erejét elveszti: mivel minden ugyanaz lenne, ha nem is lenne ilyen értelemben jelentés, ha a jelentés létezésének feltétele üres lenne. A jelentés használattal való azonosítása egy pici, de szükséges lépés: lépéseket kell tenni éspedig rákérdezés formájában, minden egyes esetben, hogy miben áll a használat és hogy lehet azt leírni. Az azonosítás visszautasítása retrográd lépés, ami a továbbhaladást teszi lehetetlenné és csak misztifikációt kelt.

⟦ 12 ⟧ Szükségszerűvé válik tehát, hogy lássuk, hogy a Gödel-tétel jelentőségének a fenti megközelítése miben hibádzik, és szükséges egy új megközelítést találni. Néhány filozófus azért, hogy megőrizze a jelentés és a használat azonosságát valóban tagadja a Gödel-tételt, csak szintaktikai tartalmú tételnek tekinti, azt állítva, hogy nincs intuitív ok arra, hogy az U eldönthetetlen állítást „igaznak” nevezzük; de teljesen lehetetlen az érvelésük. Annak a megközelítésnek a hibája, amiről beszélünk inkább a modell fogalmának helytelen alkalmazásában rejlik. Ez a fogalom, a hozzá illő matematikai elméletben, teljesen precíz: a halmazelméletben beszélhetünk axiómarendszerek modelljeiről, vagy ahogy a predikátumkalkulus teljességi tételének bizonyításában beszélhetünk a természetes számok vagy ezek függvényeink fogalmával modellekről. Ezekben az esetekben modellről egy matematikai elmélet keretei között beszélünk, és ezek elméletek segítségével definiáljuk, mi az a modell. A Gödel-tétel szóban forgó megközelítése azonban a modell fogalmával úgy dolgozik, mintha valami bármilyen leírástól függetlenül lenne adva: mint egyfajta intuitív fogalom, amit a lelki szemeink segítségével szemlélhetünk anélkül, hogy találnánk bármilyen leírást, ami ezt egyértelműen meghatározza. Ennek azonban semmi köze ahhoz a modell-fogalomhoz, amit a matematika jogosan nevez annak. Nincs olyan mód, amivel „adott” lehetne egy modell, de ne kéne megadni a leírását. Ha nem adható meg számunkra a számelmélet egy modelljének egy kész jellemzése, akkor egyáltalán nincs más mód amivel ennek a teljes leírásnak a hiányában meg el tudnánk jutni ennek a számelméleti struktúrának egy kész fogalmához.

⟦ 13 ⟧ Az U állítás $\forall x\ A(x)$ alakú, ahol az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz: mivel $A(x)$ rekurzív, ezen kijelentések számára az igazságfogalom problémamentes. Mivel az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike a formális rendszer minden modelljében igaz, minden olyan modell, melyben U hamis nem-sztenderd kell, hogy legyen. A szóban forgó megközelítés szerint ez a következőképpen interpretálható. Van egy jól definiált fogalmunk a sztenderd modellről.

A formális rendszer alapján állítások egy bizonyos halmazát körülhatárolhatjuk, mint olyanokat, melyeket igazként ismerünk fel abban a modellben. Közelebbről megfigyelve, észrevesszük, hogy van egy olyan állítás, ami nincs ebben a halmazban, ám, amit szintén igazként tudunk felismerni a modellben, annak a ténynek az eredményeképpen, hogy ha egy $B(x)$ predikátumra a $B(0)$, $B(1)$, $B(2)$, ... kijelentések mindegyikét igazként ismerjük fel a sztenderd modellben, akkor $\forall x\ B(x)$ igaz a modellben. Ezt a tény, amit a modell struktúrájának számunkra világos fogalmának helyessége alapján tudunk, sosem fogjuk tudni kifejezni egy formális rendszerben, és ezért van az, hogy nem tudjuk karakterizálni a modellt a formális rendszer segítségével.

Nem tudjuk formálisan karakterizálni a természetes számokat izomorfizmus erejéig. Bármely ⟦ 14 ⟧ formális karakterizációban le fogunk tudni írni olyan modellt, amit nem-sztenderdként ismerünk fel. Bár, ebben van valami körkörösség, mivel amikor arra gondolunk amikor a természetes számról beszélünk, akkor azt nem tudjuk teljesen megmagyarázni a teljes karakterizációra hivatkozva, tehát a sztenderd modellre hivatkozva tudjunk csak megmagyarázni. Ennek a fogalomnak a számára meg kell adnunk egy leírást, amelynek vagy a „természetes számra” vagy ehhez közeli pl. a „véges” szóra kell hivatkoznia.

Van azonban valami, ami arra vezet minket, hogy az U állítást igazként ismerjük fel, és ⟦ 15 ⟧ ami tehát túlmegy a természetes számok karakterizációján, ami a formális rendszerek beágyazott alaptulajdonsága. Éspedig az, hogy az U-t igazként ismerjük fel úgy, hogy nem-sztenderdként ismerjük fel a modellt, amiben ő hamis lenne, olybá tűnik amit teszünk, olyan elvre hivatkozva tesszük, ami megkülönbözteti a sztenderd modellt a nem-sztenderdtől és ami nincs beleépítve a formális rendszerbe, azzal, hogy elfedjük a tényt, hogy ez a különbségtétel semmivel sem írható le, csak a „természetes számra” való hivatkozással vagy valami hasonló fogalommal, pl. a „számnévvel”. Valóban, az átmenet arról, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz arra, hogy a $\forall x\ A(x)$ kijelentés igaz triviális. Az érvelés alapja, ami nincs beágyazva a rendszerbe és amit alkalmazunk elérkezve arra a megállapításra, hogy $\forall x\ A(x)$ igaz, nem ez az átmenet, hanem inkább az, hogy arra vezet minket, hogy hogy elfogadjuk, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz. A szituáció modellekkel való megfogalmazása elfedi ezt az amúgy nyilvánvaló tényt, mert amikor arról beszélünk, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz egy modellben átsiklunk a rés felett, ami aközött, hogy minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$-t képesek vagyunk igaznak felismerni, és ami aközött van, hogy képesek vagyunk felismerni igaznak, hogy minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$.

(13) Minden $\overline{n}$ számnévre „igazként ismerni fel, azt hogy $A(\overline{n})$ igaz” nem ugyanaz, mint „igazként ismerni fel azt, hogy minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$”. Nem vagyok benne teljesen biztos, hogy ez-e a lényeg, de ez elsőben végtelen sok felismerésről van szó, a másodikban viszont csak egy (egységes, közös) felismerésről (ford.). A sztenderd modellben (azaz modellelméleti értelemben) ez a kettő ugyanaz. A bizonyításelmélet szemszögéből azonban nem mindegy, hogy végtelen sok bizonyításunk van vagy csak egy.

Az érv amellett, hogy U igaz abból a feltételből ered, hogy a kérdéses formális rendszer ⟦ 16 ⟧ konzisztens. Továbbá az is fel van téve, hogy minden eldönthető $B(x)$ predikátumra és minden $\overline{n}$ számnévere $B(\overline{n})$ bizonyítható, ha igaz, $\neg B(\overline{n})$ bizonyítható, ha $B(\overline{n})$ hamis (az igazság és hamisság az ilyen állítások esetén problémamentes). A mi $A(x)$ predikátumunk olyan, hogy ha $A(\overline{n})$ hamis egy $\overline{n}$ számnévre, akkor konstruálhatunk $\forall x\ A(x)$-nak egy bizonyítását. Ebből pedig – azzal a feltétellel, hogy a rendszer konzisztens –, az következik, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz.

Mint úgy tekintve, hogy ez annak a hipotetikus állításnak a bizonyítása, hogy „*ha* a rendszer ⟦ 17 ⟧

konzisztens, akkor $\forall x\ A(x)$ igaz" az előbbi érvelés természetesen formalizálható a rendszerben. Mint az U feltétel nélküli állításnak a bizonyítása, sokkal inkább a rendszernek a konzisztenciájától függ, mint a bizonyítás bármely részétől. Hogy elfogadjunk egy olyan bizonyítást, ami egy konklúzió igazságát állítja, szükségtelen feltenni, hogy nincs két bizonyítás, ami ellentmondó állításokat bizonyítana: amit meg kell követlenünk, az csak annak a véges sok axiómának az igazsága, amire hivatkozik a bizonyítás és annak a véges sok következtetési lépésnek a helyessége, amit ebben használtunk. De annak az érvnek a számára, ami arra vállalkozik, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyikének igazságát alátámassza, és végül az $\forall x\ A(x)$ igazságát, a rendszer totális konzisztenciája erősen lényegi. Tehát abban az érvelésben, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz és nem abban, hogy ebből $\forall x\ A(x)$ igazsága következik, van az a dolog, amire vágyunk és a rendszerben nem formalizálható, éspedig az az érv, ami azt szándékozik igazolni, hogy a rendszer teljes konzisztenciával rendelkezik.

⟦ 18 ⟧ Ha a „természetes szám" kifejezéshez csatolt jelentést úgy interpretáljuk, mint ami a természetes számok modelljének intuitív érzékelését, lehetetlennek tűnik tagadni, hogy ez a jelentés teljesen definiált. Minden nem-sztenderd modell – például amiben U hamis – tartalmazni fog olyan elemet, ami nem érhető el a 0-ból a rákövetkezés operátor egymás utáni alkalmazásával- Még ha nincs is formális karakterizáció amelyik kizárja ezeket az elemeket, nyilvánvaló, hogy nincs annak lehetősége, hogy egy a nullára nem rákövetkező elemet természetes számnak nevezzen; nem vetünk fel kételyeket azzal kapcsolatban, hogy Julius Caesar egy természetes szám vagy sem. Az ebből levont konklúzió az, hogy csak egy sztenderd modell van, amire gondolunk, annak ellenére, hogy képtelenek vagyunk ezt teljesen kimerítő módon formálisan jellemezni. Az érvem nem arra vonatkozott, hogy nincs ilyen sztenderd modell, pláne nem arra, hogy bármilyen bizonytalanság lenne arra nézve, hogy mit gondolunk természetes számnak, hanem hogy a „modell" szó használata itt inkoherens. Bármely olyan elméletben, ami képes a természetes számok modelljeiről koherensen beszélni, helyes lesz azt mondani, hogy csak egy sztenderd modell van és sok nem-sztenderd modell.