Bizonyításelmélet és Gödel-tételkör

összeállította
Molnár Zoltán Gábor

1. Bevezetés

„Ha az agyunk olyan egyszerű lenne,
hogy az emberiség mai tudásával
tökéletesen le tudnánk írni a működését,
akkor ezzel az egyszerű biológiai szerkezettel,
már nem lennénk képesek felfogni a működését."

1.1. Metalogika

A téma, amit körüljárunk David Hilbert elnevezésével élve a *metamatematika*[1], de teljesen jogos lenne a *metalogika*[2] kifejezés használata is. Ma ezeket a kifejezéseket nem használják gyakran, ehelyett talán a *bizonyításelmélet elemei és alkalmazásainak* nevezhetnénk a jegyzet tartalmát. Emellett a jegyzetben olyan témák is szereplenek, amik a bizonyításelmélethez abban az értelemben kapcsolódnak, hogy vagy történeti előzménynek tekinthetők, vagy alkalmazásai olyan módszereknek, amiket a korai bizonyításelmélet is használt.
Míg a szűken értelmezett „iskolai logika" a klasszikus kétértékű logikával foglalkozik, addig a metalogika egyszerre több logikai rendszert kísérel meg összehasonlítani, közös keretelméletben vizsgálni. Ezt a közös keretelméletet nem vázoljuk, egyszerűen csak megváltoztatjuk a klasszikus logika konstansainak jelentését és megnézzük, mit eredményeznek ezek a változtatások. A metalogika eltér a modellelmélettől is. A modellelmélet, legalább is a bevezető egyetemi matematikai logika kurzusokon, az összes matematikai elméletek közös keretelméleteként értelmezhető. A modellelmélet vizsgálódásának tárgyai a matematikai struktúrák, például azok a műveletekkel ellátott halmazok, amik a természetes számok, a valós számok, a komplex számok körének vagy vektortereknek felelhetnek meg. Mindezen vizsálatokat a modellelmélet – első közelítésben – a klasszikus kétértékű logikára alapozza. Egy modell alaphalmaza modellről-modellre változhat, változhatnak a rajta értelmezett (matematikai) műveletek, relációk és konstansok, ám az olyan logikai kifejezések mint a konjunkcióé, alternációé, kondicionálisé vagy a negációé, illetve a kvantoroké nem változik. Ezzel szemben a metalogika tárgyai lényegében maguk a logikák illetve a modellelméletben változatlan logikai konstansok.

[1] Hilbert
[2] Ruzsa tarski 14.o.

1.2. Klasszikus logika

Az, hogy a matematikai logika alapvető ága, a modellelmélet (első közelítésben) a klasszikus logikára épül, nem pusztán történeti okokra vezethető vissza. Elég erős érvek szólnak amellett, hogy maga a „logikai” terminus jelentése definiálható úgy, hogy a metalogikai fogalmak közül csak a klasszikus logikai fogalmak értelmezhetők logikai fogalmakként. Ez Alfred Tarskinak a *Melyek a logikai fogalmak?*[3] című cikkében szereplő tézisből következik, mely azt állítja, hogy

> a logikai fogalmak azok a fogalmak, melyeket a tárgyalási univerzum minden saját magára képező kölcsönösen egyértelmű leképezése invariánsan hagy.

Természetesen nem kell elfogadnunk Tarski ezen tézisét, már csak azért sem, mert a modállis logika rendszereire egészen biztosan nem igaz. Ám, ha elfogadjuk, akkor (az S5 modális logikán kívül[4]) csak a modellelmélet lesz logikai keretrendszer.
Egy másik érv a modellelméletnek a matematikai logikán belüli kitüntetett szerepének alátámasztására a matematikai gyakorlatban keresendő. Pontosan Tarski volt az a nagy hatású matematikai logikus, aki későbbi kutatóhelyén, Berkeleyben egy olyan kutatási programot vezetett, mely alapjaiban megváltoztatta a matematikai logikának a Hilbert és köre által rajzolt képét. Tarski köre kialakította azt az új megközelítést, amit ma a modellelmélet világának nevezhetünk. Módszerei olyan gyümölcsözőek voltak, hogy a korai tudományos programokat, például Russell Principia Matemathicáját, Hilbert metamatematikáját és Brouwer intuicionista iskoláját egyértelműen háttérbe szorította. Mindazonáltal ezek a kezdeményezések koránt sem szűntek meg hatni.
Ez a jegyzet a legkisebb mértékben tartalmaz csak modellelméleti gondolatmeneteket. Ezt a csekély mértéket azonban nem kerülhetjük ki, mert bizonyos pontokon a jó érthetőség kedvéért a modellelmétet kell segítségül hívnunk magyarázó elméletként. Természetesen szigorúan ügyelünk arra, hogy a bizonyítáelméleti gondolatmenetekbe ne vegyüljenek ilyen, a témában nem megengedett érvelési formák.

1.3. Nem-formális deduktív rendszerek

A deduktív tárgyalásmódot csaknem készen kapta az utókor Eukleidész Elemek című művében.[5] Ebben a szerző a matematikai témákat az axiómák, alapfogalmak és definíciók felsorolásával kezdi, majd tételek sorát mondja ki és bizonyítja be. Ez nagyon hasonló módszer a mai axiomatikus tárgyaláshoz. Eukleidész matematikai szöveggyűjteményében vannak nagyon régi részletek is. Ezekből tudható, hogy a módszer már régebben kialakulhatott, feltehetően az eleai filozófia korában. A legrégibb deduktív matematikai szöveg, a páros és páratlan számokról szóló elmélet olvasásakor feltűnhet, hogy gyakran

[3] [Tarski] 391-412.

[4] Máté–Ruzsa 285. o.

[5] Ez a kijelentés annyira nem nyilvánvaló, hogy a matematikatörténeti szakmunákban az 1960-as évekig a deduktív módszer lassú, folyamatos fejlődéséről beszéltek. Még a W. és M. Kneale *A logika fejlődése* c. összefoglaló munkájában mindenféle indoklás nélkül állítják a szerzők, hogy a püthagoreusuk *valószínűleg* nem ismerhették a Pithagoraszt-tételnek azt a részletes bizonyítását, amit Eukleidésznél olvashatunk [Kneale] 16. o. Szabó Árpád azonban érveket szolgáltatott amellett, hogy a deduktív módszert készen kapták a kor matematikusai az ógörök érvelő filozófiától, elsősorban az eleatáktól.

használatos az indirekt bizonyítás módszere.[6] Egyáltalán, feltűnhet, hogy ismétlődő technikák alkalmazásával zajlanak a bizonyítások. Kiemelünk két jellegzetes ilyen eljárást:

$$\begin{array}{l} \text{Ha nem } A\text{, akkor } C \text{ sem.} \\ \text{De ha nem } A\text{, akkor } C. \\ \hline \text{Tehát } A. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{Ha } A\text{, akkor } C. \\ \text{De ha } B\text{, akkor is } C. \\ \text{Viszont } A \text{ vagy } B. \\ \hline \text{Tehát } C. \end{array}$$

Az első az indirekt bizonyítás, a második az esetszétválasztás szabályának leggyengébb fajtája. Az Elemek bizonyításaiban az axiómák igazságát ezek és még más érvelési panelek továbbítják a tételek felé. Az alapigazságok, vagy axiómák az arisztotelész által vázolt deduktív módszerben evidensnek, mindenki által elfogadhatónak tekinthető igazságoknak kell lenniük, hiszen a tételek igazsága az axiómák konszenzuális igazságán alapulnak.[7] Ma már azt gondoljuk, hogy egy axiómarendszer illetve deduktív rendszernek nem kell feltétlenül evidens igazságokra épülniük, bőven elég, ha az axiómarendszer szerkesztői valahogy indokolják, hogy az éppen úgy összeállított axiómák miért tarthatnak számot érdeklődésre a matematikusközösség számára. Mindazonáltal az arisztotelészi szemlélet egészen a XIX. század végéig makacsul tartotta magát. Még az axiomatikához jelentősen hozzájáruló kutatók között is gondolták néhányan, hogy pl. a hiperbolikus geometria értéktelen, hiszen – szerintük – a közvetlen tapasztalat nem igazolja az axiómáit.[8] Bolyai és Lobacsevszki pont ennek az Arisztotelészre visszamutogató tudományfelfogásnak a megtörése miatt tekinthető úttörőnek.[9]

1.3.1. Ellentmondásmentesség, helyesség, negációteljesség

Axiomatikus-deduktív vagy részben deduktív módon sok tudományt ki lehet fejteni, de nem mindegyikkel szemben vetődnek fel a „deduktív korrektség” bizonyos kritériumai. Egy elég evidens deduktív korrektségi kritérium, hogy ne lehessen belőle logikai ellentmondásra jutni. Egy másik jósági kritérium, hogy nem szeretnénk, ha a szemléletnek ellentmondó tételt lehetne levezetni a rendszerből (ennek a jól-definiált, formális verzióját helyességnek nevezzük). Az arisztotelészi tudománymetodológiából, ami pl. az euklideszi módszertant is leírni szándékozik az következik, hogy a tudományos módszer akkor jó, ha magyarázza a világot és nem akkor, ha cáfolja a tapasztalatot. Egy harmadik kritérium, hogy a rendszer tudjon helyes választ adni minden nem nyilvánvaló eldöntendő kérdésre. Ezek mindegyikének sérülésére lehet példát találni a tudománytörténetben. A végtelen kicsiny mennyiségekkel néha nullaként, néha nem nullaként számoltak. Ez logikai ellentmondáshoz vezetett.[10] Az elméleti fizika is tartogatott meglepetéseket. Bár az euklideszi geometria evidens a szemlélet

[6] Szabó

[7] [Beth] p. 82, [Szabó]

[8] Gottlob Frege: „attól, még, hogy a hiperbolikus geometria ellentmondásmentes még nem következik, hogy létezik.” [Frege]

[9] Tóth

[10] Az analízis aritmetizálása (epszilon-deltás definíciók bevezetése) alkalmasnak tűnt a végtelen kicsinyek okozta ellentmondások kiküszöbölésére.

számára, számos modern fizikai jelenséget nem lehetett pusztán az euklideszi geometria segítségével leírni. Mint kiderült el kellett rugaszkodni az euklideszi tér fogalmától, hogy a kísérleti eremények összhangba kerüljenek a fizikai elméletekkel. Szintén az euklideszi geometria bizonytalanul hagyott egy lényeges kérdést. A *párhuzamossági axióma*[11] koránt sem evidens állítás, axiómaként való felvétele tehát (arisztotelészi értelemben) nem indokolt, ám törlésével, a *maradék axiómák* segítségével sem igazolni, sem cáfolni nem lehetett. A geometria története egészen Bolyai Jánosig próbálkozott eldönteni a levezethetség-cáfolhatóság kérdését, mígnem kiderült, hogy mind a párhuzamossági axióma, mint ennek tagadása független a maradék axiómarendszertől (azaz az euklideszi geometria nem teljes).

1.3.2. A nem-formális felépítések határozatlansága

Egy nem-formális axiomatikus-deduktív felépítésben a módszertani fogalmak nem szigorúan körülhatároltak. Amikor egy nem formális felépítésben állításokat teszünk, akkor metafizikai (sem érzékeinkkel, sem gondolatainkkal fel nem fogható) tárgyakról próbálunk állításokat megfogalmazni az axiómákban rögzített tulajdonságai alapján. Jellemző, hogy a nem-formális tárgyalásmódban *a* voltaképpeni számokról, egyenesekről, halmazokról, stb. beszélünk, mintha ilyen tárgyakat csak egyetlen módon lehetne elképzelni. Nem beszélünk arról, hogy a leírni kívánt témakörnek lenne sokféle modellje, sokféle struktúra eleget tehet az axómáknak. Ha mégis beszélünk ilyesmiről, akkor az már egy félig formális tárgyalásmód.
A tárgyalás módszertanilag még abból a szempontból is bizonytalan, hogy nem előre meghatározott, hogy a tételek bizonyításához milyen technikákat lehet használni. Ez önmagában egyáltalán nem baj. A *valódi matematikában* (ez Gödel kifejezése a matematikai gyakorlatban a kutatók keze alá kerülő elméletekre) nem korlátozhatjuk indokolatlanul a problémamegoldási módszereinket, mert azzal együtt az emberi kreativitás is korlátoznánk, ami azonban nem állhat szándékunkban. A nem-formális tárgyalásmód egyáltalán nem elvetendő matematikai megismerési stratégia. Magát a halmazelméletet is Georg Cantor nem-formális elméletének köszönhetjük. Természetesen szükséges óvatosan hozzáfogni az új módszerek alkalmazásához, mert nem várt kellemetlen következmények bukkanhatnak fel, mint az előbbi elméletben a híres Russell-paradoxon.

1.4. Formális axiomatikus-deduktív rendszerek

Ami a deduktív rendszerek metodológiájában robbanásszerű változást okozott, az az a felismerés, hogy a helyesnek elfogadott következtetési szabályokat a következetésben szereplő mondatok alakja egyértelműen meghatározza. Ez a fordulat Gottlob Frege nevéhez kapcsolódik, de folytatódott Russell, Hilbert, Gentzen, Tarski, Gödel munkásságával és olyan, az intuicionista logika olyan nyelvközpontú ágának képviselőivel is mint Heyting, Prawitz és Dummett. Gottlob Freget egyben a modern analitikus nyelvfilozófia első képviselőjének is tartják és nem csak a matematika és a logika

[11] A párhuzamossági axióma leegyszerűbb megfogalmazásban azt mondja, ki, hogy a síkon egy egyenessel egy arra nem illeszkedő ponton át egy és csak egy párhuzamos egyenes rajzolható.

módszertanának megalapozóját látjuk benne, hanem több lényeges analitikus filozófai kérdés megfogalmazóját. Frege és követői (közvetett vagy közvetlen) hatására a nem-formális axiomatikus-deduktív tárgyalásmódot, mely határozatlan, elérhetelen metafizikai tárgyaktól beszél felváltja egy formális, nyelvközpontú, nyelvi szerkezetek vizsgálatával dolgozó módszertan.

A nyelvközpontú *formális-deduktív* tárgyalásmódban a logikai vizsgálódás tárgyát nyelvi objektumok képezik. Ez a nyelv minden esetben szimbolikus és mesterséges. Természetesen az, hogy mesterséges nem jelenti azt, hogy nincs köze a természetes nyelvhez. Előfordjul, hogy a formalizáció úgy valósul meg, hogy a természetes nyelv egy jól behatárolt *töredékét* (fragmentumát) illetve annak modelljét tekintjük a vzsgálat tárgyává váló nyelvnek vagy formális nyelvnek.

Az előbb említett formális nyelvre, mely a természetes nyelv egy fragmentumát modellezi kitüntetett példa a *propozícionális logika* (jelben: PC) formális nyelve. PC nyelve a természetes (magyar) nyelv „és”, „vagy”, „ha . . . , akkor”, „nem” szavaiból, szerkezeteiből, azaz a *logikai szavakból* (logikai konnektívumokból vagy funktorokból) álló kifejezéseket szimbolizálja.

Azt, hogy milyen kijelentő mondatok levezethetők az axiómákból a formális-deduktív tárgyalában előre pontosan definiált szabályok mondják meg. Az axiómák nem metafizikai tárgyakra vonatkozó állítások, hanem olyan kijelentő mondatok, melyekben a vizsgálni kívánt dolgok nevei szerepelnek. Mindezekből következik, hogy ha be kívánjuk vezetni a levezetés, axióma, levezetett tétel, stb. metalogikai fogalmakat, akkor szükséges szétválasztani a *tárgynyelvet,* aminek a nyelvi szerkezeteire vonatkoznak a fenti definíciók és a *metanyelvet,* amelyben megfogalmazódnak a fenti fogalmak definíciói. Mindamellett az is szükséges, hogy a metanyelv felett legyen egy a tárgynyelv vizsgálatára alkalmas *metaelmélet,* azaz rögzítve legyenek benne azok az szabályok, amik lehetővé teszik, hogy a metalogikai fogalmakkal kapcsolatban tételeket fogalmazzunk meg. A metanyelvnek tehát egyfelől tartalmaznia kell a tárgynyelvi kifejezések *strukturális-leíró neveit*, amikkel hivatkozni tudunk a tárgynyelv kifejezéseire, másfelől olyan kifejezéseket, melyek már a tárgynyelven is megfogalmazhatók, azaz ezek fordításait.
A logika fejlődése során lényeges volt dönteni arról, hogy a metanyelvi levezetésfogalma miféle. A matematika egésznek ellentmondásmentességét bizonyítani szándékozó Hilbert-program például fontosnak tartotta, hogy a metanyelvi érvelések *finit (véges-konstruktív)* érvelések legynek. A modellelméletet választó Tarski a metaelmélet levezetésfogalmát klasszikusnak választotta, Brouwer pedig az indirekt egzisztenciabizonyításokat mellőzte. Első közelítésben persze nem kell, hogy formalizálva legyen a metanyelv, hiszen nem őt tesszük vizsgálat tárgyává.

2. Levezetés

2.1. Klasszikus propozícionális logikák

2.1.1. Tárgynyelvek.

Legyen $\mathrm{At} = \{\underline{\mathbf{A}}_i\}_{i\in I}$ az *atomi mondatok halmaza* ($I \neq \emptyset$), és tekintsük a

$$\mathfrak{Fm}^{+}_{\mathrm{PL}} = \langle \mathrm{At} \mid \langle \&, \vee, \supset, \sim \rangle \rangle$$

generált szabadalgebrát (ez a Heyting-algebra típusa feletti algebra, melynek műveleti jelei: $\langle \&, \vee, \supset, \sim \rangle$), azaz a *propozicionális logika formulaalgebráját* a bővebb jelkészlet felett. Hasonlóképpen legyen

$$\mathfrak{Fm}^{-}_{\mathrm{PL}} = \langle \mathrm{At} \mid \langle \supset, \sim \rangle \rangle$$

generált szabadalgebra (a $\langle \sim, \supset \rangle$ típus felett) a *propozicionális logika formulaalgebrája* a szűkebb jelkészlet felett.

2.1.1.1. Megjegyzés. Itt a generálást úgy értjük, mint ahogy a sík vektorait előállítja két nempárhuzamos $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektor a $+$ összeadás és a $\lambda.$ számmal való szorzás segítségével, azaz a sík vektorai előállnak ebből a két vektorból a műveletek véges sokszori alkalmazása segítségével: $\mathbf{R}^2 = \langle \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \mid \langle +, \lambda. \rangle \rangle_{\lambda \in \mathbf{R}}$. Itt persze nem elhanyagolható az a különbség, hogy a $\lambda.$ műveletből pont annyi van, ahány valós szám, míg a logikai operátorok jelenleg véges sokan vannak. Továbbá, hogy a formulaalgebrában (lévén szabadalgebra) pl. $A \supset B$ és $B \supset A$ nem azonos, míg a vektorok tulajdonságaiból adódik, hogy $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ és $\mathbf{b} + \mathbf{a}$ azonos.

2.1.1.2. Megjegyzés. A formális nyelvekkel foglalkozó irodalomban szokásos módon rekurzívan definiált formulaosztály az alábbi jelöléssel is definiálható:

$$\mathrm{Fm}^{+} ::= \mathrm{At} \mid \mathrm{Fm}^{+} \& \mathrm{Fm}^{+} \mid \mathrm{Fm}^{+} \vee \mathrm{Fm}^{+} \mid \mathrm{Fm}^{+} \supset \mathrm{Fm}^{+} \mid \sim \mathrm{Fm}^{+}$$

illetve

$$\mathrm{Fm}^{-} ::= \mathrm{At} \mid \mathrm{Fm}^{-} \supset \mathrm{Fm}^{-} \mid \sim \mathrm{Fm}^{-}$$

2.1.2. Levezethetőség.

Figyelve a tárgynyelv kifejezéseit, azaz a formulákat, azok között kitüntetett kapcsolatokat fogunk definiálni.

Definíció *(Általános levezethetőség)* Legyen $\mathfrak{Fm} = \langle X \mid \mathsf{O} \rangle$ az O operátorok segítségével az X elemei által kifeszített generált formulaalgebra, $\mathrm{Ax} \subseteq \mathrm{Fm}$ tetszőlegesen rögzített részhalmaza a formuláknak (ezeket axiómáknak nevezzük) és $\mathrm{In} = \{I_1, \ldots, I_m\}$ Fm-beli relációk egy halmaza, melyeknél $(A_1, \ldots, A_{l+1}) \in \frac{\cdots}{\cdots} \in \mathrm{In}$-t $\frac{A_1, \ldots, A_l}{A_{l+1}}$-vel jelöljük (és mely relációkat következtetési szabályoknak nevezzük). Ekkor tetszőleges $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}$-ra

$$\Gamma \vdash_{\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax} \rangle} A \quad \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \quad \begin{array}{l} \text{létezik olyan } (A_1, \ldots, A_n) \in {}^{\{1\ldots n\}}\mathrm{Fm}, \text{ hogy minden } k \in \{1\ldots n\}\text{-ra} \\ A_n = A, \text{ és } A_k \in \Gamma \cup \mathrm{Ax} \text{ vagy léteznek } 1 \leq i_1, \ldots, i_j < k \text{ számok és} \\ \frac{\ldots}{\ldots} \in \mathrm{In}, \text{ amire } \dfrac{A_{i_1}, \ldots, A_{i_j}}{A_k}. \end{array}$$

2.1.2.1. Jelölés. Ekkor a fenti $(A_1, \ldots, A_n)$-re $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathrm{Ded}_{\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax} \rangle}(\Gamma; A)$

2.1.2.2. Elnevezés. $\Gamma \vdash_{\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax} \rangle} A$ fennállása esetén azt mondjuk, hogy az A formula *levezethető* a Γ formulahalmazból az Ax axiómák feltevésével, az In következtetési szabályok segítségével. Az előbbi $(A_1, \ldots, A_n)$ formulasorozatot az A egy *levezetésének* nevezzük (a Γ formulákból, az Ax axiómák feltevésével, az In következési szabályok alkalmazásával).

2.1.2.3. Megjegyzés. Nyilván, ha $(A_1, \ldots, A_n) \in \mathrm{Ded}_{\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax} \rangle}(\Gamma; A)$, akkor minden $k \in \{1\ldots n\}$-ra $(A_1, \ldots, A_k) \in \mathrm{Ded}_{\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax} \rangle}(\Gamma; A_k)$ is áll, azaz egy levezetés első k eleme levezetése a levezetés k-adik formulájának. A $\Gamma \cup \mathrm{Ax}$ elemeinek az üres formulasorozat levezetése Γ-ból.

2.1.3. Hilbert-féle levezetési redszerek.

Ekkor In egyelemű, csak a modus ponens (a leválasztás szabálya) az egyetlen levezetési szabálya:

$$\frac{A \qquad A \supset B}{B}$$

(kvantorok szereplésekor, azaz az elsőrendű nyelvekben ezen kívül még az univerzális generalizáció is megengedett. Lásd később.)

2.1.4. Természetes levezetési rendszerek.

Ekkor Ax üres, nincsenek axiómák, csak következtetési szabályok.

2.1.5. Propozicionális logika Hilbert-féle levezetéssel, a $\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}}$ nyelven

Axiómái:

$$\mathrm{Ax}(\mathrm{PC}^-) = \{ \begin{array}{l} A \supset (B \supset A), \\ (A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C)), \\ (\sim A \supset \sim B) \supset (B \supset A) \end{array} \}_{A,B,C \in \mathrm{Fm}^-(\mathrm{PL})}$$

Jelölés: $\overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^-}$

2.1.5.1. Elnevezés. Az axiómákat a következőképpen nevezhetjük el – mindenféle részletesebb magyarázat nélkül – rendre:

- „az igaz bármiből következik”,
- „beszorzás”,
- „kontrapozíció”

ezek az elnevezések helytelenek, de nulladik közelítésben elfogadhatók. $\sim$-et negációnak, $\supset$-et kondicionálisnak nevezzük.

2.1.6. Propozicionális logika Hilbert-féle levezetéssel, a $\mathfrak{Fm}^{+}_{\mathrm{PL}}$ nyelven

Axiómái:

$$\mathrm{Ax}(\mathrm{PC}^{+}) = \mathrm{Ax}(\mathrm{PC}^{-}) \cup \{A\&B \subsetneqq\ \sim (A \supset\sim B), A \vee B \subsetneqq (\sim A \supset B)\}_{A,B\in\mathrm{Fm}^{+}(\mathrm{PL})}$$

Jelölés: $\overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^{+}}$. & konjunkció, $\vee$ alternáció, $\equiv$ ($A \equiv B$ definíció szerint $(A \supset B)\&(B \supset A)$) a bikondicionális.

2.2. Levetezési technikák, alapvető levezetési szabályok, levezetésfa.

2.2.1. Modus ponens (a leválasztás szabálya).

Ha $\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A \supset B$ akkor $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} B$.

Bizonyítás. Ha $(A_1, \dots, A_n, A \supset B) \in \mathrm{Ded}(\Gamma, A \supset B)$, akkor a modus ponens miatt $(A_1, \dots, A_n, A, A \supset B, B) \in \mathrm{Ded}(\Gamma \cup \{A\}, B)$.

2.2.2. Modus ponens (általánosabb)

Ha $\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A$ és $\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A \supset B$, akkor $\Gamma \vdash B$.

Bizonyítás. Ha $(A_1, \dots, A_n, A) \in \mathrm{Ded}(\Gamma, A)$, és $(B_1, \dots, B_m, A \supset B) \in \mathrm{Ded}(\Gamma, A \supset B)$, akkor a modus ponens miatt.

$$(A_1, \dots, A_n, A, B_1, \dots, B_m, A \supset B, B) \in \mathrm{Ded}(\Gamma, B)$$

2.2.3. Levezetésfa.

Ez utóbbi tulajdonság miatt grafikus reprezentációra is áttérhetünk, ha nehezünkre esik a sorozatokkal dolgozás. Ha elegendő azt tudni, hogy van levezetése egy formulának, akkor folyamodhatunk a következő levezetéskészítő eljáráshoz:

$$\frac{\underline{S_1} \in \mathrm{Ded}(\Gamma, A) \qquad\qquad \underline{S_2} \in \mathrm{Ded}(\Gamma, A \supset B)}{\underline{S_1}^\frown \underline{S_2}^\frown (B) \in \mathrm{Ded}(\Gamma, B)}$$

ahol $\underline{S_1}^\frown \underline{S_2}^\frown(B)$ azt jelenti, hogy a levezetés sorozatokat egymás után fűzzük. Azt, hogy ez az eljárás helyes, azt előző lemmából tudjuk.

Ha egy olyan fát tekintünk, ahol a fenti eljárások az elégazások és a levelek a Γ elemeiből, vagy az axiómákból állnak, akkor a levezetésfához jutunk. Ha adott egy levezetésfa, akkor ebből a fenti konstrukcióval legyártható a levezetés.

2.2.3.1. Definíció. Legyen $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle$ levezetési rendszer, $\Gamma \subseteq \mathfrak{Fm}$ és Π olyan fa, melynek csúcsai $\mathfrak{Fm}$-beli formulákkal vannak címkézve és

1. levelei a Γ formulahalmaz vagy az Ax halmaz elemeivel vannak címkézve és
2. ha az $A_1, \ldots, A_n$ formulákkal címkézett csúcsokból kifutó élek az A formulával címkézett csúcs összes befutó éle, akkor $(A_1, \ldots, A_n, A)$ az In halmaz valamely I elemének esete (azaz az A következménye az $A_1, \ldots, A_n$ formuláknak az I következtetés által)

akkor Π egy levezetésfa $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle$-ban Γ-ból. Ezt a fát ilyenkor

$$\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle \quad \begin{matrix}[\Gamma]\\ \Pi\end{matrix}$$

jelöli (azaz a fenti $[\Gamma]$ arra utal, hogy a levelek honnan jöhetnek az axiómákon kívül.) Ha Π olyan fa, melynek gyökérpontja A és az A feletti liget rendre a $\Pi_1, \ldots \Pi_n$ fákból áll, akkor Π-t még $([\Gamma]\Pi_1, \ldots, [\Gamma]\Pi_n/A)$-val is jelöljük, illk azt rajzoljuk, hogy

$$\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Gamma] & & [\Gamma]\\ \Pi_1 & \ldots & \Pi_n\end{matrix}}{A}$$

2.2.3.2. Eljárás. Ha Π levezetésfa $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle$-ban Γ-ból, akkor Π gyökérformulájának levezetését úgy készítjük el, hogy

1. ha egy levél címkéje A, akkor ezt felvesszük egy egyelemű sorozatba: $\underline{S_0} = (A)$ sorozatba,
2. ha az A csúcsa fölötti részfa

   $$\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{In}, \mathrm{Ax}\rangle \quad \dfrac{\begin{matrix}[\Gamma] & & [\Gamma]\\ \Pi_1 & \ldots & \Pi_n\end{matrix}}{A}$$

   alakú és $[\Gamma]\Pi_1$-hez, ..., $[\Gamma]\Pi_n$-hez már hozzárendeltük rendre az $\underline{S_1}, \ldots, \underline{S_n}$ sorozatokat, akkor legyen az A-hoz rendelt $\underline{S}$ sorozat: $\underline{S_1}^\frown \ldots ^\frown \underline{S_n}^\frown(A)$

2.2.3.3. Tény. A fentiek esetén Π gyökérformulájához rendelt sorozat valóban a gyökérformula egy levezetése Γ-ból.

2.2.4. Példa: „Ami szép, az szép” ($\vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A \supset A$)

Bizonyítás.

$$\dfrac{\dfrac{A \supset ((A \supset A) \supset A) \qquad (A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))}{(A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)} \qquad A \supset (A \supset A)}{A \supset A}$$

Illetve $A_1 = (A \supset ((A \supset A) \supset A))$ ez az első axiómaséma egy esete,
$A_2 = (A \supset ((A \supset A) \supset A)) \supset ((A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A))$ a második axiómaséma egy esete,
$A_3 = (A \supset (A \supset A)) \supset (A \supset A)$ modusz ponensszel levonva,
$A_4 = A \supset (A \supset A)$ az első axiómaséma egy esete,
$A_5 = A \supset A$ modusz ponensszel levonva.
Ekkor $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ bizonyítása $A \supset A$-nak.

2.2.5. Láncszabály

$$\{A \supset B, B \supset C\} \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A \supset C$$

Levezetésfával:

$$\dfrac{A \supset B \qquad \dfrac{\dfrac{(B \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)) \qquad B \supset C}{A \supset (B \supset C)} \qquad [A \supset (B \supset C)] \supset [(A \supset B) \supset (A \supset C)]}{(A \supset B) \supset (A \supset C)}}{A \supset C}$$

2.3. Direkt referenciális jelentéselmélet

Eddig vajmi kevés értelemet (jelentést) lehetett a fenti nyelvhez rendelni, most bemutatunk egy jelentéselméletet hozzá, melyet mi – Dummett után – a direkt referencia eljárásának nevezünk. Eszerint a jeleknek a metaelméletben megadjuk a referenciáját (faktuális értékét), majd a kompozicionalitás elve alapján az összetett kifejezéseknek az összetétel módja szerint automatikusan származtatjuk a referenciáját (faktuális értékét). Egy rövid példán bemutatjuk a tárgynyelv-metanyelv felosztás stratégiájának működését és megnézzük, hogy miben áll a direkt referenciális jelentéselméletban egy-egy metaelméleti fogalom szintaktikai és szemantikai szerepe.[12]

2.3.1. Fordítás és strukturális-leíró név

Mint említettük, PC nyelve (ill. pl. PC^{+} nyelve) *modellezi* a természetes nyelv azon *fragmentumát,* melyet úgy kapunk, hogy a nyelv mondatait logikai konnektívumokra (logikai szavakra: „és”, „vagy”, „nem”, „ha …, akkor …”) és az általuk összekapcsolt mondatrészekre bontjuk. PC formális nyelve tehát logikai konnektívumok jeleiből és tovább nem bontott mondatok jeleiből áll. Ez a *tárgynyelv.*
A *metanyelv* legyen a természetes nyelv. Most két fogalmat kell tisztáznunk:

[12] A szintaktika ilyen stílusú felépítését a későbbiekben csak bizonyos esetekben (az ε-logikában és a Principia Mathematica tárgyalásánál) fogjuk követni, a többi helyen megmaradunk a fenti, generált formulahalmazokkal való megközelítésnél.

– tárgynyelv egy mondatának *metanyelvi fordítását* és

– a tárgynyelv egy kifejezésének *strukturális-leíró nevét*

Mindkettő metanyelvi kifejezés, az első egy metanyelvi mondat. A második egy név, azaz nincs predikatív jellege, nem mondat, annak ellenére, hogy tárgynyelvi formulát ír le; viszont lehet róla állítani valamit.

2.3.1.1. Definíció.

1. A fordítást a tárgynyelvi formulák szerkezetére vonatkozó indukcióval definiáljuk.

   (a) PC^+ atomi formuláinak $\mathrm{At} = \{A_i \mid i\}$ halmazát. Ekkor PC^+ egy *fordítása* egy olyan $T : \mathrm{At} \to \mathrm{NatLangSent}$ függvény, mely minden $A \in \mathrm{At}$-hoz a természetes nyelv egy $T(A) \in \mathrm{NatLangSent}$ kijelentő mondatát rendeli.

   (b) Ha A, B tárgynyelvi formulákhoz már rendeltünk fordítást, akkor legyen

$$\begin{aligned} T(A\&B) &= \text{„}T(A) \text{ és } T(B)\text{”} \\ T(A \vee B) &= \text{„}T(A) \text{ vagy } T(B)\text{”} \\ T(A \supset B) &= \text{„ha } T(A)\text{, akkor } T(B)\text{”} \\ T(\sim A) &= \text{„nem } T(B)\text{”} \end{aligned}$$

2. A tárgynyelv formuláinak *strukturális-leíró neve* a következő.

   (a) α_i a *strukturális-leíró neve* az i-edik atomi formulajelnek (azaz ha $z = A_i$), ahol $i > 0$ természetes szám;

   (b) n, c, a, i, lp és rp a *strukturális-leíró neve* rendre a tárgynyelvi $z = \sim$, &, $\vee$, $\supset$, (,) jeleknek;

   (c) $x {}^\frown y$ a *strukturális-leíró neve* annak a karaktersorozatnak, mely az x és y strukturális-leíró nevű karaktersorozat ilyen sorrendben vett egymás mellé írásával keletkezik,

   (d) ha x és y karaktersorozatok nevei, akkor $\mathrm{Neg}\, x$, $x \,\mathrm{Con}\, y$, $x \,\mathrm{Alt}\, y$, $x \,\mathrm{Imp}\, y$ rövidíti az alábbi *strukturális-leíró neveket*:

$$\begin{aligned} &\mathrm{n}^\frown\mathrm{lp}^\frown x^\frown\mathrm{rp} \\ &\mathrm{lp}^\frown x^\frown\mathrm{rp}^\frown\mathrm{c}^\frown\mathrm{lp}^\frown y^\frown\mathrm{rp} \\ &\mathrm{lp}^\frown x^\frown\mathrm{rp}^\frown\mathrm{a}^\frown\mathrm{lp}^\frown y^\frown\mathrm{rp} \\ &\mathrm{lp}^\frown x^\frown\mathrm{rp}^\frown\mathrm{i}^\frown\mathrm{lp}^\frown y^\frown\mathrm{rp} \end{aligned}$$

   Az A tárgynyelvi karatersorozat strukturális-leíró nevét

$$\text{‘}A\text{’}$$

   jelöli.

Hogy a tárgynyelv mely szimbólumsorozata *formula* az tulajdonképpen egy metaelméleti szintatikai fogalom. Ennek tényét pusztán a karaktersorozatban szereplő karakterek elrendezése határozza meg. PC^+ formuláinak halmaza, azaz $\mathrm{Fm}(\mathrm{PC}^+)$ egy a kifejezések felépítésére vonatkozó indukcióval definiálható[13] osztály.

2.3.1.2. Formula (mondat), új definíció. Az S tárgynyelvi kifejezés formula, ha

1. 'S' $= \alpha_i$ valamely $i > 0$ természetes számra.
2. Ha $B, C \in \mathrm{Fm}(\mathrm{PC}^+)$ és 'S' a következők valamelyikével azonos: Neg 'A', 'A' Con 'B', 'A' Alt 'B', 'A' Imp 'B'.[14]

A továbbiakban a formulákat mondatoknak nevezzük és osztályukat Sent-tel.

2.3.1.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy a tárgynyelv egy S mondata igaz a T fordítás szerint, ha

'S' $= \alpha_i$ valamely i-re és $T(A_i)$, (!)
'S' $=$ Neg 'A' és 'A' nem igaz,
'S' $=$ 'A' Con 'B' és 'A' és 'B' is igaz,
'S' $=$ 'A' Alt 'B' és 'A' és 'B' közül legalább az egyik igaz,
'S' $=$ 'A' Imp 'B' és ha 'A' igaz, akkor 'B' is az.

Ezt az igaz fogalmat tehát a tárgynyelv mondataival kapcsolatban használjuk.

Megjegyzés. A definíció (!) jellel jelölt sora erősen magyarázatra szorul. A metanyelven beszélünk, tehát amikor feltételt adunk S igazságára vonatkozóan, ez a feltétel a $T(S)$ metamondat, azaz nem szabad az igaz szót használni, vagy ha igen, akkor az nem ugyanazon jelentésű szó, mint amit az S-re definiálunk éppen, az a szó meta-metanyelvi igaz lenne.

2.3.1.4. Tétel *(Tarski-féle T-séma)* Legyen T a PC^+ egy fordítása, S tárgynyelvi mondat és igaz_T a T-hez az előbbeikben definiált igazságfogalom. Ekkor az alábbi természetes nyelvi mondat fennáll:

'S' igaz_T akkor és csak akkor, ha $T(S)$.

Magyarázat. A metanyelvben értelmes módon kell formálnunk a mondatokat ezért a tárgynyelvi mondatokat meg kell benne neveznünk. A tágynyelven a mondatok predikatívak: állítanak valamit. Ugyanezekre a mondatokra a metanyelvben, mint objektumokra, tárgyakra hivatkozunk, a nekik megfelelő metanyelvi *megnevezésükkel.*

[13] Maga, az, hogy létezik a tárgynyelvi kifejezésk felépítésére vonatkozó indukció az is a metaelmélet előfeltevéseinek a része. Ennek axiomatizálását Tarski adta meg először, mindazonáltal, hogy ez lézetik ez egy hihető feltételezés.

[14] Az $\in$ jelet addig, amíg nem mondunk mást csak az „eleme" szó rövidítéseként használjuk.

A T-sémába nem szerepelhet tárgynyelvi mondat csak annak strukturális-leíró nevét. Példaként vegyük a $\alpha_1 \mathrm{Con} \alpha_2$ struktúrájú tárgynyelvi mondatot és legyen $T(A_1) =$ a hó fehér és $T(A_2) =$ a fű zöld. Ekkor a Tarski-féle T-sémába helyettesítve azt kapjuk, hogy

Az $\alpha_1 \mathrm{Con}\, \alpha_2$ strukturájú mondat igaz, akkor és csak akkor, ha a hó fehér és a fű zöld.

Mindez akkor válik érthetővé, ha egy általánosabb értelemben a természetes nyelvre alkalmazzuk mindezeket a definíciókat. Ha tehát a tárgynyelv a természetes nyelv, akkor igaz lesz az alábbi metanyelvi mondat:

Az a mondat, mely a következő karakterek egymásutánjából áll:
A h ó f e h é r é s a f ű z ö l d,
akkor és csak akkor igaz, ha a hó fehér és a fű zöld.

Bizonyítás. Az S mondat szerkezetésre vonatkozó strukturális indukcióval igazoljuk a tételt. Megjegyezzük, hogy az, hogy a strukturális-indukció a metaelmélet egy eljárása, a tételhez fel kell tenni (Tarski után), hogy ilyen létezik a metaelméletben. Kövessük végig az igazság rekurzív definícióját.

Megjegyzés. Tehát a T-séma jelen esetben a logikai konektívumok direkt referenciális jelentését adja meg az igazság definícióján keresztül.

2.3.2. Logikai szükségszerűség

2.3.2.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a metanyelv mondatainak egy T fordítása *kielégíti* az $S \in \mathrm{Sent}(\mathrm{PC}^{+})$ tárgynyelvi mondatot, ha

‘S’ $= \alpha_i$ és $T(A_i)$, (!)
‘S’ $=$ Neg ‘A’ és T nem elégíti ki A-t
‘S’ $=$ ‘A’ Con ‘B’ és T A-t és B-t is kielégíti,
‘S’ $=$ ‘A’ Alt ‘B’ és T A-t vagy B-t is kielégíti,
‘S’ $=$ ‘A’ Imp ‘B’ és T ha A-t kielégíti, akkor B-t is kielégíti.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a tárgynyelv S mondata *logikailag szükségszerű,* ha S-et minden T metanyelvi fordítás kielégíti.

2.3.2.2. Tétel. Legyen T fordítás és ‘S’ az S tárgynyelvi mondat strukturális leíró neve. Ekkor a

Ha az ‘S’ strukturájú tárgynyelvi mondat logikailag szükségszerű, akkor $T(S)$.

metanyelvi mondat igaz.

Bizonyítás. Legyen T tetszőleges fordítás. Az S felépítésére vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy S-t pontosan akkor elégíti ki T, ha $T(S)$.

Először legyen 'S' $= \alpha_i$. Már most, ha T kielégíti A_i-t, akkor $T(S)$ és ha $T(A_i)$, akkor T kielégíti α_i-t.
Tegyük fel, hogy a S összetett és hogy S minden összetevőjére igaz az állítás. Példaként csak az $S =$ 'A' Con 'B' összetételt nézzük meg, a többi ugyanígy megy. Tegyük fel, hogy T kielégíti S-t. Ez definíció szerint pontosan azt jelenti, hogy A-t és B-t is kielégíti. De ekkor $T(A)$ *és* $T(B)$, ami pont az S fordítása.

Megjegyzés. A legegyszerűbb, ha konkrét példán magyarázzuk meg. Legyen T a következő fordítás:

$$T(A_1) = \text{a Mikulás Lappföldön lakik}, T(A_2) = \ldots, \ldots$$

és legyen 'S' $= \alpha_1 \,\mathrm{Imp}\, \alpha_1$. Ekkor a tétel állítása:

> Ha a $\alpha_1 \,\mathrm{Imp}\, \alpha_1$, strukturájú tárgynyelvi mondat logikailag szükszégszerű, akkor ha a Mikulás Lappföldön lakik, akkor a Mikulás Lappföldön lakik.

Ami nem egy tökéletes fordítás, de teljesen érthető, szándéklaink szerint a következő metanyelvi mondatot kapjuk:

> Ha a tárgynyelvi $\alpha_1 \,\mathrm{Imp}\, \alpha_1$ mondat logikailag szükségszerű, akkor a Mikulás Lappföldön lakik, feltéve, hogy a Mikulás Lappföldön lakik.

Megjegyzés. Most már kezdünk nagyon közel lenni témánkhoz, ahhoz a logikához, amit PC modellez. A logikai axiómák azt biztosítják, hogy a fenti mondatokról pusztán *strukturálisan* eldönthető legyen, hogy logikai szükségszerűségek-e. Szemben a szemantikailag definiált (direkt referenciát felhasználó) logikai szükségszerűséggel. Lényegében tehát arról van szó, hogy úgy kerüljük ki a szemantikai definíciót, hogy a metaelméleti axiómákat próbáljok visszafordítani a tárgynyelv szintjére. Ez egyáltalán nem biztos, hogy sikerül. Vannak nagyon zavarbaejtő esetek a logikában, amikor erre egyszerű tárgynyelv esetén nincs lehetőség.

2.3.2.3. Szemantikai következmény, helyesség, teljesség. Ha a logikai szükségszerűséget a természetes nyelvtől függetlenül, de egy kellően gazdag metanyelvre vonatkozóan definiáljuk, akkor fennáll az a szoros kapcsolat (a *Kalmár-féle teljességi tétel,* lásd [Krist]), hogy $\vdash A$ pontosan akkor, ha A logikai szükszégszerűség. Ezt a fogalmat általánosíthatjuk. Legyen $\Gamma \models A$ igaz, ha minden olyan T fordítás esetén, ami szerint Γ minden eleme igaz, akkor ezek szerint a fordítások szerint A is igaz. Ezzel a szemantikai fogalommal teljesül, az alábbi kettő megállapítás:

1. Ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \models A$ (azaz a $\vdash$ reláció *helyes* a $\models$ relációra nézve)

2. Ha $\Gamma \models A$, akkor $\Gamma \vdash A$ (azaz a $\vdash$ reláció *teljes* a $\models$ relációra nézve)

Ez a tétel (az itt nem definiált értékelésekkel kimondott megfelelője[15]) a legtöbb matematikai logikai alapozó könyvben megtalálható. Az $\Gamma \models A$ relációt szemantikai

[15] A T fordítással szemben egy v értékelés az atomi fomulákhoz nem metamondatokat, hanem igazságértékeket rendel, azaz az i, h értékeket rendeli. Ez a későbbiekben a kételemű Boole-algebra értékeit felvevelő algebrai értékelésnek fog megfelelni.

következménynek nevezzük. A bizonyításelméleti jelentéselméletnek nem tárgya a szintaktikai és szemantikai következtetés ezen kapcsolatának különösebb feltárása. Az a matematikai logika feladata. A bizonyításelmélet legfőbb feladatai egyfelől a logikák közti kapcsolatok feltárása, másfelől normalizációs tételek bizonyítása. A bizonyításelméleti jelentéselmélet feladata pedig a kalkulkusok jelentéselméletének feltárása a formális nyelvek használatelméleti jelentéselmélete felől.

2.4. Használatelméleti jelentéselmélet, bizonyításelméleti szemantika

Egy másik stratégiát fogunk látni jelentéselmélet megalkotására. Eddig a logikai konnektívumok jelentését közvetlenül egy metanyelvi szóra vezettük vissza. Most a metanyelvi használattal fogjuk kapcsolatba hozni.

2.4.1. Dedukciótétel.

Ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} B$, akkor $\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}^{\pm}} A \supset B$.

Bizonyítás. Legyen $(B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n) \in \mathrm{Ded}(\Gamma \cup \{A\}, B)$. k-ra vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy minden k-ra, ha $1 \leq k \leq n$, akkor $\Gamma \vdash A \supset B_k$.
Legyen $k = 1$, azaz $B_1 = B$. A levezethetőség definíciójából következik, hogy B csak $\Gamma \cup \{A\}$ eleme lehet vagy axióma, mert levezetési szabályt csak akkor használhatnánk, ha lenne előtte tag a sorozatban.
Ha $B \in \mathrm{Ax} \cup \Gamma$, akkor az „igaz bármiből következik” miatt

$$(\mathrm{PC}^{\pm})\ \frac{B \qquad\qquad B \supset (A \supset B_1)}{A \supset B}$$

levezetésfája $A \supset B$-nak.
Ha $B \equiv A$, akkor $\Gamma \vdash A \supset A$ mivel az előzőek miatt $\emptyset \vdash A \supset A$ is igaz, azaz a levezetése ugyanaz, mint $\emptyset$-ből.
Legyen $1 \leq k \leq n$ olyan, hogy minden $1 \leq i < k$-ra $\Gamma \vdash A \supset B_i$. Két eset van.
$B_k \in \mathrm{Ax} \cup \Gamma$. Ekkor

$$(\mathrm{PC}^{\pm})\ \frac{B_k \qquad\qquad B_k \supset (A \supset B_k)}{A \supset B_k}$$

levezetésfája $A \supset B_k$-nek Γ-ból.
Ha B_k-ra a levezetési szabály egy alkalmazásával következtettünk, azaz vannak $i, j < k$ hogy $B_j \equiv B_i \supset B_k$-vel, akkor az indukciós feltétel miatt

$$(\mathrm{PC}^{\pm})\ \cfrac{\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Pi\end{matrix}}{A \supset (B_i \supset B_k)} \qquad (A \supset (B_i \supset B_k)) \supset ((A \supset B_i) \supset (A \supset B_k))}{(A \supset B_i) \supset (A \supset B_k)} \qquad \cfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Sigma\end{matrix}}{A \supset B_i}}{A \supset B_k}$$

levezetésfa és ebből elkészíthető a szükséges bizonyítás, ahol Π és Σ ligetek az indukciós feléttelek miatt vannak.

2.4.1.1. Megjegyzés. Az elsőként igazolt modusz ponensz szabály és az előbb bizonyított dedukciótétel alapján mondjhatjuk, hogy

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash B \text{ akkor és csak akkor, ha } \Gamma \vdash A \supset B$$

vagy üres Γ esetén

$$A \vdash B \text{ akkor és csak akkor, ha } \vdash A \supset B$$

(vagyis az, hogy az A feltétellel B levezethető pontosan azt jelenti, hogy $A \supset B$). Ez a jellemzés (ekvivalencia) megadja a $\supset$ logikai konnektívum bizonyításelméleti jelentését. A jellemzés két iránya két jelentésrészt tartalmaz. A *pragmatista* jelentésrész azt mondja meg, hogy az $A \supset B$ alakú kifejezésből mire lehet következtetni, hogyan lehet továbbhaladni egy bizonyításban, ha tudjuk, hogy $\Gamma \vdash A \supset B$, azaz *mire használható* egy ilyen állítás. A *verifikacionista* jelentésrész azt mondja meg, hogy az $\Gamma \vdash A \supset B$ állításának mi a feltétele, mivel lehet igazolni, hogy egy ilyen alakú állítás fennáll, *mikor használható* egy ilyen állítás.

2.4.1.2. Megjegyzés. Felvetődik a kérdés, hogy milyen kapcsolatban van a „ha ..., akkor..." szerkezet a bizonyításelmélet szerint a $\supset$ funktorral. Mondható-e például, hogy az alábbi állítás (az általános modusz ponensz és a dedukciótétel miatt)

$$\Gamma \vdash A \supset B \text{ akkor és csak akkor, ha } \Gamma \vdash A \text{ esetén } \Gamma \vdash B$$

fennáll? A balról jobbra irány biztosan teljesül az általánosabb modusz ponensz miatt. Visszafelé teljesül? *Klasszikusan* a „ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$" metanyelvi mondat ekvivalens a „$\Gamma \nvdash A$ vagy $\Gamma \vdash B$" mondattal. Az esetszétválasztás szabályát alkalmazva, ha $\Gamma \vdash B$, akkor persze igaz $\Gamma \cup \{A\} \vdash B$, amiből a $\Gamma \vdash A \supset B$. De $\Gamma \nvdash A$ esetén nem következik a bal oldal (nem A vagy B). $\Gamma \nvdash A$ (természetesen) nem ugyanaz, mint $\Gamma \vdash\sim A$. Az utóbbiból következne a bal oldal (ez később látható lesz). Ha ezt megkövetelnénk, az a negációteljességgel lenne ekvivalens, ami pont témánk centrális kérdése (ti. Gödel tételének konklúziója a bizonyos körülmények között az aritmetikában fennálló nemteljesség). Tehát klasszikusan biztosan nem áll fenn a fenti állítás.
A kérdés tehát, hogy valamilyen szigorúbb értelemben igaz-e. Az egyik lehetőség, valamilyen *módon,* valami szigorú modalitásban igaz a feltételes állítás, van-e kitüntetett levezetése B-nek, ha A-nak van. Pl. érthető-e úgy a „ha $\Gamma \vdash A$, akkor $\Gamma \vdash B$" mondat, hogy minden esetben, amikor A-nak van levezetése, akkor B-nek is van (azaz intuicionista/konstruktivista értelemben)? Vagy egy még szigorúbb értelmet kell találnunk? Kell-e B-nek olyan levezetése is van, mely A-n áthaladva bizonyítja B-t, hiszen ebből is következne a bal oldal (*releváns logika*).

2.4.1.3. Tarski-féle fordítás Teljesen más a helyzet, ha a $\Gamma\ \vdash$ metanyelvi predikátumot az „igaz"-ra cseréljük. Ekkor ugyanis fennáll a fenti ekvivalencia. Ebből viszont az következik, hogy a klasszikus logika az igaz-hamis logika de nem a levezethetőség logikája. De akkor mi a levezethetőség logikája? A nemklasszikus logikák fejezet erre próbál majd választ adni.

2.4.1.4. A $\supset$-re vonatkozó első két axióma jelentése A direkt referenciális elmélet szerint az axiómák elég olvashatatlanok a természetes nyelvi fordításukban:

> „‘$A \supset (B \supset A)$’ igaz, akkor és csak akkor, ha ha A, akkor ha B, akkor A.”
> „‘$(C \supset (A \supset B)) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))$’ igaz, akkor és csak akkor, ha ha ha C, akkor ha A, akkor B, akkor ha ha C, akkor A, akkor ha C, akkor B.”

Ennél lényegesen áttekinthetőbb a bizonyításelméleti jellemzés, amit következtetéses (pontosabban szekvens kalkulusos) szimbolikával fogunk jelölni. Az első axióma

$$\frac{\{A, B\} \vdash A}{\vdash A \supset (B \supset A)}$$

$$\frac{\vdash A \supset (B \supset A)}{\{A, B\} \vdash A}$$

És a második

$$\frac{\{C, C \supset A, C \supset (A \supset B)\} \vdash B}{\vdash (C \supset (A \supset B)) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))}$$

$$\frac{\vdash (C \supset (A \supset B)) \supset ((C \supset A) \supset (C \supset B))}{\{C, C \supset A, C \supset (A \supset B)\} \vdash B}$$

2.5. Beágyazási és reprezentációs tételek

A szűkebb jelrendszerű propozícionális logika triviális módon „beágyazható” a bővebbe. A $\langle \sim, \supset \rangle$ által generált klasszikus mondatkalkulus *töredéke* a $\langle \sim, \supset, \&, \vee \rangle$ által generált klasszikus mondatkalkulusnak, a levezethető mondatok a töredékben ugyanazok, mint bővebb rendszerben levezethetők.

2.5.1. PC^- beágyazása PC^+-ba

2.5.1.1. Tény – PC^- *beágyazása* PC^+*-ba* – Tekintsük a $h : \mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}} \to \mathrm{Fm}^+_{\mathrm{PL}}; A \mapsto A$ homomorfizmust (mely az $\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}}$ és $\mathfrak{Fm}^+_{\mathrm{PL}}|_{\sim,\supset}$ algebrák között halad). Ekkor $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}}$ esetén 1)

$$\Gamma \overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^-} A \quad \Rightarrow \quad h(\Gamma) \overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^+} h(A).$$

2) Ha $h(A)$-nak van olyan bizonyítása $h(\Gamma)$-ból, mely elkerüli az $\ulcorner \mathbf{A} \& \mathbf{B} \subsetneqq\ \sim (\mathbf{A} \supset \sim \mathbf{B}) \urcorner$, $\ulcorner \mathbf{A} \vee \mathbf{B} \subsetneqq (\sim \mathbf{A} \supset \mathbf{B}) \urcorner$ axiómasémákat (nem szerepelnek a bizonyításban ezek elemei, mint olyan formulák, amikre mint axiómák hivatkozunk), akkor

$$\Gamma \overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^-} A.$$

Ui.: a bizonyítások azonosak.

2.5.1.2. Erősebb beágyazás. Egy kicsit erősebb, de még mindig triviális beágyazás a következő. A $\langle\sim,\supset,\&,\vee\rangle$ által generált klasszikus mondatkalkulus *reduktuma* a $\langle\sim,\supset\rangle$ műveletekre olyan klasszikus mondatkalkulust alkot, melyben a levezethető mondatok ugyanazok, mint bővebb rendszerben az & és $\vee$-t tartalmazó axiómákat kihagyó levezetéssel rendelkezők. Legyen $(\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X$ az a formulaalgebra, amit úgy kapunk, hogy egyfelől $\mathrm{At}=\{\underline{\mathbf{A}}_i\}_{i\in I}$-ot kibővítjük a következő X mondatkonstans halmazzal:

$$X=\{A\&B,\ A\vee B\mid A,B\in\mathrm{Fm}^+_{\mathrm{PL}}\}$$

majd vesszük a

$$(\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X=\langle \mathrm{At}\cup X\mid\langle\supset,\sim\rangle\rangle$$

generált szabadalgebrát. Legyen PC^-_X az a levezetési rendszer, melynek axiómasémái legyenek a PC^- axiómasémái (az a három) és hilberti a levezetése. Vegyük észre, hogy a $(\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X$ és $\mathfrak{Fm}^+_{\mathrm{PL}}$ algebrák alaphalmaza ugyanaz, csak a műveleteik mások. Ekkor igaz a következő

Tény – PC^-_X *beágyazása* PC^+*-ba* – Legyen $h:(\mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X\to\mathrm{Fm}^+_{\mathrm{PL}}$ az a homomorfizmus, mely $A\in X\cup\mathrm{At}$ esetén $h(A)=A$ és minden $A,B\in(\mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X$-re

$$h(\sim A)=\sim h(A)\quad\text{ill.}$$
$$h(A\supset B)=h(A)\supset h(B)$$

(ez az „elfelejtős” homomorfizmus $(\mathfrak{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X$-ből $\mathfrak{Fm}^+_{\mathrm{PL}}|_{\sim,\supset}$-be). Ha $\Gamma\cup\{A\}\subseteq(\mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}})_X$, akkor
1)

$$\Gamma\overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^-_X}A\quad\Rightarrow\quad h(\Gamma)\overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^+}h(A)$$

2) és ha $h(A)$-nak van $h(\Gamma)$-ból olyan bizonyítása, mely „elkerüli” az $\ulcorner\mathbf{A}\&\mathbf{B}\subsetneqq\sim(\mathbf{A}\supset\sim\mathbf{B})\urcorner$, $\ulcorner\mathbf{A}\vee\mathbf{B}\subsetneqq(\sim\mathbf{A}\supset\mathbf{B})\urcorner$ axiómasémákat, akkor

$$\Gamma\overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{(\mathrm{PC}^-)_X}A$$

Ui. 1) Ami itt bizonyítás, az ott is az. 2) Az a bizonyítás, ott is az.

2.5.2. PC^+ reprezentációja PC^--ban

Világos, hogy a szűkebb jelkészletű logika beágyazható a bővebbe. De ez furcsamód fordítva is igaz, azaz a szűkebbben megtalálható a bővebb.

2.5.2.1. Tétel – PC^+ *reprezentációja* PC^-*-ban* – Legyen $h:\mathrm{Fm}^+_{\mathrm{PL}}\to\mathrm{Fm}^-_{\mathrm{PL}}$ az a homomorfizmus, melyre $h(A)=A$, ha $A\in\mathrm{At}$ és

$$h(\sim A)=\sim h(A)$$
$$h(A\supset B)=h(A)\supset h(B)$$
$$h(A\&B)=\sim(h(A)\supset\sim h(B))$$
$$h(A\vee B)=(\sim h(A))\supset h(B)$$

ha $A, B \in \mathrm{Fm}^{+}_{\mathrm{PL}}$. Ekkor

$$\Gamma \overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^{+}} A \quad \Rightarrow \quad h(\Gamma) \overset{\mathrm{H}}{\vdash}_{\mathrm{PC}^{-}} h(A)$$

(Másképpen, ha van A-nak bizonyítása Γ-ból, akkor van $h(A)$-nak olyan bizonyítása $h(\Gamma)$-ból, mely végig $\mathrm{Fm}^{-}_{\mathrm{PL}}$-ban halad.)

2.5.2.2. Bizonyítás. 1.) Először is minden $A \in \mathrm{Fm}^{+}_{\mathrm{PL}}$-ra $h(h(A)) = h(A)$, melyet strukturális indukcióval könnyen igazolhatunk. Ha A atomi, akkor $h(h(A)) = h(A) = A$. Ha pedig A összetett, akkor h definíciója és az indukciós feltevés (IF) alapján:

$$\begin{aligned} h(h(\sim A)) &= h(\sim h(A)) \\ &=\sim h(h(A)) \qquad [\mathrm{IF}] \\ &=\sim h(A) \\ &= h(\sim A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(h(A \supset B)) &= h(h(A) \supset h(B)) \\ &= h(h(A)) \supset h(h(B)) \qquad [\mathrm{IF}] \\ &= h(A) \supset h(B) \\ &= h(A \supset B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(h(A \& B)) &= h(\sim (h(A) \supset\sim h(B))) \\ &=\sim (h(h(A)) \supset\sim h(h(B))) \quad [\mathrm{IF}] \\ &=\sim (h(A) \supset\sim h(B)) \\ &= h(\sim (A \supset\sim B)) \\ &= h(A \& B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(h(A \vee B)) &= h(\sim h(A) \supset h(B)) \\ &=\sim h(h(A)) \supset h(h(B)) \quad [\mathrm{IF}] \\ &=\sim h(A) \supset h(B)) \\ &= h(\sim A \supset B) \\ &= h(A \vee B) \end{aligned}$$

2.) Most belátjuk a tételt. Legyen Π az A-nak egy levezetésfája Γ-ból. A fa méretére vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy Π-ből konstruálható $h(a)$-nak Σ levezetésfája $h(\Gamma)$-ból:

$$(\mathrm{PC}^{+}) \ \frac{\begin{matrix}[\Gamma] \\ \Pi\end{matrix}}{A} \qquad \rightsquigarrow \qquad (\mathrm{PC}^{-}) \ \frac{\begin{matrix}[h(\Gamma)] \\ \Sigma\end{matrix}}{h(A)}$$

a) Legyen A axióma PC^+-ban vagy Γ eleme. Ekkor A vagy PC^+ első három axiómája közül kerül ki és akkor $h(A)$ axiómája PC^--nak, vagy Γ eleme és akkor $h(A) \in h(\Gamma)$ miatt triviálisan teljesül:

$$(\mathrm{PC}^+)\ \frac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Pi\end{matrix}}{A} \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{PC}^-)\ \frac{\begin{matrix}[h(\Gamma)]\\ \Sigma\end{matrix}}{h(A)}$$

Ha pedig A a PC^+ &-t és $\vee$-t definiáló axiómája, akkor h ezeket az axiómákat $h(B) \supset h(h(B))$ alakú formulákba viszik át, amik azonosak $h(B) \supset h(B)$-vel, amik pedig levezethetők bármiből PC^--ban. Emiatt ezekkel a levezetésekkel kiegészítve A bizonyítását kapjuk:

$$(\mathrm{PC}^+)\ \frac{}{A} \quad \rightsquigarrow \quad (\mathrm{PC}^-)\ \frac{\Sigma}{(h(B) \supset h(B))}$$

ahol $\frac{\Sigma}{(h(B) \supset h(B))}$ levezetésfája $h(B) \supset h(B)$-nak.
b) Az egyetlen levezetési szabály a modusz ponensz mindkét rendszerben. Legyen A bizonyítása

$$(\mathrm{PC}^+)\ \frac{\dfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Pi_1\end{matrix}}{B \supset A} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Pi_2\end{matrix}}{B}}{A}$$

Ekkor az indukciós hipotézis szerint léteznek PC^--ban olyan Σ_1 és Σ_2 levezetésligetek, melyekre teljesülnek, hogy

$$(\mathrm{PC}^-)\ \frac{\begin{matrix}[h(\Gamma)]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{h(A \supset B)} \qquad (\mathrm{PC}^-)\ \frac{\begin{matrix}[h(\Gamma)]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{h(B)}$$

De mivel $h(A \supset B)$ azonos $h(A) \supset h(B)$, ezért $\Sigma_1/h(A \supset B)$ azonos $\Sigma_1/h(A) \supset h(B)$-vel és

$$(\mathrm{PC}^-)\ \frac{\begin{matrix}[h(\Gamma)]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{h(A) \supset h(B)}$$

azaz $h(A) \supset h(B)$ levezethető PC^--ben. Ekkor a modusz ponenszt használva teljesül, hogy

$$(\mathrm{PC}^-)\ \frac{\dfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{h(B) \supset h(A)} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\Gamma]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{h(B)}}{h(A)}$$

2.6. A $\sim$-re vonatkozó következtetési szabályok ill. bizonyítási eljárások

A harmadik axiómát a kontrapozíció elvének is nevezhetjük. Az összes ilyen axiómát összefoghatjuk egy sémába: a $\ulcorner(\sim \mathbf{A} \supset\sim \mathbf{B}) \supset (\mathbf{B} \supset \mathbf{A})\urcorner$. Ennek természetes nyelvi fordításáról beszél az alábbi tétel.

2.6.1. A kontrapozíció metanyelvi fordítása.

Ha $\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim B$, akkor $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$.

Ui.:

$\Gamma \cup \{\sim A\} \vdash \sim B$	
$\Gamma \vdash (\sim A) \supset (\sim B)$	dedukciótétel
$\Gamma \vdash ((\sim A) \supset (\sim B)) \supset (B \supset A)$	axióma
$\Gamma \vdash B \supset A$	leválasztás (érv. köv.)
$\Gamma \cup \{B\} \vdash A$	leválasztás (érv. biz. elj.)

2.6.2. A kettős tagadás törlése.

$\vdash (\sim\sim A) \supset A$. Illetve $\sim\sim A \vdash A$.

Ui.: az előző alkalmazásával

$$\begin{aligned}
\{\sim\sim A\} \cup \{\sim\sim\sim\sim A\} &\vdash \sim\sim A \\
\{\sim\sim A\} \cup \{\sim A\} &\vdash \sim\sim\sim A \\
\{\sim\sim A, \sim\sim A\} &\vdash A \\
&\vdash (\sim\sim A) \supset A
\end{aligned}$$

2.6.3. A kettős tagadás szabálya.

$\vdash A \supset (\sim\sim A)$. Illetve $A \vdash \sim\sim A$.

Ui.: az előző alkalmazásával és kontrapozícióval:

$$\begin{aligned}
\sim\sim\sim A &\vdash \sim A \\
A &\vdash \sim\sim A
\end{aligned}$$

2.6.4. A kontrapozíció mindkét iránya. (De Morgan-szabály)

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ pontosan akkor, ha $\Gamma \cup \{\sim B\} \vdash \sim A$.

Ui.:

$$\begin{aligned}
\Gamma \cup \{A\} &\vdash B \\
\Gamma &\vdash A \supset B \\
\Gamma &\vdash (\sim\sim A) \supset A \text{ (a kettős tagadás törlése)} \\
\Gamma &\vdash (\sim\sim A) \supset B \quad \text{(láncszabály: HF)} \\
\Gamma \cup \{\sim\sim A\} &\vdash B \\
\Gamma \cup \{\sim\sim A\} &\vdash \sim\sim B \\
\Gamma \cup \{\sim B\} &\vdash \sim A
\end{aligned}$$

Láncszabályon a következőt értjük: ha $\Gamma \vdash A \supset B$ és $\Gamma \vdash B \supset C$, akkor $\Gamma \vdash A \supset C$.

2.6.5. A hamisból minden következik – Ex falso quodlibet.

$\{B, \sim B\} \vdash A$.

Ugyanis $\{\sim B, \sim A\} \vdash \sim B$ és ebből De Morgannal $\{\sim B, B\} \vdash A$.

Értelmes tehát bevezetnünk az ellentmondásmentesség fogalmát.

2.6.6. Ellentmondásmentes formulaosztály

Azt mondjuk, hogy a Γ formulaosztály *ellentmondásos,* ha van olyan A formula, hogy $\Gamma \vdash A$ és $\Gamma \vdash \sim A$.

Γ *ellentmondásmentes,* ha nem ellentmondásos, azaz minden A formulára $\Gamma \nvdash A$ illetve $\Gamma \nvdash \sim A$ közül legalább az egyik teljesül.

2.6.6.1. Hamisból minden következik. Ha Γ ellentmondásos formulaosztály, akkor minden A formulára

$$\Gamma \vdash A$$

Ui.: Legyen B olyan formula, hogy $\Gamma \vdash B$ és $\Gamma \vdash \sim B$. Tudjuk, hogy

$$\{B, \sim B\} \vdash A$$

azaz a dedukciótétel kétszeri alkalmazásával:

$$\{B\} \vdash \sim B \supset A$$

$$\vdash B \supset (\sim B \supset A)$$

világos, hogy ekkor

$$\Gamma \vdash B \supset (\sim B \supset A)$$

de tudjuk, hogy $\Gamma \vdash B$, azért a modusz ponensz miatt:

$$\Gamma \vdash \sim B \supset A$$

és azt is tudjuk, hogy $\Gamma \vdash \sim B$, azért a modusz ponensz miatt:

$$\Gamma \vdash A$$

2.6.6.2. Az ellentmondásmentesség jellemzése. Γ ellentmondásmentes formulaosztály, pontosan akkor, ha van olyan A formula, melyre $\Gamma \nvdash A$.

Ui.: 1) Legyen A tetszőleges formula, ekkor $\Gamma \nvdash A$ illetve $\Gamma \nvdash \sim A$ közül legalább az egyik teljesül, ezért van nem levezethető formula.

2) Ha A olyan formula, melyre $\Gamma \nvdash A$, akkor nem lehet Γ ellentmondásos, mert ellentmondásos formulaosztályból minden levezethető, így A is.

2.6.6.3. Ellentmondásmentesség igazolása Azt, hogy egy formulaosztály ellentmondásmentes egyfelől könnyű megmutatni: találni kell egy olyan formulát, ami nem levezethető. Erre egy kiváló jelölt az

$$A \supset A$$

formul, hiszen ez levezethető, és ezért csak azt kell megmutatni, hogy

$$\Gamma \nvdash \sim (A \supset A)$$

Nem levezethetőséget igazolni azonban nagyon nehéz feladat, hiszen azt kell belátni, hogy akárhogy is veszünk egy s bizonyítást, az nem bizonyítása $\sim (A \supset A)$-nak.

2.7. Algebrai szemantika

A bizonyításelméletnek nem dolga halmazelméleti szemantika keresése. De néha jó szolgálatot tesz kitekinteni a modellelméleti szemantikára, egyfelől, hogy képet kapjunk a logikai kalkulusokról (a levezetési rendszerekről) egy másféle szemszögből, másfelől, hogy konstruktív (tkp. a véges, rekurzív vagy megszámlálható) modelleket felhasználva megoldhassunk bizonyításelméleti feladatokat, főképpen bizonyíthatatlanság igazolását. A klasszikus (propozicionális) logikához olyan halmazelméleti szemantika rendelhető, mely egy egész algebraosztályt előtérbe állít, ez a Boole-algebra.

2.7.1. Boole-algebra

A $\mathfrak{B} = (B, \cdot, +, -, 0, 1)$ modell a B halmaz feletti $\cdot, +, -, 0, 1$ műveletekkel ($\cdot$, $+$ kétváltozós, $-$ egyváltozós, 0, 1 konstansok) ellátva Boole-algebra, ha

1. $\cdot$ és $+$ kommutatív, asszociatív és egymásra nézve disztributív,
2. $\cdot$ neutrális eleme 1, $+$ neutrális eleme 0,
3. $a + (-a) = 1$ és $a \cdot (-a) = 0$ minden $a \in B$-re.

2.7.2. Példák Boole-algebrára

a halmazalgebrák, azaz a $(B, \cap, \cup, X \setminus \ldots, \emptyset, X)$ rendszerek, ahol $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ valamely nemüres X halmazra és B elemei teljesítik a fenti axiómákat a megfelelő halmazműveletekkel és konstansokkal. Vagy az igazságértékek. Halmazalgebrákra példák valamely nem üres X halmaz esetén

1. $\mathcal{P}(X)$ (az X összes részhalmazainak halmaza), ha X nem üres.
2. $\mathbf{2} = \{\emptyset, X\}$
3. $\{A \subseteq X \mid A$ véges vagy A komplementere véges$\}$

2.7.3. Algebrai szemantika

A PC^+ egy algebrai szemantikáján a következőket értjük. Legyen At a PC^+ atomi formuláinak halmaza és $\mathfrak{B}$ egy Boole-algebra. *Boole-értékű értékelésnek* nevezünk (vagy csak értékelésnek, ha világos, hogy milyen algebrából jönnek az értékei) minden $v : \mathrm{At} \to B$ függvényt. Az alábbiakban adott v értékelésre az $\mathrm{Fm} \to B; A \mapsto [\![A]\!]_v$ leképezést rekurzívan definiáljuk és $[\![A]\!]_v$-t az $A \in \mathrm{Fm}$ formula v értékelés melletti faktuális értékének nevezzük:

1. $[\![A]\!]_v = v(A)$, ha $A \in \mathrm{At}$
2. $[\![B \vee C]\!]_v = [\![B]\!]_v + [\![C]\!]_v$,
3. $[\![B \& C]\!]_v = [\![B]\!]_v \cdot [\![C]\!]_v$,
4. $[\![B \supset C]\!]_v = (-[\![B]\!]_v) + [\![C]\!]_v$.
5. $[\![\sim B]\!]_v = -[\![B]\!]_v$.

Azon, hogy Γ *algebrai szemantikai következménye* A (jelekben: $\Gamma \models A$) azt értjük, hogy minden olyan v értékelés esetén, melyre minden $B \in \Gamma$-ra $v(B) = 1$ teljesül, igaz, hogy $v(A) = 1$.

2.7.4. Helyesség, teljesség, adekvátság

$\vdash$ *helyes* a $\models$ relációra nézve, ha

$$\Gamma \vdash A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \models A,$$

minden $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}$-re.

$\vdash$ *teljes* a $\models$ relációra nézve, ha

$$\Gamma \models A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash A,$$

minden $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}$-re.

$\vdash$ *adekvát* a $\models$ relációra nézve, ha helyes is és teljes is.

PC helyes és teljes az algebrai szemantikára nézve, de ebből minket bőven elég, ha a *helyesség* érdekel. Ezt szintén a formulák szerkezetére vonatkozó strukturális indukcióval lehet belátni.

Feladat. a) Igazoljuk, hogy a kételemű **2** Boole-algebra esetén vonatkozóan helyes PC! (Útmutatás: az axiómák igazak és a modusz ponensz átörökíti az igazságot.) b) Igazoljuk, hogy minden $\mathfrak{B}$ Boole-halmazalgebra (ezekben a műveletek a halmazműveletek) esetén a $\mathfrak{B}$ értékű algebrai szemantikára nézve helyes PC!

2.8. Nem feltétlenül klasszikus logikák: természetes levezetés

A természetes levezetési rendszerek valamiképpen komplementer jellegűek a hilberti levezetési rendszerekhez viszonyítva. Nincsenek logikai axiómáik, csak levezetési szabályaik. Tekintsük az

$$\mathfrak{Fm} = \langle \mathrm{At} \mid \langle \&, \vee, \supset \rangle \rangle$$

generált formulaalgebrát és az alábbi szabályokat

$$\&\mathrm{I} \quad \frac{A \quad B}{A \& B} \qquad\qquad \&\mathrm{E} \quad \frac{A \& B}{A} \qquad \frac{A \& B}{B}$$

$$\vee\mathrm{I} \quad \frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{B}{A \vee B} \qquad\qquad \vee\mathrm{E} \quad \frac{(A \vee B) \quad \begin{matrix} A^{\triangleright} \\ \vdots \\ {}^{\triangleright}C \end{matrix} \quad \begin{matrix} B^{\triangleright} \\ \vdots \\ {}^{\triangleright}C \end{matrix}}{C}$$

$$\supset\mathrm{I} \quad \frac{\begin{matrix} A^{\triangleright} \\ \vdots \\ {}^{\triangleright}B \end{matrix}}{A \supset B} \qquad\qquad \supset\mathrm{E} \quad \frac{A \qquad A \supset B}{B}$$

2.8.1. Megjegyzések.

1) Lényegében ezek alkotják az úgy nevezett **pozitív logikát**. Az ebben való levezetést $\vdash_P$-vel jelöljük.
3) A pozitív logika lényegében a középiskolában tanult *direkt bizonyításoknak* felel meg. Ahogy tanultuk, egy direkt bizonyításban egy $A \supset B$ következtetést úgy látunk be, hogy A-ból következtetünk A'-re, majd A'', majd és így tovább a végén B-re.
2) A $\vee$E (esetszétválasztás szabálya) és $\supset$I (dedukciótétel) nem következtetési szabályok abban az értelemben, ahogy korábban definiáltuk. Ezeket **bizonyítási eljárásoknak** (deduction rules) nevezzük, míg a többi rendes szabályt **valódi következtetési szabálynak** (proper inference rules).

Most, mielőtt a levezetést újradefiniálnánk, néhány példán meglátjuk, hogy mihez is fogunk hozzá.

2.8.2. Példa

$A\&(B \vee C) \vdash_P (A\&B) \vee (A\&C)$.

Rétegezett levezetési írásmóddal:

$$
\begin{array}{lll}
A\&(B \vee C) & & \\
A & & \\
B \vee C & & \\
\quad B & & \text{(lokális feltevés)} \\
\quad A\&B & & \\
\quad (A\&B) \vee (A\&C) & & \\
\quad C & & \text{(lokális feltevés)} \\
\quad A\&C & & \\
\quad (A\&B) \vee (A\&C) & & \\
(A\&B) \vee (A\&C) & &
\end{array}
$$

Fa-reprezentációval:

$$
\dfrac{\dfrac{A\&(B \vee C)}{(B \vee C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B \vee C)}{A} \quad B^{\triangleright}}{A\&B}}{{}^{\triangleright}(A\&B) \vee (A\&C)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B \vee C)}{A} \quad C^{\triangleright}}{A\&C}}{{}^{\triangleright}(A\&B) \vee (A\&C)}}{(A\&B) \vee (A\&C)}
$$

2.8.3. Definíció

Minden $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \subseteq \mathrm{Fm}^+$ és $A, B, C \in \mathrm{Fm}^+$-re:

$$\vee\mathrm{E}\frac{\langle \Gamma_1, A \vee B\rangle, \langle \Gamma_2, C\rangle, \langle \Gamma_3, C\rangle}{\langle \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{A\}) \cup (\Gamma_3 \setminus \{B\}), C\rangle}$$

itt $\Delta_{\vee\mathrm{E}}(\langle \Gamma_1, A \vee B\rangle, \langle \Gamma_2, C\rangle, \langle \Gamma_3, C\rangle) = \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 \setminus \{A\}) \cup (\Gamma_3 \setminus \{B\})$ az „eldobható feltételeket” definiáló hozzárendelés.

Hasonlóképpen, minden $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}^+$ és $A, B \in \mathrm{Fm}^+$-re:

$$\supset \mathrm{I}\frac{\langle \Gamma, A\rangle}{\langle \Gamma \setminus \{A\}, A \supset B\rangle}$$

itt $\Delta_{\supset\mathrm{I}}(\langle \Gamma, A\rangle) = \Gamma \setminus \{A\}$ az „eldobható feltételeket” definiáló hozzárendelése.

Eldobható premissza a $\vee E$ szabályban az A és B, a $\supset$ I-ban A. Ezeket a konklúzió feltételhalmazába nem kell beletennünk, azaz ezek elhagyhatók a feltételhalmazból. Ilyenkor azt mondjuk, hogy ezeket az eldobható premisszákat az a levezetési szabály dobja el, melyben szerepelnek.

Természetesen a következtetési szabályokat és hasonlóképpen tudjuk definiálni, de ott nem fog szűkülni a feltételhalmaz. Pl. Hasonlóképpen, minden $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}^+$ és $A, B \in \mathrm{Fm}^+$-re:

$$\vee\mathrm{I}\frac{\langle \Gamma, A\rangle}{\langle \Gamma, A \vee B\rangle}$$

itt $\Delta_{\vee\mathrm{I}}(\langle \Gamma, A\rangle) = \Gamma$.

2.8.4. Általános levezethetőség

Az S természetes levezetési rendszert levezetési szabályai definiálják. Ezek mind olyan $\frac{\cdots}{\cdots}$ relációk, melyekben $n+1$ argumentum áll relációban egymással, éspedig

$$(\langle \Gamma_1, A_1\rangle, \langle \Gamma_2, A_2\rangle, \ldots, \langle \Gamma_n, A_n\rangle, \langle \Delta, B\rangle) \in \frac{\cdots}{\cdots}$$

melynek jelölése:

$$\frac{\langle \Gamma_1, A_1\rangle, \langle \Gamma_2, A_2\rangle, \ldots, \langle \Gamma_n, A_n\rangle}{\langle \Delta, B\rangle}$$

ahol $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n, \Delta \subseteq \mathrm{Fm}^+$, $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathrm{Fm}^+$.

Definíció. Legyen $A \in \mathrm{Fm}$. Minden $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$-re egyszerre fogjuk rekurzióval definiálni azt a relációt, hogy *az s formulasorozat az A levezetése* Γ*-ból*, jelekben az

$$s \in \mathrm{Ded}_\Gamma(A)$$

relációt.

1. Ha $A \in \Gamma$, akkor az egyelemű (A) sorozat levezetése A-nak Γ-ból.
2. (a) Ha $A \in \Gamma$, az s sorozat utolsó eleme B és s levezetése B-nek Γ-ból, akkor $s^\frown(A)$ levezetése A-nak Γ-ból.

   (b) Ha $s_1, \ldots s_n$ levezetései $A_1, \ldots, A_n$-nek rendre $\Gamma_1, \ldots \Gamma_n$-ből, akkor $s = s_1^\frown \ldots {}^\frown s_n^\frown(A)$ levezetése A-nak a Δ-ból, ha $\frac{\cdots}{\cdots}$ olyan következtetési vagy levezetési szabály, hogy

   $$\frac{\langle \Gamma_1, A_1\rangle, \langle \Gamma_2, A_2\rangle, \ldots, \langle \Gamma_n, A_n\rangle}{\langle \Delta, A\rangle}$$

   ahol

   $$\Delta = \Delta_{\frac{\cdots}{\cdots}}(\langle \Gamma_1, A_1\rangle, \langle \Gamma_2, A_2\rangle, \ldots, \langle \Gamma_n, A_n\rangle)$$

Azt, hogy az $A \in \mathrm{Fm}$-nak $\Gamma \subseteq \mathrm{Fm}$-ból létezik levezetése így jelöljük:

$$\Gamma \vdash A$$

Természetesen ezt a levezethetőséget is lehet fákkal ábrázolni, ha minden egyen csúcshoz hozzárendeljük, hogy mely levezetési szabállyal jött ki és mely halmazból levezetés a csúcsformulája. Például az

$$\{A \vee A\} \vdash A$$

levezetének fa-reprezentációja a pozitív logikában:

$$\frac{\langle\{A \vee A\}, A \vee A\rangle \qquad \langle\{A \vee A, A\}, A\rangle \qquad \langle\{A \vee A, A\}, A\rangle}{\langle\{A \vee A\}, A\rangle}$$

Ez azonban eléggé áttekinthetetlen csakúgy, mint a belőle készíthető levezetés: $(A \vee A, A, A, A)$ mert nehezen lehet követni a premisszahalmazok feltüntetése nélkül, hogy mi a feltételhalmaz melyik pontban. Erre találták ki az eldobható premisszák címkézését, amelyet a következő pontban mutatunk be.

2.8.5. Schröder-Heister-féle levezetésfák

Hogy az eldobható premisszákat számon tartsuk két függvényt fogunk definiálni a levezetésfa csúcsain. Az eldobófüggvényt és a szabályfüggvényt. Ez egyszerűsíti a jelölésmódot, követhetővé teszi a bizonyítást, megenged számos általánosítást. Például vizsgálni tudunk majd olyan állításokat, hogy egy adott formula levezethető-e egy formulahalmazból *feltéve, hogy bizonyos új szabályokat megengedünk.* De sajnos a premisszahalmazok feltüntetése nélkül el is vesznek olyan alkalmazási területek, melyek azokkal kezelhetők voltak, pl. nem tudunk majd beszélni arról, hogy a premisszákat *eltérő* feltételhalmazokból vezettük le (azaz a levezetési szabályokban szereplő $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ halmazok az eldobható feltételektől különböző elemekben is különböznek). Például nem tudjuk kifejezni majd benne azt, hogy az alábbi levezetésben az A premisszák az $A \vee A$ feltétel nélkül is levezethető az A-t szerepeltető ágban.

$$\frac{\langle\{A \vee A\}, A \vee A\rangle \qquad \langle\{A\}, A\rangle \qquad \langle\{A\}, A\rangle}{\langle\{A \vee A\}, A\rangle}$$

Pedig ez egy lényeges lehetőség a levezethetőség definíciójában.

A levezetési szabályok fa reprezentációja most az alábbi alakúak lesznek (azonos feltételhalmazokkal)

$$\frac{\begin{matrix}(A_1) \\ \Pi_1 \\ \overline{B_1}\end{matrix} \quad \ldots \quad \begin{matrix}(A_n) \\ \Pi_n \\ \overline{B_n}\end{matrix}}{B}$$

ahol Π_1, $\ldots$,Π_n tetszőleges ligetek, az $[A_1]$, $\ldots[A_n]$ jelölések a ligetek felett pedig azt jelentik, hogy ezek az adott (Π_i/B_i) fában az A_i premissza eldobható (a közös Γ feltételhalmaz elemeitől különbözhetnek) és legitim módon szerepelhetnek a fa levelein.

Definíció. Ha Π tetszőleges formulafa, akkor a csúcsain értelmezett f függvényt *eldobó függvénynek* nevezzük, ha f értékei a Π csúcsai (formulaelőfordulásai) és ha A egy formulaelőfordulás, akkor $f(A)$ vagy az A, vagy egy ez alatti formulaelőfordulás.

Definíció. Ha Π tetszőleges formulafa és ennek f ledobófüggvénye, akkor a csúcsain értelmezett g függvényt *szabályfüggvénynek* nevezzük, amennyiben $g(A)$ minden A formulaelőfordulásra egy fa, mely a következő:

1. ha A levél, akkor $g(A) = A$
2. ha A egy levél alatti csúcs, akkor felette $g(A)$ az a fa, melynek gyökérpontja A, azaz
$$g(A) = \dfrac{B_1 \quad \dots \quad B_n}{A}$$
ha A fölött csak a $B_1, \dots, B_n$ levelek vannak
3. ha az A fölötti rész:
$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1}{B_1} \quad \dots \quad \dfrac{\Pi_i}{B_i} \quad \dots \quad \dfrac{\Pi_n}{B_n}}{A}$$
akkor
$$\dfrac{\dfrac{\Pi'_1}{B_1} \quad \dots \quad \dfrac{\Pi'_i}{B_i} \quad \dots \quad \dfrac{\Pi'_n}{B_n}}{A}$$
ahol minden i-re $\Pi'_i = \{g(C) \mid f(C) = B_i\}$

Definíció. Azt mondjuk, hogy A levezethető a Γ formulahalmazból egy S levezetési rendszerben ($\Gamma \vdash_S A$), ha van olyan Π formulafa és ennek f eldobó függvénye és g szabályfüggvénye, hogy

1. Π gyökérformulája A,
2. minden B csúcsra, ha $f(B) = A$, akkor $g(B)$ vagy Γ eleme, vagy egy levezetési szabály egy esete.

Ez a definíció kiterjeszthető azzal, hogy nem csak formulákat engedünk meg premisszaként, hanem levezetési szabályokat is (akár sémákat, akár egyedi formulafákat). Ilyenkor a „Γ eleme” kifejezésbe beleértjük, hogy definícióban szereplő $g(B)$ egy a feltételek között szereplő szabály egy esete legyen.

2.8.6. Példák

$$A \supset (B \supset C) \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

Levezetésfa:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{\triangleleft} \qquad A \supset B^{\triangleright}}{B^*} \qquad \dfrac{A^{\triangleleft} \qquad A \supset (B \supset C)^*}{B \supset C^*}}{{}^{\triangleleft}C^*}}{{}^{\triangleright}A \supset C^*}}{{}^*(A \supset B) \supset (A \supset C)^*}$$

Itt az eldobófüggvény:

$$
\begin{aligned}
&f(X^*) = {}^*(A \supset B) \supset (A \supset C)^* \\
&f(X^{\triangleright}) = {}^{\triangleright} A \supset C^* \\
&f(X^{\triangleleft}) = {}^{\triangleleft} C^*
\end{aligned}
$$

A szabályfüggvény:

$$
\begin{aligned}
g(A) &= A \\
g(A \supset B) &= A \supset B \\
g(A \supset (B \supset C)) &= A \supset (B \supset C) \\
g(B) &= \frac{A \quad A \supset B}{B} \\
g(B \supset C) &= \frac{A \quad A \supset (B \supset C)}{B \supset C} \\
g(C) &= \frac{B \quad B \supset C}{C} \\
g(A \supset C) &= \cfrac{\cfrac{A \quad A}{C}}{A \supset C} \\
g((A \supset B) \supset (A \supset C)) &= \cfrac{\cfrac{A \supset B}{A \supset C}}{(A \supset B) \supset (A \supset C)}
\end{aligned}
$$

A pozitív logikában érvényes az érvényes alábbi következtetés, az általános Schröder-Heister-levezetés szerint:

$$
\left\{ A\&(B \vee C),\ \frac{\mathbf{X}\&(\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})}{(\mathbf{X}\&\mathbf{Y}) \vee (\mathbf{X}\&\mathbf{Z})} \right\} \vdash (A\&B) \vee (A\&C)
$$

ahol $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ formulákat jelölő sémabetűk. Ennek levezetése a pozitív logikában:

$$
\frac{A\&(B \vee C)}{(A\&B) \vee (A\&C)}
$$

2.9. pre-Kripke szemantika

Most egy az algebraitól különböző szemantikát definiálunk, ami nem algebra értékű értékelés lesz, hanem az igazságot rendezési (részbenrendezési) relációra hivatkozva adja meg. *Részbenrendezésnek* nevezzük a $(P, \leq)$ struktúrát, ha $\leq$ a P halmazon értelmezett kétváltozós predikátum (reláció), melyre a következők teljesülnek:

1. minden $p \in P$-re $p \leq p$ (reflexív),
2. minden $p, q, r \in P$-re ha $p \leq q$ és $q \leq r$, akkor $p \leq r$ (tranzitív),
3. minden $p, q \in P$-re ha $p \leq q$ és $q \leq p$, akkor $p = q$ (antiszimmetrikus)

Példák részben rendezésre:

1. P tetszőleges halmazrendszer és $\leq$ a $\subseteq$ reláció,
2. $P = \mathbf{N}$ esetén $\leq$ kivételesen az $a \mid b$ oszthatóság reláció,
3. P egy L lineáris tér összes alterének halmaza és $K \leq M$, ha K lineáris altere M-nek L-ben.

2.9.1. Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C} = (C, \leq, \Vdash)$ az Fm formulahalmaz fölött (mely az Fm^+ nyelv töredéke) *pre-Kripke szemantika,* ha $\leq$ részben rendezés C fölött és $c \Vdash A$ olyan reláció, melynek első argumentuma $c \in C$, a második argumentuma $A \in \mathrm{Fm}$ és minden $c_1, c_2 \in C$ és $A \in \mathrm{Fm}$-re:

$$c_1 \leq c_2 \text{ és } c_1 \Vdash A, \text{ akkor } c_2 \Vdash A$$

Ilyenkor $\mathcal{C}$-t *ismeret reprezentációnak* vagy *ismeretállapotok halmazának* is nevezzük és $c \Vdash A$ azt jelenti, hogy az A kijelentést tudjuk a c állapotban. Ha tehát c_1 korábbi ismeretállapot c_2-nél és c_1-ben tudtuk A-t, akkor c_2-ben sem fogjuk elfelejteni. (Ez kétség kívül egy elég naiv ismetermodell.)

2.9.2. Lineáris tér pre-Kripke szemantikája

Tekintsünk egy L skalárszorzatos lineáris teret és ennek összes lineáris altereinek $\mathrm{Sub}(L)$ halmazát! Legyen továbbá $h : \mathrm{Fm} \to \mathrm{Sub}(L)$ olyan leképezés, hogy minden $A, B \in \mathrm{Fm}$-re

1. $h(\sim A) = h(A)^{\perp}$
2. $h(A \& B) = h(A) \cap h(B)$
3. $h(A \vee B) = h(A) + h(B)$
4. $h(A \supset B) = h(A)^{\perp} + (h(A) \cap h(B))$

ahol $K^{\perp}$ a K térre merőleges altér, $K + M$ a K és M által kifeszített altér.

A következő példáknál bőven elég a jól ismert $\mathbf{R}^2$ és $\mathbf{R}^3$ terekre gondolnunk.

2.9.2.1. Tény. Ekkor $(C_h, \leq, \Vdash_h)$ az alábbi

$$C = \{\Gamma \mid \Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \text{ és } \Gamma \text{ véges }\}$$

halmaz felett a részhalmazrendezéssel és a

$$\Gamma \Vdash_h A \qquad \Leftrightarrow \qquad \cap h(\Gamma) \leq h(A)$$

relációval pre-Kripke szemantika.

Ugyanis, tegyük fel, hogy $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ és $\Gamma_1 \Vdash_h A$, azaz

$$\cap h(\Gamma_1) \leq h(A)$$

Ekkor $\cap h(\Gamma_2) \subseteq \cap h(\Gamma_1)$ ezért

$$\cap h(\Gamma_2) \leq \cap h(\Gamma_1) \leq h(A)$$

miatt

$$\Gamma_2 \Vdash_h A$$

2.9.2.2. Nem disztribuál. $(C_h, \leq, \Vdash_h)$-ben nem igaz a disztributív szabály, az alábbi értelemben:

$$\{A\&(B \vee C)\} \nVdash_h (A\&B) \vee (A\&C)$$

Elég belátni, hogy pl. az $L = \mathbf{R}^2$ térben valamely e, f, g alterekre nem teljesül $e \cap (f+g) \leq (e \cap f) + (e \cap g)$. És valóban legyen $e = \{y = x\}$, $f = \{x = 0\}$, $g = \{y = 0\}$. Ekkor

$$e = e\&(f+g) \nsubseteq (e\&f) + (e\&g) = \mathcal{O}$$

2.9.3. Topologikus tér pre-Kripke szemantikája

Tekintsünk egy T topologikus teret az X halmaz felett! Ez azt jelenti, hogy $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ olyan halmazrendszer, melyre teljesül, hogy

1. minden $U_1, U_2 \in T$-re $U_1 \cap U_2 \in T$
2. akárhány $U_i \in T$-re (ha $i \in I$ és I tetszőleges), akkor $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$
3. $\varnothing, X \in T$

Ilyenkor T elemeit X *nyílt halmazainak* is szoktuk nevezni.

Legyen továbbá $f : \mathrm{Fm} \to T$ olyan leképezés, hogy minden $A, B \in \mathrm{Fm}$-re

1. $f(\sim A) = \mathrm{ext}(f(A))$
2. $f(A\&B) = f(A) \cap f(B)$
3. $f(A \vee B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f(A \supset B) = \mathrm{ext}(f(A)) \cup f(B)$

ahol $\mathrm{ext}(U)$ az U külseje, azaz a legbővebb nyílt halmaz, ami diszjunkt U-hoz.

A következő példáknál bőven elég a jól ismert $\mathbf{R}$ és $\mathbf{R}^2$ terekre gondolnunk.

2.9.3.1. Tény. Ekkor $(C_f, \leq, \Vdash_f)$ az alábbi

$$C = \{\Gamma \mid \Gamma \subseteq \mathrm{Fm} \text{ és } \Gamma \text{ véges } \}$$

halmaz felett a részhalmazrendezéssel és a

$$\Gamma \Vdash_f A \qquad \Leftrightarrow \qquad \cap f(\Gamma) \subseteq f(A)$$

relációval pre-Kripke szemantika.

Ugyanis, tegyük fel, hogy $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ és $\Gamma_1 \Vdash_f A$, azaz

$$\cap f(\Gamma_1) \leq f(A)$$

Ekkor $\cap f(\Gamma_2) \subseteq \cap f(\Gamma_1)$ ezért

$$\cap f(\Gamma_2) \subseteq \cap f(\Gamma_1) \subseteq h(A)$$

miatt

$$\Gamma_2 \Vdash_f A$$

2.9.3.2. Nem törli a kettős tagadást. $(C_h, \leq, \Vdash_h)$-ben nem igaz a kettős tagadás törlése, az egyik de Morgan-szabály, a kondicionális szokásos tagadása, az alábbi értelemben:

$$\begin{aligned} \{\sim\sim A\} &\nVdash_f A \\ \{\sim (A\&B)\} &\nVdash_f (\sim A) \vee (\sim B) \\ \{\sim (A \supset B)\} &\nVdash_f A \,\&\, \sim B \end{aligned}$$

Ugyanis, legyen $X = \mathbf{R}$ és a topológia a szokásos nyílt halmazok $\mathbf{R}$-ben. (Ezek azok az $U \subseteq \mathbf{R}$ halmazok, melyek minden egyes $u \in U$ pontjának van olyan $(u-\delta, u+\delta)$ környezete $(\delta > 0)$, hogy $(u-\delta, u+\delta) \subseteq U$.) Belátjuk, hogy van olyan U nyílt halmaz, hogy $\mathrm{extext}U \subseteq U$ nem teljesül. Legyen $U = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $= \mathrm{ext}(\mathrm{ext}(U)) = \mathrm{ext}(\varnothing) = \mathbf{R}$. És ekkor nem igaz

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Továbbá, legyen $U = (-\infty, 0)$, $V = (0, +\infty)$. Belátjuk, hogy ekkor $\mathrm{ext}(U \cap B) \subseteq \mathrm{ext}U \cup \mathrm{ext}V$ Ekkor $\mathrm{ext}(U \cap V) = \mathrm{ext}(\varnothing) = \mathbf{R}$ és $\mathrm{ext}U \cup \mathrm{ext}V = (0, +\infty) \cup (-\infty, 0) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, azaz nem teljesül

$$\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \setminus \{0\}$$

Végül, hasonlóképpen legyen $U = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $V = \varnothing$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy a harmadik állításnak megfelelő kívánt tartalmazás nem teljesül.

2.10. Bővítés, definiálhatóság, függetlenség, konzervatív bővítés

Amikor PC^--t beágyazzuk PC^+-ba levezetésmegőrző módon akkor a bővítés fogalmára bukkantunk rá.

2.10.1. Definíció

Az $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle$ levezetési rendszernek *bővítése* $\langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$, ha 1) az Fm_1 formulahalmaz része Fm_2-nek, 2) $\mathrm{Ax}_1 \subseteq \mathrm{Ax}_2$ 3) $\mathrm{In}_1 \subseteq \mathrm{In}_2$, akkor bővítésről beszélünk és $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle \subseteq \langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$-t írunk. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy $\langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$ töredéke $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle$-nek.

Ha a töredéket úgy definiáljuk, hogy az $\mathfrak{Fm}_2 = \langle X \mid \mathsf{t} \rangle$ formulaalgebra t funktorai közül elfelejtük néhányat és a szűkebb s funktorrendszerre térünk át, akkor ezt az új $\langle X \mid \mathsf{s} \rangle$ formulaalgebrát (az X fölött) $\mathfrak{Fm}_2 \restriction \mathsf{s}$-fel jelöljük. Ha most Ax_2 és In_2 közül is elfelejtjük azokat az axiómasémákat és levezetési szabályokat, melyekben s-en kívüli elemek is szerepelnek, akkor kapjuk a $\langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle \restriction \mathsf{s}$ töredék levezetési rendszert.

Ekkor triviálisan minden $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}_1$ esetén, ha $\Gamma \vdash_1 A$, akkor $\Gamma \vdash_2 A$. Ez azt jelenti, hogy a bővítés *levezetésmegőrző.*

2.10.2. Definíció

Ha a $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$ levezetési rendszer nyelvében szerepel a $\supset$ kétváltozós mondatfunktor és a $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle \restriction \supset$ töredék olyan, hogy

1. ha $\Gamma \vdash\restriction_\supset A$ és $\Gamma \vdash\restriction_\supset A \supset B$ esetén $\Gamma \vdash\restriction_\supset B$ (minden $\Gamma \cup \{A, B\} \subseteq \mathrm{Fm} \restriction\supset$-re) [modusz ponensz]

2. ha $\Gamma \cup \{A\} \vdash\restriction_\supset B$, akkor $\Gamma \vdash\restriction_\supset A \supset B$ (minden $\Gamma \cup \{A, B\} \subseteq \mathrm{Fm} \restriction\supset$-re) [dedukciótétel]

akkor azt mondjuk, hogy $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle \restriction\supset$ az $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$ *implikációs töredéke,* illetve, hogy $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$ -nek van implikációs töredéke.

2.10.3. Definíció

Ha az implikációs töredékkel rendelkező $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$ levezetési rendszer olyan, hogy $\mathrm{Fm}' \subseteq \mathrm{Fm}$ és γ egy n változós funktor Fm-ben, akkor azt mondjuk, hogy γ *definiálható* $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$*-ben az* Fm' *töredéken keresztül,* ha minden $A_1, \dots A_n \in \mathrm{Fm}'$ esetén létezik $B \in \mathrm{Fm}'$, hogy

1. $\vdash \gamma(A_1, \dots A_n) \supset B$ és

2. $\vdash B \supset \gamma(A_1, \dots A_n)$.

Ennek megfelelően világos, hogy PC^+ reprezentálhatósága PC^--ban maga után vonja, hogy & és $\vee$ definiálható PC^+-nak az &-t és $\vee$-ot nem tartalmazó töredékén keresztül.

Látható, hogy ez a konstrukcióból adódik, tehát PC^+ pont úgy lett definiálva, hogy benne & és $\vee$ reprezentálható legyen PC^--on keresztül. Erre is van egy tulajdonság.

2.10.4. Definíció

Legyen $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle$ olyan levezetési rendszer, amelynek van implikacionális töredéke és legyen $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle \subseteq \langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$. Ekkor $\langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$ *definícionális bővítése* $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle$*-nek,* ha minden funktor definiálható Fm_1-en keresztül.

2.10.5. Definíció

Legyen $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$ olyan levezetési rendszer, amelynek van implikacionális töredéke. A γ mondatfunktor *független,* ha nem definiálható $\langle \mathfrak{Fm}, \mathrm{Ax}, \mathrm{In} \rangle$-ból a γ-t nem tartalmazó töredéken keresztül.

A függetlenségből következik az ellentmondásmentesség, amit még nem veséztünk ki, ezért inkább későbbre halasztjuk ezt a vizsgálódást.

A bővítés a bizonyításelméleti szemantika számára elégtelen fogalom, mert ugyan a régi rendszerben érvényes mondatok levezethetőségét biztosítja, de a funktorok *jelentésének megőrzését* nem feltétlenül. Egy antirealista jelentéselméletben egy funktor jelentésének egészen biztosan része az, hogy milyen érvényes következtetésekben szerepel. Ha megváltozik az érvényes következtetések azon köre, melyek tartalmazzák a funktort, akkor a jelentése is meváltozik a bővítéskor. Persze, bővítéskor mindenképpen változik a rendszer egészének jelentéselmélete, a kérdés inkább az, hogy ez a jelentésváltozás harmonizál-e a korábbi jelentéselmélettel.

2.10.6. Definíció

A $\langle \mathfrak{Fm}_1, \mathrm{Ax}_1, \mathrm{In}_1 \rangle \subseteq \langle \mathfrak{Fm}_2, \mathrm{Ax}_2, \mathrm{In}_2 \rangle$ bővítés *konzervítív*, ha minden $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}_1$-re, $\Gamma \vdash_2 A$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \vdash_1 A$ is teljesül.

A definícionális bővítések konzervatívok, ez kis számolgatással igazolható. Nyilván PC^+-ban & és $\vee$ pont azért nem független (a korábban a középiskolában tanult módon értve a nem függetlenséget, kifejezhetőséget) mert definiálhatóak.

A reprezentációs tételből szintén következik (HF), hogy PC^+ nem tud olyan következtetést mondani, amit PC^--ban a megfelelő fordításban érvényesnek ne gondolnánk. Tehát a bővítés harmonikus. A PC^--ról PC^+-ra történő áttérés jelentésmegőrző módon zajlott. Látunk majd példát jelentésváltoztató, de levezetésmegőrző, azaz nem konzervatív bővítésre is.

2.11. Mindenféle logikák

2.11.1. Nem harmonikus bővítés, kvantumlogika

A pozitív logika kapcsán rögtön tudunk mondani egy érdekes nem harmonikus bővítést. Tekintsük az

$$\mathfrak{Fm} = \langle \mathrm{At} \mid \langle \&, +, \to \rangle \rangle$$

generált formulaalgebrát és benne a következő szigorúbb szabályokat: &I, &E a szokásos, +I legyen a ∨I-vel azonos, de +E legyen a szigorúbb, közvetett hipotéziseket meg nem engedő szabály, továbbá a kondicionális is legyen butább (tulajdonképpen a kondicionálisra a példához nem lesz majd szükségünk). Tehát

$$+\mathrm{I}\quad \frac{A}{A+B}\qquad \frac{B}{A+B}\qquad\qquad +\mathrm{E}\quad \frac{A+B\quad \frac{A}{C}\quad \frac{B}{C}}{C}$$

$$\to\mathrm{I}\quad \frac{\frac{A}{B}}{A\to B}\qquad\qquad \to\mathrm{E}\quad \frac{A\qquad A\to B}{B}$$

Megjegyezzük, hogy +E pontosításra szorul, hiszen ez egy bizonyítási eljárás, éspedig

$$+\mathrm{E}\ \frac{\langle\Gamma, A+B\rangle, \langle\{A\}, C\rangle, \langle\{B\}, C\rangle}{\langle\Gamma, C\rangle}$$

továbbá

$$\to I\frac{\langle\{A\}, B\rangle}{\langle\emptyset, A\to B\rangle}$$

Legyen ez a rendszer a QL_p logika (**a kvantumlogika pozitív része**). Most, ha a rendszert a ∨ funktorral és a szokásos szabályokkal bővítjük ($\mathrm{QL}_p^{\vee}$), akkor a bővítés nem lesz konzervatív, mert a disztributív szabály a bővítésben a +-ra is igaz lesz, miközben a szűkebben nem igaz.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{A\&(B+C)}{(B+C)}\qquad \dfrac{B^{\triangleright}}{{}^{\triangleright}B\vee C}\qquad \dfrac{C^{\triangleright}}{{}^{\triangleright}B\vee C}}{(B\vee C)}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B+C)}{A}\qquad B^{\triangleleft}}{A\&B}}{{}^{\triangleleft}(A\&B)+(A\&C)}\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B+C)}{A}\qquad C^{\triangleleft}}{A\&C}}{{}^{\triangleleft}(A\&B)+(A\&C)}}{(A\&B)+(A\&C)}$$

Most belátjuk, hogy QL_p-ben eredetileg nem levezethető a disztributív szabály, feltéve hogy a halmazelmélet ellentmondásmentes. Ehhez azt kell értenünk, hogy tetszőleges L lineáris térben, $h : \mathrm{Fm}^+ \to L$ leképezéssel, ha $(C, \leq, \Vdash_h)$ az L tér egy pre-Kripke-szemantikája, akkor teljesül, hogy

$$\Gamma \vdash A \qquad \Rightarrow \qquad \Gamma \vdash_h A$$

azaz szemantikailag érvénytelen következtetést nem lehet levezetni. Ehhez elég elátni, hogy a levezethetőség szabályai megőrzik az érvényes szemantikai következményeket. Ezt mind nem fogjuk belátni, csak példaképpen a +-ra:
Először legyen tetszőleges L lineáris térben $D_1, \dots, D_n \leq L$ és $A, B \leq L$ (azaz alterek). A + bevezetési szabályához azt kell belátnunk, hogy

$$D_1 \cap \dots \cap D_n \leq A \qquad \Rightarrow \qquad D_1 \cap \dots \cap D_n \leq A + B$$

ami triviálisan igaz.
A $+$ kiküszöbölési szabályához azt kell belátnunk, hogy tetszőleges $C \leq L$-re

$$D_1 \cap \cdots \cap D_n \leq A + B \text{ és } A \leq C \text{ és } B \leq C \qquad \Rightarrow \qquad D_1 \cap \cdots \cap D_n \leq C$$

Mivel C zárt a vektorösszeadásra, ezért az A és B-beliek összege is C-beli, azaz $A + B \leq C$, amiből adódik, hogy minden altere is C-beli.
Világo, hogy ekkor szemantikailag érvénytelen állítás nem vezethető le QL^p-ben, márpedig azt tudjuk, hogy $+$ *nem disztribuál* a $\cdot$-ra nézve a lineáris pre-Kripke szemantikában.

Ez utóbbi nem teljesül az erősebb (okosabb) $\vee$-ra. Ekkor $\vee$E megőrzéséből következne pl.

$$D \leq A + B \text{ és } A \cap E \leq C \text{ és } B \cap E \leq C \qquad \Rightarrow \qquad D \cap E \leq C$$

de ha e, f, g három páronként nem párhuzamos origón áthaladó egyenes, akkor $e = D = E$, $A = f$, $B = g$ és $C = \{0\}$ esetén a feltételek teljesülnek, de $e \leq \{0\}$ természetesen nem.

2.11.1.1. Megjegyzés. 1) A későbbi negációra vonatkozó klasszikus szabályok a kvantumlogikában érvényesek lesznek. A merőleges kiegészítőre ugyanis $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$ teljesül.

2) Ez a példa azért érdekes, mert annak ellenére kaptunk jelentésváltoztató (nem konzervatív) bővítést, hogy a bővítéskor a korábbi funktorokra vonatkozó szabályokat nem változtattuk és nem vezettünk be rájuk új szabályokat. Azzal piszkáltunk bele a rendszerbe, hogy beletettünk egy az addigi egyik funtor bevezetési szabályával teljesen megegyező másik funktort.

2.11.2. Minimális vagy derivatív logika

Az alábbi három logika a pozitív logika bővítései. A $\sim$ funktorra vonatkozó szabályok lesznek bennük egyre több következtetésre feljogosítók.

Az M logikában $\sim$-re a

$$\sim\mathrm{I}\,\frac{\begin{matrix} A^{\triangleright} & A^{\triangleright} \\ \vdots & \vdots \\ {}^{\triangleright}\sim B & {}^{\triangleright}B \end{matrix}}{\sim A}$$

redukció ad abszurdum szabályt teszik föl, ez csak bevezetési szabály. M-ben csak negatív kijelentésre lehet indirekt módon következtetni. A pontosabb definíció a következő:

$$\frac{\langle \Gamma_1, \sim B\rangle, \langle \Gamma_2, B\rangle}{\langle (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \{A\}, \sim A\rangle}$$

2.11.3. Intuicionista logika

Az I logikában $\sim$-re a

$$\sim \mathrm{I}\,\dfrac{\begin{matrix} A^{\triangleright} & A^{\triangleright} \\ \vdots & \vdots \\ {}^{\triangleright}\sim B & {}^{\triangleright}B \end{matrix}}{\sim A}, \qquad \sim \mathrm{E}_I\,\dfrac{\sim A \quad A}{B}$$

szabályokat teszik föl, azaz a redukció ad abszurdumot és az ex falso quodlibetet. I-ben is igaz az, hogy csak negatív kijelentésre lehet indirekt módon következtetni. $\sim$E-ről azt szokták mondani, hogy olyan, mint a pokol kapujának a kulcsa. Lehet, hogy a kezünkben van, de vajon ki szeretné használni?

2.11.3.1. Kolmogorov-féle feladatinterpretáció.

$A\&B$: „mutatni egy megoldását mind az A, mind a B feladatnak”
$A \vee B$: „mutatni egy megoldását az A és B feladat közül az egyiknek”
$A \supset B$: „az A feladat megoldására visszavezetni a B-t”
$\sim A$: „A hipotetikus megoldásából ellentmondást levezetni”

2.11.3.2. Néhány érvényes kijelentés I-ben.

1. $A \supset \sim\sim A$
2. $(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)$
3. $(A \supset B) \supset \sim (A \& \sim B)$
4. $(\sim A \vee \sim B) \supset \sim (A \& B)$

Bizonyításuk:

$$\dfrac{\dfrac{\sim A^{\triangleleft} \qquad A^{\triangleright}}{{}^{\triangleleft\triangleright}\sim\sim A}}{A \supset \sim\sim A} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \supset B^{\triangleleft} \qquad A^{\blacktriangleright}}{{}^{\blacktriangleright}B} \qquad\qquad \sim B^{\triangleright}}{{}^{\triangleright}\sim A}}{{}^{\triangleleft}\sim B \supset \sim A}}{(A \supset B) \supset (\sim B \supset \sim A)}$$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{|l} (A \supset B) \\ \begin{array}{|l} A\& \sim B \\ \begin{array}{|l} A \\ \sim B \\ B \end{array} \\ \sim (A\& \sim B) \end{array} \end{array} \\ \hline (A \supset B) \supset \sim (A\& \sim B) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \begin{array}{|l} (\sim A \vee \sim B) \\ \begin{array}{|l} \sim A \\ \begin{array}{|l} A\&B \\ A \\ \sim A \end{array} \\ \sim (A\&B) \\ \sim B \\ \begin{array}{|l} A\&B \\ B \\ \sim B \end{array} \\ \sim (A\&B) \end{array} \\ \sim (A\&B) \end{array} \\ \hline (\sim A \vee \sim B) \supset \sim (A\&B) \end{array}$$

2.11.3.3. I-ben nem bizonyíthatók. Mármint relatíve nem bizonyíthatók.

$$\sim (A\&B) \supset (\sim A \vee \sim B)$$

$$\sim (A\& \sim B) \supset (A \supset B)$$

Lásd topologikus interpretáció.

2.11.4. Klasszikus logika.

Az C logikában $\sim$-re a

$$\sim \mathrm{I}\,\frac{\begin{array}{cc} A^{\triangleright} & A^{\triangleright} \\ \vdots & \vdots \\ {}^{\triangleright}\sim B & {}^{\triangleright}B \end{array}}{\sim A}, \qquad \sim \mathrm{E}_C\,\frac{\sim\sim A}{A}$$

szabályokat teszik föl, azaz a redukció ad abszurdumot és a kettős tagadás törlésének szabályát. C-ben már korlátozatlanul érvényes az indirekt bizonyítás elve:

$$\frac{\begin{array}{cc} \sim A^{\triangleright} & \sim A^{\triangleright} \\ \vdots & \vdots \\ {}^{\triangleright}\sim B & {}^{\triangleright}B \end{array}}{A}$$

Ez a két fenti szabályból nyilvánvalóan következik.

2.11.4.1. Tétel – C és PC ekvivalensek – Ha $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$, akkor

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}} A \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{C}} A.$$

Bizonyítás. Legyen $\Gamma \cup \{A, B, C\} \subseteq \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$. 1) Ez I-ben is igaz lesz.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|l} A \\ \quad \begin{array}{|l} B \\ A \end{array} \\ B \supset A \end{array} \\ \hline A \supset (B \supset A) \end{array}$$

2) HF, I-ben is kijön

$$(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$$

3) A $\sim$-re vonatkozó axióma egy feltételes verzióját igazoljuk, I-ben, amiből azonnal kijön PC 3. axiómája. Azt látjuk be ugyanis, hogy $(\sim\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset\sim B) \supset (B \supset A))$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|l} \sim\sim A \supset A \\ \quad \begin{array}{|l} (\sim A \supset\sim B) \\ \quad \begin{array}{|l} B \\ \quad \begin{array}{|l} \sim A \\ \sim B \end{array} \\ \sim\sim A \\ A \end{array} \\ B \supset A \end{array} \\ (\sim A \supset\sim B) \supset (B \supset A) \end{array} \\ \hline (\sim\sim A \supset A) \supset ((\sim A \supset\sim B) \supset (B \supset A)) \end{array}$$

Fordítva, PC-ben C összes következtetési szabálya érvényes. Ezt HF igazolni, csak levezetgetéseket kell gyártani.

2.11.4.2. Tétel – C nem konzervatív bővítése I-nek – C nem konzervatív bővítése I-nek, feltéve, hogy a halmazelmélet ellentmondásmentes.

Bizonyítás. Csak annyit kell belátni, hogy van olyan következtetés, ami I-ben nem érvényes, C-ben igen. Erre kettőt mutatunk. 1) $\vdash_C \sim\sim A \supset A$ és 2) $\vdash_C (\sim A) \vee A$. 1) Dedukciótétellel következik C-ben, 2) pedig a következő levezetéssel igazolható. Először belátjuk, hogy $\vdash_I \sim\sim ((\sim A) \vee A)$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|l} \sim ((\sim A) \vee A) \\ \quad \begin{array}{|l} A \\ (\sim A) \vee A \end{array} \\ \sim A \\ (\sim A) \vee A \end{array} \\ \hline \sim\sim ((\sim A) \vee A) \\ \hline (\sim A) \vee A \end{array}$$

vagy

$$\dfrac{{}^{\triangleright}\sim ((\sim A) \vee A)^{\triangleright} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A^{\triangleleft}}{{}^{\triangleleft}(\sim A) \vee A} \qquad \sim ((\sim A) \vee A)^{\triangleright}}{\sim A}}{{}^{\triangleright}(\sim A) \vee A}}{\sim\sim ((\sim A) \vee A)}$$

A topologikus pre-Kripke semantika szerint, $f(A) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ esetén $f(\sim\sim A) = \mathbf{R}$ és $\mathbf{R} \not\subseteq A$. De hasonlóképpen $f((\sim A) \vee A) = \mathbf{R} \setminus \{0\} \neq \mathbf{R}$.

Megjegyzés. Ez nem annyira meglepő, hiszen a intuicionista $\sim$ funktor kiküszöbölési szabályát módosítottuk, egy kicsit erősebbre cseréltük.

2.11.5. Beágyazási és reprezentációs tételek I és C között

2.11.5.1. Tétel – I és M beágyazása C-be – Legyen $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$. Ekkor

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{I}} A \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash_{\mathrm{C}} A.$$

2.11.5.2. Bizonyítás. Csak azt kell belátni, hogy C-ben igazolható $\sim E_{\mathrm{I}}$. Mivel a PC-ben a hamisból minden következik érvényes, ezért C-ben is. Tehát minden bizonyítás I-ben és M-ben bizonyítás lesz C-ben is.

2.11.5.3. Definíció – *negatív formula* – Azt mondjuk, hogy az $N \in \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$ *negatív,* ha minden olyan esetben, amikor N-ben szerepel egy A atomi formula, akkor A előtt a $\sim$ jel is szerepel (azaz csak $\sim A$ szerepel benne) és N-ben nem szerepel $\vee$.

2.11.5.4. A kettős tagadás. A kettős tagadás sem a minimális, sem az intuicionista logikában nem teljesül. Ennek ellenére redukció ad abszurdummal igazolható a negatív formulákra. Erről beszél az alábbi lemma.

2.11.5.5. Lemma – *negatív kifejezések kettős tagadása M-ben* – Minden N negatív formulára $\vdash_{\mathrm{M}} N \equiv \sim\sim N$.

2.11.5.6. Bizonyítás. Először is egy csomó összefüggést kell igazolni a minimális logikában. Ezek mindegyike fennáll:

$$(1)\ A \supset \sim\sim A, \quad (2)\ \sim\sim\sim A \supset \sim A$$

(1)-et igazoltuk, (2) pedig kontrapozícióval jön ki (1)-ből:

$$\begin{array}{l} \vdash_I A \supset \sim\sim A \\ \vdash_I (A \supset \sim\sim A) \supset (\sim\sim\sim A \supset \sim A) \\ \vdash_I \sim\sim\sim A \supset \sim A \end{array}$$

Továbbá:

$$(3)\ \sim\sim (A \& B) \supset (\sim\sim A \& \sim\sim B)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\sim A^{\triangleright}}{\begin{array}{c}[\sim A \vee \sim B] \\ \Sigma\end{array}}}{{}^{\triangleright}\sim (A \& B)} \quad \sim\sim (A \& B)}{\sim\sim A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\sim B^{\triangleright}}{\begin{array}{c}[\sim A \vee \sim B] \\ \Sigma\end{array}}}{{}^{\triangleright}\sim (A \& B)} \quad \sim\sim (A \& B)}{\sim\sim B}}{\sim\sim A \& \sim\sim B}$$

Ahol Σ a $\sim A \vee \sim B \vdash_I \sim (A \& B)$ levezetásfája.

$$(4)\ \sim\sim (A \supset B) \supset (\sim\sim A \supset \sim\sim B), \quad (5)\ (\sim\sim A \supset \sim\sim B) \supset (A \supset \sim\sim B)$$

ez házi feladat.
Világos, hogy az (1) összefüggés miatt elég csak a $\sim\sim N \supset N$-t belátni. Az N negatív formula felépítésre vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy teljesül az állítás. Legyen $N = \sim P$ atomi tagadás. Erre az első összefüggés miatt teljesül az állítás. Legyen rendre $N = \sim B$, $N = B\&C$, $N = B \supset C$. Az első eset az első összefüggés miatt kész a $\sim P$-hez hasonlóan. A második esetben rétegezett levezetéssel:

$$\begin{array}{l} \quad \sim\sim (B\&C) \\ \quad \sim\sim B \& \sim\sim C \\ \quad \sim\sim B \\ \quad \sim\sim C \\ B \\ C \\ B\&C \end{array}$$

$\supset$-nél hasonlóképpen kell eljárni, ez HF.

2.11.5.7. Definíció – *Gödel–Gentzen-fordítás* – Gödel–Gentzen-fordításnak nevezzük a következő formula-homomorfizmust:

$$\begin{aligned} &g(P) = \sim\sim P \qquad (P \text{ atomi}) \\ &g(A\&B) = g(A)\&g(B) \\ &g(A \supset B) = g(A) \supset g(B) \\ &g(A \vee B) = \sim(\sim g(A)\& \sim g(B)) \end{aligned}$$

2.11.5.8. Tétel – *C reprezentációja I-ben és M-ben* – Legyen $\Gamma \cup \{A\} \subseteq \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$. Ekkor

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{C}} A \quad \Leftrightarrow \quad g(\Gamma) \vdash_{\mathrm{I,M}} g(A).$$

Bizonyítás. Indukcióval kell bizonyítani, hogy a Gödel–Gentzen-fordítás megőrzi a levezetési szabályokat, így a levezetéseket is. HF.

2.11.5.9. Következmény – *C reprezentációja I-ben (másik)* – Legyen $A \in \mathrm{Fm}^{+}_{PL}$ negatív formula. Ekkor

$$\vdash_{\mathrm{C}} A \quad \Leftrightarrow \quad \vdash_{\mathrm{I,M}} A.$$

Ez a tétel lényegében azt mondja, hogy ha a klasszikus logika megtalálható az intuicionista logikában, a Gödel–Gentzen-fordítás képének részeként. Úgy is fogalmazhatunk, hogy *az I és M logika negatív töredékét C negatív töredékéve kibővítve konzervatív (jelentésmegőrző) bővítést kapunk.*

Bizonyítás. A Gödel–Gentzen-fordítás invariánsan hagyja a negatív formulákat.

2.11.5.10. Definíció – *Kolmogorov-fordítás* – Kolmogorov-fordításnak nevezzük a következő formula-homomorfizmust:

$$k(P) = \sim\sim P \qquad (P \text{ atomi})$$
$$k(A\&B) = \sim\sim (k(A)\&k(B))$$
$$k(A \vee B) = \sim\sim (k(A) \vee k(B))$$
$$k(A \supset B) = \sim\sim (k(A) \supset k(B))$$

Megjegyzés. $\vdash_{\mathrm{M,I}} g(A) \equiv k(A)$ minden A formulára.

2.12. Kripke-szemantika

A topologikus terek Heyting-algebrává alakíthatók és a Heyting-algebrák pedig az intuicionista logika algebrai szemantikáit szolgáltatják. Az előző szakaszban a kettős tagadás elvét sértő szemantika tehát gyanúsan intuicionista logikát mutat.

2.12.0.1. Definíció Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{C} = (C, \leq, \Vdash)$ az Fm formulahalmaz fölött (mely az Fm^+ nyelv töredéke) *Kripke-szemantika,* ha $\leq$ részben rendezés C fölött és $c \Vdash A$ olyan reláció, melynek első argumentuma $c \in C$, a második argumentuma $A \in \mathrm{At}$ (atomi formula) és minden $c_1, c_2 \in C$ és $A \in \mathrm{At}$-ra:

$$c_1 \leq c_2 \text{ és } c_1 \Vdash A, \text{ akkor } c_2 \Vdash A$$

Kripke-szemantikában a formulák igazsága a c állapotban származtatható a kompozicionalitási elvből. $c \Vdash A$-t tetszőleges $A \in \mathrm{Fm}$-re a következők definiálják:

1. $c \Vdash \sim A$, ha minden $c' \geq c$-re $c' \nVdash A$
2. $c \Vdash A\&B$, ha $c \Vdash A$ és $c \Vdash B$
3. $c \Vdash A \vee B$, ha $c \Vdash A$ vagy $c \Vdash B$
4. $c \Vdash A \supset B$, ha minden olyan esetben, amikor $c' \geq c$ és $c' \Vdash A$, akkor $c' \Vdash B$

Érdemes a tagadást és a kondicionálist ismeretreprezentációs interpretációban végiggondolni. Pl. $c \Vdash \sim A$ nem azt jelenti, hogy a c állapotban nem tudjuk A-t, hanem azt, hogy tudjuk, hogy $\sim A$. És egy későbbi c' időpontban nem fogjuk tudni A-t.

Ebben a szemantikában érdemes bevezetni a szemantikai igazság fogalmát:

$$\mathcal{C} \Vdash A \overset{\text{def.}}{\iff} \text{minden } c \in \mathrm{C}\text{-re } c \Vdash A$$

és a szemantikai következmény fogalmát:

$$\Gamma \Vdash A \overset{\text{def.}}{\iff} \text{minden } \mathcal{C}\text{-re és minden } B \in \Gamma\text{-ra, ha } \mathcal{C} \Vdash B, \text{ akkor } \mathcal{C} \Vdash A$$

Házi feladat: igazoljuk, hogy minden Kripke-szemantika egyben pre-Kripke-szemantika is, de fordítva ez már nem igaz. (Útmutatás: az első állítás indukcióval kell igazolni, a másodikhoz a lineáris tér pre-Kripke szemantikájának disztributív szabályt sértő tulajdonságát kell felhasználni.)

2.13. A bevezetési és kiküszöbölési szabályok harmóniája és egyensúlya

A bizonyításelméleti jelentéselméletben a funktorok jelentését a bevezetési és kiküszöbölési szabályok adják. A kiküszöbölési szabályok azt mondják meg, hogy mire lehet következtetni egy adott funktorral, mint fő funktorral felírt mondatból, azaz mik a következményei. Ez a *pragmatista* jelentésrész. A bevezetési szabályok azt mondják meg, hogy mik egy adott funktorral, mint fő funktorral felírt mondat állításának feltételei. Milyen feltételeknek kell érvényesülniük, hogy állíthassuk a mondatot. Ez a *verifikacionista* jelentésrész. Az alábbiakban megnézzük, hogy a bizonyításelméleti jelentéselméletben mindkét jelentésrészre szükség van-e vagy ezek valamelyest összefüggenek.

Mindez elvileg általánosítható, nem csak a logika nyelvének hanem más nyelvek antirealista jelentéselméletére is. Egy szó jelentése használatában rejlik (pragmatizmus), egy mondat jelentésének tartalmaznia kell azt, hogy milyen körülmények között állíthatjuk (verifikacionizmus).

2.13.0.1. Definíció – *kiküszöbölési szabályok harmóniája* – Azt mondjuk, hogy a

$$E_\Phi \frac{\dfrac{\Sigma}{A{*}B} \qquad \Pi}{C}$$

kiküszöbölési szabály *harmonikus,* ha minden olyan esetben, amikor ez C-nek olyan levezetése, amikor $A{*}B$-t bevezetési szabály előzi meg, akkor Π és Σ ligetek. elemeiből és ezek egymás után fűzéséből is megkonstruálható C egy levezetése.

2.13.0.2. Tény – *Az intuicionista logika pozitív következtetési szabályai harmonikusak* – &E

$$\frac{A\&B}{A} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad\qquad \dfrac{\Sigma_2}{B}}{A\&B}}{A} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\Sigma_1}{A}$$

$\vee$E

$$\frac{A\vee B \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{C} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]\\ \Sigma_3\end{matrix}}{C}}{C} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\dfrac{\Sigma}{A}\atop{\overline{A\vee B}} \quad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{C} \quad \dfrac{\begin{matrix}[B]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{C}}{C} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma}{[A]}\\ \Sigma_1\end{matrix}}{C}$$

$\supset$E (atomi A-val)

$$\frac{A \quad A\supset B}{B} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{B}}{A\supset B}}{B} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_1}{[A]}\\ \Sigma_2\end{matrix}}{B}$$

2.13.0.3. Megjegyzés. Összetett formulákra közvetlenül nem alkalmazható a fenti módszer, ezért ki kell terjesztenünk, ha alkalmazni akarjuk.

2.13.0.4. Definició – *másodrendű harmónia* – Azt mondjuk, hogy egy utolsó két lépésében bevezetési szabályt alkalmazó $\Pi/E/F$ fa másodrendű harmonikus, ha minden olyan esetben, amikor F-nek levezetése, akkor F-nek van olyan levezetése is, ami a Π liget elemeiből is összetehető.

2.13.0.5. Példák. Az alábbi következtetés másodrendű Gentzen-tulajdonságú, ezért az M^I redszerben érvényes, ha van az előző definícióban említett általánosított felső lezártja a premisszájának.

$$\frac{A\&(B\vee C)}{(A\&B)\vee(A\&C)} \quad\rightsquigarrow\quad \cfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad \cfrac{\dfrac{\Sigma_2}{B}}{B\vee C}}{\cfrac{A\&(B\vee C)}{(A\&B)\vee(A\&C)}} \quad\rightsquigarrow\quad \cfrac{\cfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad \dfrac{\Sigma_2}{B}}{A\&B}}{(A\&B)\vee(A\&C)}$$

2.13.0.6. Negáció. A negáció kiküszöbölési szabálya nem Gentzen tulajdonságú. Sem a klasszikus, sem az intuicionista logikában. A klasszikus logikában világos, hisz nem tartalmazza a felső lezárt a konklúzió egy bizonyítását:

$$\sim\mathrm{E_C}\;\cfrac{\cfrac{\dfrac{\begin{matrix}[\sim A]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\sim A]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\sim B}}{\sim\sim A}}{A}$$

Az intuicionistánál pedig szintén nem törlődik a kiköszöbölési szabály:

$$\sim\mathrm{E_I}\;\cfrac{\cfrac{\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_1\end{matrix}}{B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\sim B}}{\sim A} \qquad \dfrac{\Sigma_3}{A}}{C} \quad\rightsquigarrow\quad \cfrac{\dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_3}{[A]}\\ \Sigma_1\end{matrix}}{B} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\dfrac{\Sigma_3}{[A]}\\ \Sigma_2\end{matrix}}{\sim B}}{C}$$

Ellenben a bevezetési szabály eltűnt. Ez a jelenség motiválja a következtetések alsó lezártjának fogalmát.

2.13.0.7. Példák. A pozitív logika összes bevezetési szabálya harmonikus a kiküszöbölésire nézve.

2.13.0.8. Definíció – *egyensúly* – Egy funktor kiküszöbölési és bevezetési szabálya *egyensúlyban* van, ha egymásra nézve harmonikusak.

2.13.0.9. Megjegyzés. Felvetődik a kérdés, hogy lehet-e ügyesebben csinálni a negációt? A válasz igenlő. Bővítsük az intuicionista logika nyelvét a $\curlywedge$ nullaváltozós funktorral és a levezetési szabályait a rá vonatkozó alábbi szabályokkal:

$$\curlywedge\mathrm{I_I}\frac{B \quad \sim B}{\curlywedge} \qquad \curlywedge\,\mathrm{E_I}\frac{\curlywedge}{A}$$

Ez a kettő egyensúlyban van egymással a negáció bevezetési szabályán keresztül:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{B} \qquad \dfrac{\Sigma_2}{\sim B}}{\curlywedge}}{A}$$

Innen a középső $\curlywedge$ törölhető. Fordítva, A bármi lehet.

Ekkor azonban a $\sim$ és a $\curlywedge$ összekeveredik, nem $\curlywedge$ bevezetési szabály nem egycélú. Egy $\underset{\cdots}{\dot{=}}$ bevezetési szabálya a c konstansnak, ha benne a premisszák között szerepel egy c mint főfunktor, de a konklúzióban főfunktorként nem. $\underset{\cdots}{\dot{=}}$ kiküszöbölési szabálya a c konstansnak, ha a konklúziójában szerepel a c mint főfunktor, de a permisszáiban főfunktorként nem. *Egycélú* egy szabály, ha csak egy funktornak bevezetési ill. kiküszöbölési szabálya.

Jobbítási szándékkal áttérhetünk a $\langle \&, \vee, \supset, \curlywedge \rangle$ műveletekre és $\sim$-et definált jelnek tekinthetjük:

$$\sim A \overset{\text{def.}}{=} A \supset \curlywedge$$

Ekkor viszont a modus ponensből adódik $\curlywedge\mathrm{I_I}$, így egyetlen intuicionista tagadási szabály marad:

$$\curlywedge\mathrm{E_I}\frac{\curlywedge}{B}$$

A klasszikus logika esetén $\curlywedge$ „kiküszöbölési szabálya”:

$$\begin{array}{c} A \supset \curlywedge \\ \vdots \\ \curlywedge\mathrm{E_C}\dfrac{\curlywedge}{A} \end{array}$$

Ekkor ugyanoda jutottunk, a $\curlywedge$ bevezetési szabálya nem egycélú. Összekeveredik a $\supset$ szabályával és a levezetésekben kétféleképpen tud viselkedni. Tekintve tehát, hogy $\curlywedge\mathrm{I_I}$-t másképpen viselkedik mint a többi bevezetési szabály, még az intuicionista logikában sem tekintik külön számon tartott bevezetési szabálynak. Az $\curlywedge\mathrm{E_I}$-t pedig – párja nem lévén – nem tekintik kiküszöbölési szabálynak.

2.13.0.10. Inverziós elv A pozitív logika kiküszöbölési szabályainak harmonikus tulajdonsága alkalmas arra, hogy a felesleges következtetéseket kimetszük a levezetésekből. A levezetés egy olyan pontját, ahol kiküszöbölési szabály követ bevezetésit *inverziónak* nevezzük. A célunk olyan bizonyítások készítése, melyben nincsenek inverziók.

Inverziós elv. Ha egy formula levezethető egy formulahalmazból, akkor olyan bizonyítása is van belőle, melyben nem követ bevezetési szabályt közvetlenül kiküszöbölési szabály.

2.14. Normalizációs tétel az implikacionális töredékre és ennek következményei

Az inverziós elv az implikacionális töredékére is igaz, azaz arra a logikára, melynek nyelvében csak a $\supset$ funktor ($\mathfrak{Fm}_{\supset}$) és levezetési rendszerében csak a rá vontkozó két szabály szerepel ($\mathfrak{Fm}_{\supset}, \vdash_{\supset}$).

2.14.1. Definíció

1. Azt mondjuk, hogy egy Π levezetés egy $A \supset B$ alakú formulaelőfordulása *inverzió* (vagy *maximum formula*, vagy *lokális maximum*), ha a következő környezetben forul elő:

$$\Pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \overline{A}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ \overline{B}\end{matrix}}{\boxed{A \supset B}}}{\begin{matrix}(B)\\ \Sigma_3\end{matrix}}$$

itt $[A]$ azt jelenti, hogy a Σ_2 levelein a premisszákon kívül az A eldobható feltétel is megjelenhet (amelyet jelen esetben az $A \supset B$ fölötti B formulaelőfordulás töröl), (B) pedig azt jelenti, hogy a Σ_3 fa egy levelén B szerepel.

2. Az $A \supset B$-nél történő $\supset$-*redukciónak* nevezzük a

$$\Pi = \dfrac{\begin{matrix}\Sigma_1\\ \overline{A}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ \overline{B}\end{matrix}}{\boxed{A \supset B}}}{\begin{matrix}(B)\\ \Sigma_3\end{matrix}} \qquad \rightsquigarrow \qquad \Pi' = \begin{matrix}\Sigma_1\\ [\,\overline{A}\,]\\ \Sigma_2\\ \hline (B)\\ \Sigma_3\end{matrix}$$

áttérést. Itt $\begin{matrix}\Sigma_1\\ [\,\overline{A}\,]\end{matrix}$ azt jelenti, hogy Σ_1 a Σ_2 olyan leveleihez csatlakozik, amelyeken A áll és annyi példányban, ahány ilyen levél van.

3. *Normálnak* nevezünk egy levezetést, ha nincs benne inverzió.

2.14.1.1. Megjegyzés. A lokális maximum elnevezés arra utal, hogy a formula fokszáma (a benne szereplő $\supset$ funktorok száma) a közvetlen környezetéhez képest (A, B, B) eggyel nagyobb.

2.14.2. Normalizációs tétel $(\mathfrak{Fm}_{\supset}, \vdash_{\supset})$-re

Tétel. Minden valamely formulahalmazból levezethető formulának van normál levezetése is az adott formulahalmazból.

A bizonyítás kulcsa, hogy a redukciós lépések úgy őrzik meg a levezethetőséget, hogy a fában lévő formulák foka nem nő. (A formula foka a benne szereplő $\supset$ funktorok száma.)

2.14.2.1. Bizonyítás. A fákban lévő inverziók maximális n fokára vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy ha a tetszőleges $([\Gamma]\Pi/A)$ levezetés esetén ez a fok n, akkor létezik $([\Gamma]\Pi'/A)$ normál levezetés is.

Legyen tehát
$$n = \max\{\deg F \mid F \text{ inverzió } ([\Gamma]\Pi/A)\text{-ben}\}$$
ahol $\deg F$ az F-ben lévő $\supset$ előfordulások száma.
Legyen $n = 0$. Ekkor nincs inverzió a fában és a levezetés normál.

Legyen n tetszőleges. Ekkor véges sok n-ed fokú inverzió van a fában. Az eljárás, mellyel ezeket felszámoljuk, a következő. Létezik olyan n-ed fokú $C \supset D$ inverzió, melyre teljesül, hogy a
$$\frac{C \qquad C \supset D}{D}$$
-beli D előforduláshoz tartozó részfában már nincs rajta kívül n-ed fokú inverzió (ellenkező esetben végtelen sok n-ed fokú inverzió lenne a fában). Ezt a $\supset$-redukciós lépéssel megszüntetjük. Ezzel az n-ed fokú inverziók száma eggyel csökkent. Az eljárás véges lépésben véget ér és kapunk egy $([\Gamma]\Pi'/A)$ levezetést új Π' fával n-ed fokú inverziók nélkül. Az indukciós feltevést használva ekkor $([\Gamma]\Pi'/A)$-ből már készíthető $([\Gamma]\Pi''/A)$ normál levezetés is.

2.14.3. Normál levezetések alakja

Lássunk néhány alapvető fogalmat, ami a bizonyításokban szerepel. A szálak a levelektől a gyökerekig haladó, közvetlenül egymás alatt lévő formulaelőfordulások sorozata. Az ágak pedig szálak olyan kezdeti szakaszai, melyek rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egymást követő elemeik egyike a másiknak részformulája. Az ágak definíciójánál azt tiltjuk le, hogy a szál egy
$$\frac{C \qquad C \supset B}{B}$$

elágazásban a C-ből a B-be haladjon tovább. Ekkor ugyanis B és C egyike sem feltétlenül részformulája a másiknak. A $\supset$ bevezetési szabályával a szálaknál nincs baj, mert

$$\frac{\begin{array}{c} A^{\triangleright} \\ \vdots \\ {}^{\triangleright}B \end{array}}{A \supset B}$$

elágazásoknál nem sérül a részformulaság.

2.14.3.1. Definíció Legyen Π az A formula levezetésfája a $(\mathfrak{Fm}_{\supset}, \vdash_{\supset})$

1. A Π fa formulaelőfordulásainak egy $A_1, \ldots, A_n$ sorozatát a Π fa egy *szálának* (thread) nevezzük, ha A_1 levél, A_n a gyökérformula és minden $i < n$-re A_{i+1} közvetlenül az A_i alatt van.

2. A Π fa formulaelőfordulásainak egy $A_1, \ldots, A_k$ sorozatát a Π fa egy *ágának* (branch) nevezzük, ha A_1 levél, minden $i < k$-ra A_{i+1} közvetlenül az A_i alatt van, és

   (a) A_k az $A_1, \ldots, A_k$-t tartalmazó szálon felülről az első olyan fomula, ami modusz ponensz mellékpremisszája, azaz ha a szálon az első olyan formulaelőfordulás, ami

   $$\frac{A_k \qquad A_k \supset B}{B}$$

   alakú következtetésnek mellékpremisszabeli eleme, ha van ilyen és

   (b) $A_k = A$, ha nincs ezen a szálon ilyen.

3. Az az ág, ami szál is az *főág.*

4. A Π fa β ágának $o(\beta)$ *rendje* a következő.

   (a) $o(\beta) = 0$, ha β főág, és

   (b) $o(\beta) = n + 1$, ha a $\beta = (A_1, \ldots, A_k)$ ágban az A_k formulaelőfordulás a

   $$\frac{A_k \qquad A_k \supset B}{B}$$

   következtetésnek eleme, ahol B egy $n + 1$ rendű ágban van.

2.14.3.2. Példa

$$A \supset (B \supset C) \vdash (A \supset B) \supset (A \supset C)$$

Levezetésfája:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{}^{\triangleright}A \qquad A \supset B^{\triangleleft}}{B} \qquad \dfrac{{}^{\triangleright}A \qquad A \supset (B \supset C)}{B \supset C}}{{}^{\triangleright}C}}{{}^{\triangleleft}A \supset C}}{(A \supset B) \supset (A \supset C)}$$

Ágai:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\beta_4}{A}\qquad \overset{\beta_3}{A\supset B}}{B}\qquad \dfrac{\overset{\beta_2}{A}\qquad \overset{\beta_1}{A\supset(B\supset C)}}{B\supset C}}{C}}{A\supset C}}{(A\supset B)\supset(A\supset C)}$$

Az ágak rendje: $o(\beta_1)=0$, $o(\beta_2)=1$, $o(\beta_3)=1$, $o(\beta_4)=2$

2.14.3.3. Ágtétel. Normál levezetésben minden $\beta=(A_1,\dots,A_k)$ ág esetén létezik olyan β^M tagja β-nak, mely a következőképpen tagolja őt ketté: $\beta=\beta^E{}^\frown\beta^M{}^\frown\beta^I$, ahol

1. β^E esetleg üres és minden eleme $E_\supset$ főpremisszája és a következő formulát részformulaként tartalmazza,
2. β^M egyelemű és ha nem az utolsó elem β-ban, akkor egy $I_\supset$ szabály premisszája és
3. β^I esetleg üres és minden eleme egy $I_\supset$ szabály premisszája, ha nem az utolsó elem és részformulája a következő elemnek, ha van ilyen.

Ilyenkor az β^M elemet *minimum elemnek* vagy *lokális minimumnak* nevezzük.

2.14.3.4. Megjegyzés. Ezek szerint az általános eseten kívül három speciális eset van:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\beta^M\qquad \dfrac{\Sigma_1}{\beta^M\supset B}}{(B)}\\ \Sigma_2\\[1em] \beta^E=\beta^I=\emptyset\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\beta^M}{B_1\supset\beta^M}}{B_2\supset(B_1\supset\beta^M)}}{\vdots}}{(B_n\supset(\dots(B_1\supset\beta^M)\dots))}\\ \Sigma_2\\[1em] \beta^E=\emptyset\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\beta^M\supset B}\qquad \dfrac{\Sigma_1\qquad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_n\qquad B_n\supset(\dots(B_1\supset\beta^M)\dots)}{\vdots}\end{array}}{B_1\supset\beta^M}}{\beta^M}}{B}$$

$$\beta^I=\emptyset$$

2.14.3.5. Bizonyítás. Legyen β ág egy normál bizonyításban.
Ha β egyelemű, akkor vagy a gyökérformula és akkor nem premissza, vagy $E_\supset$ mellékpremisszája és akkor se nem $E_\supset$ se nem $I_\supset$ főpremisszája, de triviálisan teljesíti a 2. feltételt, azaz ilyenkor $\beta^M = \beta$.
Legyen β nem egyelemű:

$$R\frac{\beta_i}{\beta_{i+1}}$$

1) Ha $I_\supset$ van β-ban alkalmazva, akkor legyen β^M ezek közül az első premisszája.

a) Ha vannak β^M felett elemei β-nak, akkor ezek nem lehetnek $I_\supset$ premisszái, mert β^M az első ilyen. De akkor ezek csak $E_\supset$ premisszái lehetnek, ám, mivel itt ágról van szó, ezért ezek nem lehetnek mellékpremisszák, tehát csak $E_\supset$ főpremisszái lehetnek mind. És így felfelé haladva a felsőnek részformulája az alsó.

b) β^M alatt közvetlenül nem lehet $E_\supset$ premisszája, mert a levezetés normál. Ugyanígy az ezalatti sem lehet $E_\supset$ premisszája és így tovább, csak $I_\supset$-é. És így lefelé haladva a felső részformulája az alsónak.

2) Ha nincs $I_\supset$ alkalmazva, akkor β-ban csak $E_\supset$-k vannak és ezek főpremisszái, az utolsó formulát kivéve. Legyen β^M az utolsó formula. Ekkor felfelé haladva a formulákon részformulája az alsó a fölsőnek.

2.14.3.6. Részformula tétel. $([\Gamma]\Pi/A)$ normál levezetés minden formulája a $\Gamma \cup \{A\}$ formulahalmaz elemeinek részformuláiból áll.

2.14.3.7. Bizonyítás. Az ágak n rendjére vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy az n hosszúságú ágak minden formulája vagy a feltételekben szereplő formulák részformulái vagy a konklúzió részformulája.

Ha $n = 0$, akkor az ág egyben szál is és levélformulája vagy Γ eleme, vagy egy olyan C formula, melyet egy

$$\cfrac{\cfrac{\begin{matrix}[C]\\ \beta'\end{matrix}}{D}}{C \supset D}$$

alakú $I_\supset$ szabály töröl. Ekkor tehát C a $C \supset D$ részformulája és ez az ágtétel szerint részformulája a gyökérformulának. Továbbá az ágtétel szerint az ág minden formulája vagy a levél- vagy a gyökérformula részformulája (a lokális minimumig a levélé a minimum után a gyökéré).

Tegyük fel, hogy minden n rendű ágra igaz, hogy minden eleme a $\Gamma \cup \{A\}$ formulahalmaz elemeinek részformuláiból áll. Legyen β egy $n+1$-ed rendű ág. Ekkor a β_1 levélformula vagy Γ eleme vagy egy a β^I részben lévő $C \supset D$ premisszájú szabály által törölt C. β legalsó formulája egy

$$\frac{F \qquad F \supset G}{G}$$

alakú következtetés alformulája, ahol $F \supset G$ egy n rendű ágba tartozik. Tehát az indukciós feltevés miatt $F \supset G$ a $\Gamma \cup \{A\}$ formulahalmaz elemeinek egy részformulája. Ebből adódik, hogy C a $C \supset D$ és ezzel együtt $F \supset G$ részformulája, így az összes formula vagy Γ egy elemének részformulája, vagy A részformulája.

2.14.4. Nempozitív implikációs logika

Bevezethetjük a $\Yup$ konstansot a nyelvbe és bevezethetjük az implikacionális logikába a

$$\Yup_I \frac{\Yup}{A}$$

szabályt, melynek kikötése, célszerű okokból $A \neq \Yup$. Végigkövethető, hogy ekkor a fenti tételek igazak, feltéve, hogy még egy redukciós lépéssel töröljük az $\Yup$-t követő inverziókat – $\Yup$-redukció:

$$B \neq \Yup : \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\Yup}}{A \supset B} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ A\end{matrix}}{\begin{matrix}(B) \\ \Pi\end{matrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\Yup}}{(B)} \\ \Pi\end{matrix} \quad , \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\Yup}}{A \supset \Yup} \quad \begin{matrix}\Sigma_2 \\ A\end{matrix}}{\begin{matrix}(\Yup) \\ \Pi\end{matrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\dfrac{\Sigma_1}{(\Yup)} \\ \Pi\end{matrix}$$

Ekkor az ágtételben feltesszük, hogy a minimumformula a $\Yup_I$ szabály premisszája is lehet. A normál levezetésekben az ágak tehát $(\beta^E)^\frown(\beta^M)^\frown\beta^I$ alakúak lehetnek, ahol β^M esetleg $\Yup_I$ premisszája is lehet, de a többi formula nem. Ekkor két érdekes tételt kapunk.

2.14.4.1. Ellentmondásmentesség $\nvdash_{\supset,\Yup} \Yup$.

Ha ugyanis $\vdash_{\supset,\Yup} \Yup$ lenne, akkor ennek lenne normál levezetése, melyben lenne egy szál, aminek $\Yup$ lenne a minimumformulája és mivel őt alatta semmilyen $\supset_I$ nem törli, ezért ez csak a Γ eleme lehet, ami viszont üres.

2.15. Intuicionaista normalizáció

Azt fogjuk belátni, hogy az intuicionista és minimális logika rendelkezik az inverziós elvben megfogalmazott tulajdonsággal. Az inverzió szempontjából jó levezetések lesznek ismét a normál levezetések. Megjegyezzük, hogy ez a klasszikusra csak megszorításokkal igaz: az intuicionista $\supset, \sim$ töredékre kell alkalmazni pl. kombinálva a Gödel–Gentzen-fordításon keresztül.

A tételt arra a nyelvre és logikára alkalmazzuk, melyben a legkevesebb szabály van, azaz a

$$\sim A := A \supset \Yup$$

használjuk a tagadásra, és a $\sim$ szabályai helyett a

$$\Yup_I \frac{\Yup}{A}$$

szabályt vezetjük be (ez se nem bevezetési, se nem kiküszöbölési szabály), melynek kikötése, hogy A nem lehet $\curlywedge$ a redundanciák elkerülése végett. (Azt láttuk, hogy a tagadással és abszurditással eleve problémák vannak, az egyensúly és az egycélúság egyike legalább nem teljesül).

2.15.1. Redukciós lépések

A megismert egyszerűsítési lépéseket, melyekkel a premisszák levezetéseiből előállítható a konklúzió levezetése rendre &-, $\lor$-, $\supset$-*redukciónak* nevezzük. Redukciós törekvéseink számára gondot okoz a negáció és gondot okoz még az, hogy a $\lor$ kiküszöbölési szabályát egymás után alkalmazva a mellékpremisszákon a formulák – mint ki fog derülni, feleslegesen – feltorlódhatnak. Ezt az alábbi példán mutatjuk be és bemutatjuk azt is, hogy milyen módon lehet kiküszöbölni, tömöríteni az ilyen ismétlődéseket.

Példa. Tekintsük a $\{A \lor B, A \supset C, B \supset C, C \supset E, D \supset E\} \vdash E$ alábbi levezetését!

$$\dfrac{\dfrac{(A\lor B)^{\triangleright} \quad \dfrac{\dfrac{A\supset C \quad A^{\triangleright}}{C}}{\boxed{C\lor D}_1} \quad \dfrac{\dfrac{B\supset C \quad B^{\triangleright}}{C}}{\boxed{C\lor D}_2}}{\boxed{C\lor D}^{\triangleleft}_{1,2}} \qquad \dfrac{C\supset E \quad C^{\triangleleft}}{E} \qquad \dfrac{D\supset E \quad D^{\triangleleft}}{E}}{E}$$

Látható, hogy a $\boxed{C\lor D}_1$ – $\boxed{C\lor D}_1$ és $\boxed{C\lor D}_2$ – $\boxed{C\lor D}_2$ előfordulássorozatok feleslegesek, mert $\lor$ bevezetési szabályt követnek ám $\lor$ kiküszöbölési szabállyal végződnek. Sajnos az első előfordulások nem a $\lor$ főpremisszájában, hanem mellékpremisszájában vannak, azaz nem alkalmazható rájuk a $\lor$ harmonikus tulajdonságakor említett redukciós lépés. Erre egy új eljárást kell alkalmaznunk, ami a mellékpremisszákban lévő $\lor$ több szereplését tömöríti.

2.15.1.1. Szegmentumok tömörítése

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A\lor B} \quad \dfrac{\Sigma_2}{F} \quad \dfrac{\Sigma_3}{F}}{F} \qquad \Sigma_4}{\begin{matrix}(C)\\ \Pi\end{matrix}} \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A\lor B} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{F} \qquad \Sigma_4}{C} \quad \dfrac{\dfrac{\Sigma_3}{F} \qquad \Sigma_4}{C}}{\begin{matrix}(C)\\ \Pi\end{matrix}}$$

(itt a $\begin{matrix}(C)\\ \Pi\end{matrix}$ jelölés azt jelenti, hogy a C formula a Π fa egy top-formulája).

Ekkor az előző példa összezuhanása a következőképpen megy végbe.

Példa – *folytatás* –

$$\dfrac{(A\vee B)^{\triangleright} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\supset C \quad A^{\triangleright}}{\boxed{C}_1}}{\boxed{C\vee D}_1^{\triangleleft}} \quad \dfrac{C\supset E \quad C^{\triangleleft}}{E} \quad \dfrac{D\supset E \quad D^{\triangleleft}}{E}}{E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B\supset C \quad B^{\triangleright}}{\boxed{C}_2}}{\boxed{C\vee D}_2^{\blacktriangleright}} \quad \dfrac{C\supset E \quad C^{\blacktriangleright}}{E} \quad \dfrac{D\supset E \quad D^{\blacktriangleright}}{E}}{E}}{E}$$

itt a bedobozolt helyek lokális maximumok fellépését mutatják, melyeket ki tudunk küszöbölni:

$$\dfrac{(A\vee B)^{\triangleright} \qquad \dfrac{\dfrac{A\supset C \quad A^{\triangleright}}{C} \qquad C\supset E}{E} \qquad \dfrac{\dfrac{B\supset C \quad B^{\triangleright}}{C} \qquad C\supset E}{E}}{E}$$

2.15.1.2. Felesleges $\vee$ alkalmazások törlése *Felesleges* (*redundáns*) az $A\vee B$ főpremisszájú $\vee$E alkalmazás a $[\Gamma]\Sigma$ levezetésfában, ha $[\Gamma]\Sigma$

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A\vee B} \quad \dfrac{\overset{[A]}{\Sigma_2}}{C} \quad \dfrac{\overset{[B]}{\Sigma_3}}{C}}{(C)}\\ \Pi\end{array}$$

alakú, ha 1) A vagy B nem szerepel rendre a Σ_2 vagy Σ_3 levelein, 2) az A vagy B formulák Γ elemei vagy 3) ha A vagy B törlendő premisszák, de rendre vagy nem a Σ_2/C-beli C vagy nem a Σ_3/C-beli C előfordulás törli őket (azaz $f(A)\neq C$ vagy $f(B)\neq C$, ahol f a levezetésfa eldobó függvénye).
Ekkor a következőképpen szabadulunk meg tőle:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A\vee B} \quad \dfrac{\Sigma_2}{C} \quad \dfrac{\overset{[B]}{\Sigma_3}}{C}}{(C)}\\ \Pi\end{array} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{array}{c}\dfrac{\Sigma_2}{(C)}\\ \Pi\end{array}$$

2.15.1.3. $\curlywedge_I$ redukció Ha $\curlywedge_I$ alkalmazását kiküszöbölési szabály követ, akkor az alábbi módon lehet a bizonyításból a kiköszöbölési szabály alkalmazását törölni:

$$\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\curlywedge}}{A\& B}}{(B)}\\ \Pi\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\curlywedge}}{(B)}\\ \Pi\end{array}, \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\curlywedge}}{A\vee B} \quad \dfrac{\overset{[A]}{\Sigma_2}}{C} \quad \dfrac{\overset{[B]}{\Sigma_3}}{C}}{(C)}\\ \Pi\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\curlywedge}}{(C)}\\ \Pi\end{array}, \qquad \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\curlywedge}}{A\supset B} \quad \dfrac{\Sigma_2}{A}}{(B)}\\ \Pi\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\curlywedge}}{(B)}\\ \Pi\end{array}$$

2.15.1.4. &-, ∨-, ⊃-redukció

&-redukció

$$\frac{A\&B}{A} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad \dfrac{\Sigma_2}{B}}{A\&B}}{A} \quad\rightsquigarrow\quad \frac{\Sigma_1}{A}$$

∨-redukció

$$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ \overline{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \Sigma_3\\ \overline{C}\end{matrix}}{C} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma}{A}}{A \vee B} \quad \begin{matrix}[A]\\ \Sigma_1\\ \overline{C}\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]\\ \Sigma_2\\ \overline{C}\end{matrix}}{C} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{matrix}\Sigma\\ \overline{[A]}\\ \Sigma_1\\ \overline{C}\end{matrix}$$

⊃-redukció

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} \quad\rightsquigarrow\quad \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{A} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \Sigma_2\\ \overline{B}\end{matrix}}{A \supset B}}{B} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{matrix}\Sigma_1\\ \overline{[A]}\\ \Sigma_2\\ \overline{B}\end{matrix}$$

2.15.1.5. Definíció Legyen $([\Gamma]\Pi/A)$ levezetésfa.

1. A fabeli egymást követő $C_1, \ldots, C_n$ formulasorozatot *szegmentumnak* nevezzük, ha
   (a) C_1 nem következménye ∨E-nek,
   (b) minden $i < n$-re C_i a ∨E egy alpremisszája,
   (c) C_n nem alpremisszája ∨E-nek.
2. Azt mondjuk, hogy a $C_1, \ldots, C_n$ szegmentum *inverzió* (ill. *maximum* vagy *lokális maximum*), ha
   (a) C_1 valamely &I, ∨I, ⊃I, $\curlywedge_{\mathrm{I}}$ következménye és
   (b) C_n valamely &E, ∨E, ⊃E főpremisszája.
3. Π *normál,* ha nincs benne maximális szegmentum és nincs benne ∨E olyan alkalmazása, ahol nem kerül sor feltétel törlésére.

Tény – *egyelemű maximális szegmentum* – Az egyelemű maximális szegmentumok olyan formulák, amelyek vagy ugyanannak a funtornak a bevezetési szabályának a következménye és kiküszöbölési szabályának fő premisszája vagy $\curlywedge$I következménye és egy kiküszöbölési szabály fő premisszája.

2.15.2. Normalizációs tétel

2.15.2.1. Tétel Ha $\Gamma \vdash_{\mathrm{M,I}} A$, akkor létezik A-nak normál levezetése is rendre a minimális vagy az intuicionlista logikában Γ-ból.

2.15.2.2. Bizonyítás. I. Először a $([\Gamma]\Pi/A)$ levezetésfában szereplő felesleges $\vee$E alkalmazásokat töröljük. Legyen

$$n = \max\{\deg(P \vee Q) \mid P \vee Q \text{ főpremisszája egy felesleges } \vee\text{E alkalmazásnak.}\}$$

ha van egyáltalán felesleges $\vee$E alkalmazás és $n = 0$ különben. Belátjuk az n-re vonatkozó indukcióval, hogy létezik $([\Gamma]\Pi'/A)$ levezetésfa, amiben már nincs felesleges $\vee$E alkalmazás. Ha $n = 0$, akkor az állítás triviálisan teljesül. Most tegyük fel, hogy n-re igaz és $([\Gamma]\Pi/A)$-ben van $n+1$-ed fokú premisszájú $\vee$E redundancia. Ekkor ezek közül van olyan $P \vee Q$ premisszájú, hogy a

$$\cfrac{\cfrac{\Sigma_1}{P \vee Q} \qquad \cfrac{\begin{matrix}[P]\\ \Sigma_2\end{matrix}}{C} \qquad \cfrac{\begin{matrix}[Q]\\ \Sigma_3\end{matrix}}{C}}{\begin{matrix}(C)\\ \Pi\end{matrix}}$$

fában már nincs rajta kívül több redundáns $\vee$E alkalmazás, melynek főrpemisszájának foka $n+1$. Ekkor az összes ilyen megszüntetve, majd az eljárást folytatva véges lépésben elérhetjük, hogy ne legyenek $n+1$-ed fokú redundenciák.
Ha nem lenne ilyen redundancia, akkor az azt jelentené, hogy végtelen sok van, ami ellentmond annak, hogy a levezetésfa véges.

II. Az σ inverziókra egy indukciós paramétert vezetünk be, $n = (d, l)$-t, ahol d a σ szegmentum formulájának fokszáma, $l = |\sigma|$ pedig a hossza. Az indukciós paraméter rendezési relációja legyen: $(d_1, l_1) < (d_2, l_2)$, ha $d_1 < d_2$ vagy $d_1 = d_2$, de $l_1 < l_2$. Legyen $([\Gamma]\Pi/A)$ levezetésfa és legyen

$$n = (d, l) \text{ ahol } d = \max\{\deg\sigma \mid \sigma \in ([\Gamma]\Pi/A)\}, \text{ és } l = \max\{|\sigma| \mid \deg\sigma = d, \ \ \sigma \in ([\Gamma]\Pi/A)\}$$

ha van inverzió a levezetésben és $n = (0, 0)$, ha nincs. Az n-re vonatkozó indukcióval belátjuk, hogy minden n-re létezik $([\Gamma]\Pi'/A)$ levezetésfa, hogy $([\Gamma]\Pi'/A)$-ban már nincs n indukciós értékű szegmentum.
Ha $n = (0, 0)$ akkor nincs maximális szegmentum, így triviálisan teljesül, hogy nincs a levezetésfában inverzió.
Legyen $n = (d, l)$ tetszőleges. És tegyük fel, hogy minden n-nél kisebb indukciós fokú $([\Gamma]\Pi/A)$ fához már létezik olyan Π', hogy $([\Gamma]\Pi'/A)$ levezetésfa. Ha $l = 1$, akkor a redukciós lépésekkel megszüntethetők az d-fokú inverziók véges lépésben, az I. pontban vázolt eljáráshoz hasonlóan. Ha $l > 1$, akkor a legfelső ilyen inverziókkal kezdve eggyel csökkenthető l a szegmentumtömörítési eljárással. Ezzel az indukciós paramétert lecsökkentettük és az indukciós feltevés szerint már lesz $([\Gamma]\Pi'/A)$ levezetésfa, melyben már nincs inverzió.

III. Végül vegyük észre, hogy az I-ben említett eljárás nem növeli sem a formulák fokát, sem a szegmensek hosszát. Ezért az felesleges alternáció alkalmazásokat bármikor törölhetjük, melyel normál levezetést kapunk.

2.15.3. Utak a normál levezetésekben

Az implikacionális logika normál bizonyításaiban szereplő „ág” fogalmaz most úgy kell módosítanunk, hogy az új szabályok végrehajtása a formulatartalmazást a sorozatban ne rontsák el. Világos, hogy megállna az ág a $\vee$E szabályoknál, a főpremisszákon, de ha nem ágakban, hanem utakban gondolkodunk és folytatjuk az utat a feltételekkel, akkor a tartalamzási reláció folytatható.

2.15.3.1. Definíció Azt mondjuk, hogy a Π normál levezetésben az $A_1, \ldots, A_n$ út, ha

1. A_1 egy $\vee$E által nem törölt levél,
2. A_i minden $i < n$-re nem alpremisszája $\supset$E-nek és
   (a) vagy nem főremisszája $\vee$E-nek és a következő (A_{i+1}) pont alatta van,
   (b) vagy főpremisszája $\vee$E-nek és a következő (A_{i+1}) pont a törölt kezdő premissza
3. A_n vagy a $\supset$E alpremisszája vagy a levezetés végformulája.

Példa.

$$\dfrac{\color{red}{\dfrac{A\&(B\vee C)}{B\vee C^{\circ}}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B\vee C)}{A} \quad \color{red}{B^{\triangleright\circ}}}{\color{red}{A\&B}}}{{}^{\triangleright}\color{red}{(A\&B)\vee(A\&C)}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B\vee C)}{A} \quad C^{\triangleright}}{A\&C}}{{}^{\triangleright}(A\&B)\vee(A\&C)}}{\color{red}{(A\&B)\vee(A\&C)}}$$

$$\dfrac{\dfrac{A\&(B\vee C)}{B\vee C^{\circ}} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\&(B\vee C)}{A} \quad B^{\triangleright}}{A\&B}}{{}^{\triangleright}(A\&B)\vee(A\&C)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{blue}{A\&(B\vee C)}}{\color{blue}{A}} \quad C^{\triangleright}}{\color{blue}{A\&C}}}{{}^{\triangleright}\color{blue}{(A\&B)\vee(A\&C)}}}{\color{blue}{(A\&B)\vee(A\&C)}}$$

Mind a $\circ$-kal összekapcsolt piros, mind a kék formulasorozat egy-egy út a (normál) levezetésben és az alsó két formulájuk azonos az alternáció kiküszöbölési szabályának ismétlő tulajdonsága miatt. Ez a két ugyanolyan formulából álló útszakasz a szegmentum. Vegyük észre továbbá, hogy a levezetés utolsó szegmentuma nem egyértelmű, azaz két szegmentumban is végződik.

2.15.3.2. Tétel Normál levezetésben minden π út szegmentumok egy sorozata, mely $\pi = \pi^{E\frown}\pi^{M\frown}\pi^{I}$ alakú, ahol

1. π^E esetleg üres és minden szegmentuma kiküszöbölési szabályok főpremisszái és benne minden szegmentum a következőt részformulaként tartalmazza,
2. π^M egyszegmentumú útszakasz, mely bevezetési szabály premisszája vagy $\curlywedge_I$ premisszája,
3. π^I esetleg üres és minden szegmentuma bevezetési szabály premisszája, az utolsót kivéve és a szegmentumok a következő szegmentum részformulái, kivéve az utolsót.

2.15.3.3. Bizonyítás. Legyen π út egy normál bizonyításban.
Ha π egy szegmentumú, akkor ennek legalsó formulája vagy a gyökérformula és akkor nem premissza, vagy $E_{\supset}$ mellékpremisszája, de akkor nem más premisszája, így triviálisan teljesíti a 2. feltételt, azaz ilyenkor $\pi^M = \pi$.
Legyen π nem egyszegmentumú:

1) Ha valamely I vagy $\Yup_I$ van π-ban alkalmazva, akkor legyen a π^M szegmentum a π-nek azzal az F formulaelőfordulással végződő szegmentuma, mely az első premisszája valamely I vagy $\Yup$ alkalmazásának.

$$R\;\frac{\dfrac{P \vee Q \qquad F \qquad F}{\boxed{F}}}{G}$$

ahol R az valamely I vagy $\Yup_I$.

a) Ha vannak π^M felett elemei π-nek, akkor ezek nem lehetnek valamely I vagy $\Yup_I$ premisszái, mert π^M az első ilyen. De akkor ezek csak valamely E premisszái lehetnek, ám, mivel itt útról van szó, ezért ezek nem lehetnek $E_{\supset}$ mellékpremisszái, tehát csak E főpremisszái lehetnek mind. És így felfelé haladva a felsőnek részformulája minden alsó.
b) π^M alatt közvetlenül nem lehet valamely E premisszája, mert a levezetés normál. Csak valamelyik I vagy $\Yup_I$. De nem követhet egymást két $\Yup$ a $\Yup_I$ szabály kikötése miatt és I-t koklúziója se lehet $\Yup$, mert az nem összetett. Ugyanígy az ezalatti sem lehet valamely E premisszája ill. $\Yup$ és így tovább, csak valamely I-é. És így lefelé haladva ennek az útszakasznak felső formulája részformulája minden alsónak.

2) Ha nincs valamely I vagy $\Yup_I$ alkalmazva, akkor π-ben csak E-k vannak alkalmazva és a formulái ezek főpremisszái. Legyen π^M az utolsó formula. Ekkor felfelé haladva a formulák mentén részformulája az alsó a fölsőnek.

2.15.4. Szelektív vagy

Az intuicionista és minimális logikai $\vee$ szelektív tulajdonságú, melyet először Gödel és Gentzen bizonyított.

2.15.4.1. Tétel Ha $\vdash_{\mathrm{M,I}} A \vee B$, akkor $\vdash_{\mathrm{M,I}} A$ és $\vdash_{\mathrm{M,I}} B$ közül legalább az egyik teljesül.

2.15.4.2. Bizonyítás.

2.15.4.3. Megjegyzés. Ez az eredmény nagyon érdekes, mert rámutat arra, hogy az intuicionaista logika mégsem összehasonlítható a klasszikussal. Egyfelől

(*) „Ha $\vdash_{\mathrm{I}} A \vee B$, akkor $\vdash_{\mathrm{I}} A$ és $\vdash_{\mathrm{I}} B$ közül legalább az egyik teljesül.”

egy a tárgynyelvre lefordíthatatan szójáték. Ugyanis. 1) lehet ez a

$$\vdash (A \vee B) \supset (A \vee B)$$

és akkor mindkét rendszerben triviálisan teljesül, ami furcsa, vagy 2) lehet a fordítás a

$$(**) \qquad \vdash ((A \vee B) \supset A) \vee ((A \vee B) \supset B)$$

de akkor a klasszikusban igaz, az intuicionistában nem (ezt ellenőrizzük levezetéssel és az intuicionista logika topologikus Kripke-szemantikájának alkalmazásával!)
Vegyük észre, hogy ha feltesszük, hogy (**) a (*) fordítása, ezért abból, hogy (**) igaz metatétel az intuicionista logika metaelméletében és hamis metakijelentés a klasszikus logika metaelméletében, ezért a klasszikus logika metaelmélete intuicionista és az intuicionista logika metaelmélete klasszikus. De azt, hogy (**) a (*) fordítása, azt nem kell feltétlenül elfogadnunk, és akkor a tézis nem igaz.

3. Deskripciók, nevek, kvantorelimináció

3.1. A természetes nyelv modellezése típusos lambda-formalizmussal

Az alábbi nagyon egyszerű kalkulus szoros kapcsolatban van az implikacionális töredékkel. Legyen U az alapkategóriák halmaza (néha típusváltozóknak is nevezik őket)

$$\mathbb{T} ::= U \mid \mathbb{T}(\mathbb{T})$$

aminek az elemei a *típusok.*

U most kételemű: $U = \{\iota, o\}$: ι a nevek és o a mondatok típusa (kategóriája), de lehet U végtelen is, erre is lesz példa.

Ezen kívül legyen a változók halmaza V és tekintsük definiáljuk rekurzívan a

$$\mathbb{E} ::= V \mid (\lambda x)\mathbb{E} \mid \mathbb{E}(\mathbb{E}) \quad {}_{x \in V}$$

nyelvet, mely elemei a lambda kalkulus *kifejezései.*

3.1.0.1. Példák

(1) „Pisti talán direkt szórakozik veled.”

mondatban egy lehetséges funkcionális felbontását.

Lexikon:		
Pisti	*pisti'*	$\in \mathrm{Cat}(\iota)$
talán	*talán'*	$\in \mathrm{Cat}(o(\iota))$
direkt	*direkt'*	$\in \mathrm{Cat}(\iota)$
szórakozik -val/vel	*szórakozik-val/vel'*	$\in \mathrm{Cat}((o(\iota))(\iota))$
(te)	*te'*	$\in \mathrm{Cat}(\iota)$

$$\textit{szórakozik-val/vel'}(\textit{pisti'})(\textit{te'})$$

Példa:

(2) „Pisti szórakozik veled."

mondatot felbontani. Itt a „szórakozik" szót egy $/o(\iota))(\iota)$ típusú konstanssal modellezzük: *szórakozik'* $\in \mathrm{Cat}((o(\iota))(\iota))$. Ez a konstans kétbemenetű, ha az első konvenciót használjuk kétszer, akkor két individummváltozóval egy o kategóriájú kifejezést kapunk, ami két szabad változót tartalmaz:

$$\textit{szórakozik'}(x)(y)$$

Ha ezeket lekötjük a lambdákkal, akkor újra $(o(\iota))(\iota)$ típusú kifejezést kapunk:

$$(\lambda x)(\lambda y)\textit{szórakozik'}(x)(y)$$

Most, ezekkel az első szabály szerint a *Pisti'* és *veled'* szavakkal elkészítjük a velük való helyettesítés nyelvi reprezentációját:

$$(\lambda x)(\lambda y)\textit{szórakozik'}(x)(y)(\textit{Pisti'})(\textit{veled'})$$

Ez a formula azt is kódolja, hogy milyen lépésekkel keletkezett. Szemben az ezzel szemantikailag szinoním, de felépítésére nézve más

$$\textit{szórakozik'}\,\textit{Pisti'}\,\textit{veled'}$$

formulával. A szemantikai szinonimitást a lambdakonverzió szabálya mutatja.

(3) „Pisti direkt szórakozik veled."

Itt a direkt egy olyan típusú kifejezés, mely egy predikátumot, konkrétan itt diadikus predikátumot bánt:

$$(\textit{direkt'}\,\textit{szórakozik'})\textit{Pisti'}\,\textit{veled'}$$

$$((\lambda f)\textit{direkt'}f)((\lambda x)(\lambda y)\textit{szórakozik'}xy))(\textit{Pisti'})(\textit{veled'})$$

szó a legbonyolultabb szerkezetű. Két bemenete egy név és egy igei kifejezés:

$$x\textit{talán'}y$$

az igei kifejezés is összetett, melynek bemenete szintén egy igei kifejezés

$$\textit{direkt'}z$$

ami már egy predikátum

$$x\textit{szórakozik'}y\textit{-nal'}$$

3.1.0.2. Szabad és kötött változók. Legyen $A, B \in \mathrm{Exp}$ és $x \in \mathrm{Var}$.

1. *x-nek az A-beli valamely előfordulása kötött,* ha A-nak egy $(\lambda x)C$ alakú részkifejezésébe esik. Ellenkező esetben *szabad.*

2. *x_α szabad B_α-ra nézve az A-ban,* ha x szabad változója A-nak és B minden y szabad változója esetén x-nek nincs szabad előforulása A-nak a $(\lambda y)C$ alakú részkifejezéseiben.

3. Ha x_α szabad A-ban B_α-re nézve, akkor $A[B/x]$ jelöli azt a szimbólumsorozatot, amit úgy kapunk, hogy x szabad előfordulásaiba B-t helyettesítjük, melyet így definiálunk:

   (a) Ha $A = x$, akkor $x[B/x] = x$.
   (b) Ha $A = y$ és $x \neq y$, akkor $y[B/x] = y$.
   (c) Ha $A = C(D)$, akkor $C(D)[B/x] = C[B/x](D[B/x])$
   (d) Ha $A = (\lambda y)C$ és $x \neq y$, akkor $((\lambda y)C)[B/x] = ((\lambda y)(A[B/x])$.

3.1.0.3. Szintaktikai helyettesítési lemma. Ha A kifejezés, akkor $A[B/x]$ is kifejezés.

Ezt teljes indukcióval lehet igazolni a helyettesítés fenti definÍciója alapján.

3.1.1. Lambda kalkulus és implikacionális logika

Az alábbiakban feltesszük, hogy a típusváltozók U halmaza végetelen és nem is kifejezetten a grammatikai kategóriákra utal, csak egy absztrakt végtelen halmaz.

A *kontextus* nevű halmazok a $V \times \mathbb{T}$ Descartes-szorzat véges részhalmazai:

$$\mathbb{C} := \{(\Xi : \Gamma) \subseteq V \times \mathbb{T} \mid (\Xi : \Gamma) \text{ véges és } \varphi \neq \psi, \text{ ha } (x, \varphi), (x, \psi) \in (\Xi : \Gamma)\ \}$$

Azt, hogy $(x, \varphi) \in (\Xi : \Gamma)$ úgy is jelöljük, hogy $(x : \varphi) \in (\Xi : \Gamma)$. Az egyszerűség kedvéért használjuk a

$$(\Xi : \Gamma), (x : \varphi) := (\Xi : \Gamma) \cup \{(x : \varphi)\}$$

zárójel elhagyási konvenciót. Ha félreértést nem okoz, $(x : \varphi)$ helyett $x : \varphi$-t írunk.

A $\mathbb{C} \times \mathbb{E} \times \mathbb{T}$-beli $\vdash$ *tipizálhatósági* (*típusba sorolási*) reláció a következő

$$\frac{}{(\Xi : \Gamma), (x : \varphi) \vdash x : \varphi} \qquad \frac{(\Xi : \Gamma), (x : \psi) \vdash M : \varphi}{(\Xi : \Gamma) \vdash (\lambda x)M : \varphi(\psi)} \qquad \frac{(\Xi : \Gamma) \vdash N : \psi \qquad (\Xi : \Gamma) \vdash M : \varphi(\psi)}{(\Xi : \Gamma) \vdash M(N) : \varphi}$$

ahol az első két levezetésben $x \notin \Xi$. Sokszor a

$$\varphi(\psi)$$

típust

$$\psi \to \varphi$$

-val is jelölik, aminek a következő az indoka. Ha csak a kettőspont utáni részeket nézzük és $\varphi(\psi)$ helyett $\psi \to \varphi$-t írunk, azaz a $\Gamma \vdash \varphi$ relációra koncentrálunk, akkor az implikacionális logika bevezetési és kiküszöbölési szabályait fedezhetjük fel:

$$\frac{\Gamma, \psi \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi \to \varphi} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \psi \qquad \Gamma \vdash \psi \to \varphi}{\Gamma \vdash \varphi}$$

Fennáll tehát a következő összefüggés:

$$(\Xi : \Gamma) \vdash M : \varphi \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{array}{c} [\Gamma] \\ \Pi \\ \hline \varphi \end{array} \quad \text{levezetés } \mathfrak{Fm}_{\supset}\text{-ben}$$

ahol $\varphi \in \mathrm{Fm}_{\supset}$. Ezt hívjuk Curry–Howard-korreszpondenciának (vagy izomorfizmusnak). Mi több, az is látható, hogy a kettőspont előtti rész a bizonyítást kódolja. És valóban. Tekintsük a kissé redundáns:

$$\cfrac{\cfrac{M : \varphi}{(\lambda x)M : \psi \to \varphi} \qquad N : \psi}{((\lambda x)M)(N) : \varphi}$$

3.1.1.1. Béta redukció és helyettesítési lemma *β-redukciónak* nevezzük a $((\lambda x)M)(N) \to M[N/x]$ egyszerűsítést.

3.2. Elsőrendű nyelv, elsőrendű struktúra és lehetséges világok

Az elsőrendű nyelvekben csak két kategória van, a termek és a formulák. A típusok ekkor szándékoltan összecsúsznak. A termek az $\iota(\alpha)$, a formulák $o(\alpha)$ típusú kifejezések, ahol α bármilyen típus lehet.

3.2.1. Elsőrendű nyelv

3.2.1.1. Definíció (csak kvantorok).

$$\mathfrak{Tm} = \langle \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const} \mid \langle f_i \rangle_{i \in I} \rangle$$

$$\mathrm{At} = \{t = s, r_j(t_1, \ldots, t_{n_j}) \mid t, s, t_1 \ldots t_{n_j} \in \mathrm{Var} \cup \mathrm{Const}\}$$

$$\mathfrak{Fm} = \langle \mathrm{At} \mid \langle L_k, (Q_l x) \rangle_{k \in K, l \in L, x \in \mathrm{Var}} \rangle$$

Máris látható, hogy a definíció szétválasztja a formulákon belüli változókat: x egy szereplése kötött, ha (Qx) „hatókörén belüli”, egyébként szabad.

3.2.1.2. Megjegyzés. Kvantorokra vonatkozó levezetési szabályok. Mivel ebben a jegyzetben a bizonyításelméleti tárgyalásmód az elsődleges, ezért a két nevezetes kvantor jelentését (bizonyításelméleti jelentését) a bevzetési és kiküszöbölési szabályok megadásával adjuk meg. Természetsen az elsőrendű struktúrák azaz a modellelméleti szemantika alapján is meg fogjuk határozni a jelentésüket. Az univerzális kvantor kiküszöbölési szabálya (univerzális instanciáció)

$$\forall_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\langle \Gamma, (\forall x)A \rangle}{\langle \Gamma, [t/x]A \rangle}$$

tetszőleges t termre. Az univerzális kvantor bevezetési szabálya (univerzális generalizáció)

$$\forall_{\mathrm{I}} \qquad \frac{\langle \Gamma, A \rangle}{\langle \Gamma, (\forall x)A \rangle}$$

ahol x nem szerepel szabadon a Γ egyetlen egy elemében sem. Ez a megszorítás azért fontos, mert ha nem tennénk fel, akkor a következő nyilvánvalóan szándékolatlan dolgot látnánk. Tegyük fel, hogy létezik az egyenlőség reláció, a c és d névkonstans a nyelvben és legyen $\Gamma = \{x = c, d \neq c\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x = c}{(\forall x)x = c}}{d = c} \qquad d \neq c}{\curlywedge}$$

Az egzisztenciális kvantor bevezetési szabálya (egzisztenciális generalizáció)

$$\exists_{\mathrm{I}} \qquad \frac{[t/x]A}{(\exists x)A}$$

tetszőleges t termre. És az egzisztenciális kvantor kiküszöbölési szabálya (egzisztenciális instanciáció)

$$\exists_{\mathrm{E}} \qquad \frac{\langle \Gamma_1, (\exists x)A \rangle,\ \langle \Gamma_2, B \rangle}{\langle \Gamma_1 \cup (\Gamma_2 - \{A\}), B \rangle}$$

ha x nem szerepel szabadon B-ben és nem szerepel Γ_2 elemeiben, kivéve A-t. Ez utóbbi feltevés azért kell, mert ellenkező esetben az alábbi szándékolatlan következtetésekbe ütköznénk. Egyfelől, ha B szabadon tartalmazza x-et, pl. $\Gamma = \{c = c, d \neq c\}$, $(B = (x = c))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{c = c}{(\exists x)(x = c)} \qquad x = c}{x = c}}{(\forall x)(x = c)}}{d = c}$$

Másfelől, ha $\Gamma = \{c = c, x = d, (x = c \,\&\, x = d \supset c = d), d \neq c\}$

$$\dfrac{\dfrac{c = c}{(\exists x)(x = c)} \qquad \dfrac{\dfrac{x = c \quad x = d}{x = c \,\&\, x = d}}{c = d}}{c = d}$$

3.2.1.3. Definíció (funkcionálokkal). Vannak olyan változót lekötő operátorok is, melyek $\iota(o(\iota))$ (és variánsai) típusúak, vagy ad abszurdum $\iota(\iota(\iota))$ típusúak, ekkor a termek és formulák generált algebrája összekeveredik és együtt generálják a nyelvet.

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp} = \mathrm{Tm} \cup \mathrm{Fm} ::= \\ & \mathrm{Var}_{\mathrm{Tm}} \mid \\ & \mid \mathrm{Const}_{\mathrm{Tm}} \mid \\ & \mid (f_i \mathrm{Tm}...\mathrm{Tm})_{\mathrm{Tm}} \mid \\ & \mid (r_j \mathrm{Tm}...\mathrm{Tm})_{\mathrm{Fm}} \mid \\ & \mid (L_k \mathrm{Fm}...\mathrm{Fm})_{\mathrm{Fm}} \mid \\ & \mid (\mathrm{Tm} = \mathrm{Tm})_{\mathrm{Fm}} \mid \\ & \mid ((Q_l x)\mathrm{Fm})_{\mathrm{Fm}} \mid \\ & \mid ((F_m x)\mathrm{Fm})_{\mathrm{Tm}}\end{aligned}$$

3.2.2. Elsőrendű struktúrák, modellelméleti szemantika

Hasznos dolog más szemszögből is megnézni az elsőrendű nyelvek jelentéselméletét, éspedig a következőkben azt a direkt referenciális[16] felépítést adjuk meg, mely Tarskira vezethető vissza. Egyfelől a ma használatos halmazelméleti interpretációt ismertetjük, másfelől a tárgyalás végén egy kicsit foglalkozunk azzal a metanyelvi fordításra alapuló felépítésre, amelyet már az előző fejezetben is láttunk a propozicionális logikánál.

Egy

$$\mathfrak{M} = \langle M, c_i^{\mathfrak{M}}, r_j^{\mathfrak{M}}, f_k^{\mathfrak{M}}, \langle c_i, r_j, f_k, \mathrm{Var}, \sim, \supset, \vee, \&, \forall, \exists \rangle \rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$$

rendszert az elsőrendű nyelv egy *modelljének* nevezzük, ha

$$M \neq \emptyset$$

$$c_i^{\mathfrak{M}} \in M$$

$$r_j^{\mathfrak{M}} \subseteq M^{o(r_j)}$$

$$f_k^{\mathfrak{M}} : M^{o(f_k)} \to M$$

azaz M nemüres halmaz (a tárgyalási univerzum, vagy a modell univerzuma), $c_i^{\mathfrak{M}}$ az M egy eleme (individuum), r_j az M egy $o(r_j)$ változós relációja, f_k egy $o(f_k)$ változós függvény. Az $\langle c_i, r_j, f_k, \mathrm{Var}, \sim, \supset, \vee, \&, \forall, \exists \rangle$ nyelv megadása, ha az egyértelmű, akkor szükségtelen. A r_j, f_k jelek mindegyikéhez rögzíteni kell, hogy ők hányváltozós relációk ($o(r_j)$) vagy függvények ($o(f_k)$).

[16] A „direkt referenciális" elnevezés nem a matematikai logika szakkifejezése, hanem Dummett használja az olyan jelentéselméletekre, melyek áttolják a metanyelvbe a tárgynyelvi kifejezések jelentésének megadását. Ebben a szóhasználatban semmi pejoratív nincs. A direkt teferenciális elméletek klasszikusan nagyon hasznos találmányok. Elsősorban lehetőséget nyújtanak arra, hogy a tárgynyelvi kifejezések igazsága definiálható legyen az adekvát és szabatos módon. Persze vannak bizonyos elvi akadályok, amikor ez nem lehetséges, például akkor, amikor a tárgynyelv legalább annyire erős kifejezőképességgel rendelkezik, mint a metanyelv.

Általában egy elsőrendű A formula szemantikai értékét (faktuális értékét) egy modell nem határozza meg egyértelműen. Ezt csak egy rögzített változóértékelés mellett tujuk megtenni. Legyen

$$v : \mathrm{Var} \to M$$

függvény. Ezt egy $\mathfrak{M}$-beli *változóértékelésnek* vagy egyszerűen csak *értékelésnek* nevezzük. A szemantikai értékek ezután (az $(\mathfrak{M}, v)$ modell, értékelés pár rögzítésével) a Tarski-féle jelentéselmélet korább leírt szellemében egyértelműen származnak. Minden nyelvi t termnek lesz egy

$$t^{\mathfrak{M}}[v] \in M$$

fordítása és az A formulák fordításai a metanyelv

$$\mathfrak{M} \models A[v]$$

rövidítésű állításai lesznek. Ezek definíciója teljesen érthetően, a 2. fejezetben elmondottak alapján:

$$\begin{aligned}
x^{\mathfrak{M}}[v] &= v(x) && x \in \mathrm{Var} \\
c_i^{\mathfrak{M}}[v] &= c_i^{\mathfrak{M}} && i \in I \\
f_j(t_1, \ldots, t_n)^{\mathfrak{M}}[v] &= f_j^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[v]) && o(f_j) = n, j \in J \\
\mathfrak{M} \models r_k(t_1, \ldots, t_n)[v] &\Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{M}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}[v]) \in r_j^{\mathfrak{M}} && o(r_k) = n, k \in K \\
\mathfrak{M} \models (A \& B)[v] &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[v] \text{ és } \mathfrak{M} \models B[v] \\
\mathfrak{M} \models (A \vee B)[v] &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \models A[v] \text{ vagy } \mathfrak{M} \models B[v] \\
\mathfrak{M} \models (A \supset B)[v] &\Leftrightarrow \text{ha } \mathfrak{M} \models A[v] \text{ esetén } \mathfrak{M} \models B[v] \\
\mathfrak{M} \models (\sim A)[v] &\Leftrightarrow \mathfrak{M} \not\models A[v] \\
\mathfrak{M} \models (\exists x)A[v] &\Leftrightarrow \text{van olyan } b \in M\text{, hogy } \mathfrak{M} \models A[v_x^b] \\
\mathfrak{M} \models (\forall x)A[v] &\Leftrightarrow \text{minden } b \in M \text{ esetén } \mathfrak{M} \models A[v_x^b]
\end{aligned}$$

ahol

$$v_x^b : \mathrm{Var} \to M; v_x^b(y) = \begin{cases} v(y) & y \neq x \\ b & y = x \end{cases}$$

azaz v_x^b az az értékelés (v azon módosítása,) mely az x változóhoz a b-t rendeli, minden más változóhoz ugyanazt, mint v.

3.2.2.1. Példák. Elemi síkgeometria nyelvének *egy* modellje:

$$\mathfrak{Geo} = \langle \mathbf{R}^2, b^{\mathfrak{Geo}}, p^{\mathfrak{Geo}} \rangle$$

ahol b és p relációjelek, $o(b) = 3$, $o(p) = 4$,

$$b^{\mathfrak{Geo}} PQR \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} Q \text{ a } PR \text{ egyenesén van és } Q \text{ a } PR \text{ között van}$$

$$p^{\mathfrak{Geo}}PQRS \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} PQ \text{ egyenese párhuzamos az } RS \text{ egyenesével}$$

Az aritmetika nyelvének *egy* modellje (az un. *sztenderd modellje*)

$$\mathfrak{Ari} = \langle \omega, 0^{\mathfrak{Ari}}, S^{\mathfrak{Ari}}, +^{\mathfrak{Ari}}, \cdot^{\mathfrak{Ari}} \rangle$$

ahol 0 konstansjel, S, $+$, $\cdot$ függvényjelek, $o(S) = 1$, $o(+) = 2$, $o(\cdot) = 2$,

$$0^{\mathfrak{Ari}} = 0 \in \omega$$

$$S^{\mathfrak{Ari}}(n) = n + 1$$

$$n +^{\mathfrak{Ari}} m = n + m \in \omega$$

$$n \cdot^{\mathfrak{Ari}} m = n \cdot m \in \omega$$

ahol ω a természetes számok halmaza (a véges Neumann-rendszámok halmaza).

3.2.3. Lehetséges világok

Legyen M nemüres halmaz és legyen $\mathcal{L}$ az

$$\langle c_i, r_j, f_k, \langle \text{Var}, \sim, \supset, \vee, \&, \forall, \exists \rangle \rangle_{i \in I, j \in J, k \in K}$$

nyelv és $\mathfrak{M}$ egy $\mathcal{L}$ típusú modell ($|\mathfrak{M}| = M$) Ekkor

$$W_{\mathfrak{M}} = \{ \mathfrak{N} \mid |\mathfrak{N}| = M, \quad c_i^{\mathfrak{M}} = c_i^{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{N} \text{ egy } \mathcal{L} \text{ típusú struktúra} \}$$

Ekkor $W_{\mathfrak{M}}$ elemeit lehetséges világoknak nevezzük. A nyelvet érdemes kibővítenünk a $\Box$ és $\Diamond$, azaz a „szükségszerű” és a „lehetséges” mondatfunktorokkal, melyeknek a faktuális értékei egy adott w világban egy adott v értékelés szerint:

$$w \models \Box A[v] \Leftrightarrow \text{ minden } w' \in W_{\mathfrak{M}}\text{-re } c' \models A[v]$$

$$w \models \Diamond A[v] \Leftrightarrow \text{ létezik } w' \in W_{\mathfrak{M}}, \text{ hogy } c' \models A[v]$$

tetszőleges v értékelésre.

3.2.4. Extenzió és intenzió

Adott w lehetséges világban értelmezzük az A formula extenzióját, mint függvényt a következéképpen:

$$\text{Ext}(A)_w : M^n \to \{\mathsf{i}, \mathsf{h}\}; (b_1, \ldots, b_n) \mapsto \begin{cases} \mathsf{i} & w \models A[v^{b_1 \ldots b_n}_{x_{j_1} \ldots x_{j_n}}] \\ \mathsf{h} & w \not\models A[v^{b_1 \ldots b_n}_{x_{j_1} \ldots x_{j_n}}] \end{cases}$$

ahol az A formula szabad változói $x_{j_1} \ldots x_{j_n}$. Hasonlóképpen egy termre:

$$\text{Ext}(t)_w : M^n \to M; (b_1, \ldots, b_n) \mapsto t^w[v^{b_1 \ldots b_n}_{x_{j_1} \ldots x_{j_n}}]$$

ahol a t term szabad változói $x_{j_1} \dots x_{j_n}$. Megjegyyzendő, hogy zárt formulákra és termekre az extenziók konstansok, ezért azonosíthatók egy rögzített igazságértékkel vagy individuummal. Ha S mondat, akkor

$$\mathrm{Ext}(S)_w \equiv \begin{cases} \mathsf{i}, & w \models S[v] \\ \mathsf{h}, & w \not\models S[v] \end{cases}$$

és ha t egy zárt term, akkor

$$\mathrm{Ext}(t)_w \equiv t^w[v]$$

A modellelméleti jelentéselmélet képes a magasebbrendű jelentést (kb. azt, amit Frege értelemnek nevezett) modellezni. Ezt intenziónak nevezzük és lényegében az a hozzárendelés, mely minden lehetséges világhoz az abban a világban lévő extenziót rendeli:

$$\mathrm{Int}(A) : W_{\mathfrak{M}} \to \bigcup_{w \in W_{\mathfrak{M}}} \{\mathrm{Ext}(A)_w\};\ w \mapsto \mathrm{Ext}(A) \qquad \mathrm{Int}(t)_w : W_{\mathfrak{M}} \to \bigcup_{w \in W_{\mathfrak{M}}} \{\mathrm{Ext}(t)_w\};\ w \mapsto \mathrm{Ext}(t)_w$$

3.2.5. Tarski-igazság, Tarski-referencia

Tarski tézise egy-az-egyben megfogalmazható az elsőrendű struktúrákra, ha S zárt formula, azaz nem szerepel benne szabad változó. Minden nehézség nélkül a formulák felépítésére vonatkozó indukcióval igazolható, hogy ha v_1, v_2 értékelés, akkor

$$\mathfrak{M} \models S[v_1] \ \Leftrightarrow\ \mathfrak{M} \models S[v_2]$$

illetve zárt termekre:

$$t^{\mathfrak{M}}[v_1] = t^{\mathfrak{M}}[v_2]$$

Jogos tehát ezeket a metakifejezéseket egyszerűen $\mathfrak{M} \models S$-vel és $t^{\mathfrak{M}}$-vel jelölni. Tarski definiálta egy adott tárgynyelv metanyelvén az igazság fogalmát olymódon, hogy minden tárgynyelvi S mondat esetén S és $\sim S$ köztül pontosan az egyik igaz. Teljesül továbbá a Tarski-séma, vagyis minden tárgynyelvi S mondat esetén érvényes a metanyelv

$$\ulcorner S \urcorner \text{ igaz, akkor és csak akkor, ha } T(S)$$

mondata, ahol $\ulcorner S \urcorner$ az S mondat strukturális-leíró neve, $T(S)$ pedig a mondat metanyelvi fordítása.

Jelen esetben ezek a fogalmak a következőképpen néznek ki. Rögzítsünk egy $\mathfrak{M}$ modellt. Azt mondjuk, hogy S *igaz*$_{\mathfrak{M}}$, ha minden v értékelés esetén

$$\mathfrak{M} \models S[v].$$

Ez persze pont azt jelenti, hogy

$$\mathfrak{M} \models S$$

A T fordítás definíciójánál a problémát az jelenti, hogy a metanyelvben is szükségünk lesz változókra és kvantorokra. Ez azt jelenti, hogy a metanyelvi kifejezéseket is szimbolikus módon kell reprezentálnunk. Ha viszont ezt megtesszük, már nyilvánvaló lesz a fordítás. Legyenek a meta-individuumváltozók

$$v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$$

Ekkor a fordítás:

$$T(x_i) = v_i$$

$$T(r_j t_1 \ldots t_n) = T(r_j^{\mathfrak{M}})(T(t_1), \ldots, T(t_n))$$

ahol $T(r_j^{\mathfrak{M}})$ pontosan az az $o(r_j)$ változós predikátum neve, melyre

$$T(r_j^{\mathfrak{M}})(T(t_1), \ldots, T(t_n)) \Leftrightarrow (t_1^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}) \in r_j^{\mathfrak{M}}$$

A jelenség a következőképpen néz ki két természetes nyelv esetén, ha a tárgynyelv a német nyelv, a metanyelv a magyar.

„Der Schnee ist weiss."

Ennek a mondatnak a felbontása: a „Der Schnee" névből és az „...ist weiss" monadikus predikátumból áll. Ezek magyar fordítása: „A hó" és a „...fehér". Innen a mondat fordítása:

„A hó fehér."

A Tarski-séma szerint érvényes a következő metanyelvi mondat:

A „Der Schnee ist weiss." akkor és csak akkor igaz, ha a hó fehér.

Hasonlóképpen a termekkel kapcsolatban is megfogalmazható egy sajátos séma, mely rendkívül hasonló a T-sémához, pontosabban annak egy speciális esetével azonosítható. Szeretnénk a

A „Der Schnee" a hóra referál.

alakú metanyelvi igazságokat arra használni, hogy a tárgynyelvi termek faktuális értékéhez eljuthassunk a metanyelv segítségével. Sajnos eleve gyanús a metanyelven megfolalmazott „referál" reláció, mert a tárgynyelven ilyen nincs, vagy legalább is nem nyilvánvaló, hogy mi az. Viszont az azonosságot felhasználhatjuk a referálás valamilyen interpretálására. Legyen x az első tárgynyelvi individuumváltozó, C a metanyelv egy individuumneve, valamint elegyen t tárgynyelvi zárt term és $T(t)$ ennek fordítása.

> A C pontosan akkor és csak akkor elégíti ki az „$x = t$" formulát, ha C azonos $T(t)$-vel.

Általában is definiálhatjuk a referálás fogalmát, a következőképpen.

> A t név C-re *referál,* ha C akkor és csak akkor elégíti ki az „$x = t$" formulát, ha C azonos $T(t)$-vel.

Alapvető követelményünk a referálásra vonatkozóan, hogy ha a t név C-re referál, akkor minden $A(x)$ tárgynyelvi formulára teljesül, hogy

> Az $A(t)$ monndat igaz, akkor és csak akkor, ha $T(A)(C)$.

Ez a definició következménye lesz. Pl.

> Az „Paris is the capital of France" mondat igaz, akkor és csak akkor, ha Párizs Franciaroszág fővárosa.

3.3. Deskripciók kiküszöbölése és a nevek jelentése

A logikai grammatika a nyelvi kifejezéseket két alapkategóriába osztja: a nevek (ι) és a mondatok (o). A neveket két további kategóriába oszthatjk. Az *individuumnevek* (névkonstansok), pl. „Arisztotelész” és az *individuumleírások* (vagy deskripciók), pl. „a Nagy Sándort nevelő filozófus”. A *határozott deskripcióknak* a természetes nyelvben a következő alapformájuk van:

„az F”

ahol F egy egyváltozós tulajdonság (monadikus predikátum vagy nyitott mondat). Egy deskripciónak mi a megszokott értelme, hogy annak a dolgonak a neve, ami F. Ekkor azonnal egy *szemantikai* problémába ütközünk: van-e minden esetben egy határozott leírásnak jelölete, jelentése és ha igen, akkor mi az.

Megjegyezzük, hogy ha úgy definiáltuk volna a deskriptort, hogy

„az az egyetlen dolog, ami F”

vagy

„az F”

ahol F olyan egyváltozós tulajdonság, melyet pontosan egy dolog tesz igazzá, akkor ez szemantikai furcsaságot eredményezne. Ez a következő. Ha egy nyelvi szerkezetet szemantikailag definiálunk, akkor a nyelvi kategóriák definíciójába nyelvileg idegen fogalmakat is felhasználunk, mintha a vektoriális szorzás definíciójánál a jobb kezünkre vagy a Sarkcsillagra hivatkoznánk (ami meg is történik :)). Pl. az akadémiai helyesírás szerint a „vajas kenyér”, „lekváros kenyér”, stb. szerkezeteket külön kell írni, de a „zsíroskenyér” egybe írandó, mert a proletár számára ez sajátos jelentéssel bíró fogalom. Kevéssé problémás, ám mégis értelmes lett volna így definiálni:

„az az egyetlen dolog, amire F igaz”

Ekkor a tárgynyelvbeli igaz terminust alkalmazzuk, ami elvezethet az önreferencia (a nyelvi önhivatkozás) problémájához.

Egyes nyelvfilozófiai irányzatok szerint, mivel a deskripciók szemantikai bonyodalmat okoznak ezért meg kell szabadulni tőlük. Meg is mondják, hogy milyen módon lehet őket kiiktatni a nyelvből (Russell). Ez a deskriptor elimináció, mely a kvatorok segítségével történik. Hogy miért kvatorokkal, az nemsokára kiderül. A deskriptor eliminációnak van matematikai alkalmazása is, pl. függvényeket és konstansokat lehet definiálni kvantorokkal és relációkkal.

Más megközelítések szerint a kvantorok okoznak – matematikailag is megtapasztalható – problémákat ezért őket kell kiküszöbölni (Hilbert). Ezt határozott vagy határozatlan deskriptorokkal vagy feltételes deskriptorokkal teszik. Ennek egyik hasznos folyománya ellentmondásmentesség igazolása kvantoreliminációval bizonyos rendszereknél.

A deskripciók kiküszöbölése és a kvantorelimináció két egymással szembe menő törekvés.

3.3.1. Tarski tézise

Legyen M tetszőleges nemüres halmaz. *Egy fogalom logikai, ha a tárgyalási univerzum minden permutációja invariánsan hagyja.*

Példák. *Azonosság és különbözőség.* Legyen $p : M \to M$ kölcsönösen egyértelmű leképezés, mely ráképez M-re. Ha valmely $x \in M$-re $x = y$, akkor $p(x) = p(y)$. (Ez a diagonalizáció.) Illetve ha $x \neq y$, akkor $p(x) \neq p(y)$.

Negáció. Legyen

$$n : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M),\ H \mapsto M \setminus H$$

Ekkor $p(M \setminus H) = M \setminus p(H)$, mert

$$y \in p(M\backslash H) \quad \rightsquigarrow \quad p^{-1}(y) \in M\backslash H, \quad y \in p(H) \rightsquigarrow p^{-1}(y) \in H \quad \rightsquigarrow\downarrow \ \rightsquigarrow y \in M\backslash p(H)$$

És fordítva. Tehát $p(n(H)) = p(M \setminus H) = M \setminus p(H) = n(p(H))$.

Egzisztenciális kvantifikáció. (Cilindrifikáció.)

$$f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M),\ H \mapsto \begin{cases} M, & \text{ha } H \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{ha } H = \emptyset \end{cases}$$

Ekkor, ha $H \neq \emptyset$, akkor $p(f(H)) = p(M) = M = f(p(H))$, ha $H = \emptyset$, akkor $p(f(H)) = p(\emptyset) = \emptyset = f(p(H))$

Univerzális kvantifikáció. (A cilindrifikáció duálisa.) Legyen

$$g : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M),\ H \mapsto \begin{cases} M, & \text{ha } H = M \\ \emptyset, & \text{ha } H \neq M \end{cases}$$

$g(H) = M \setminus f(M \setminus H)$, tehát $p(g(H)) = M \setminus p(f(M \setminus H)) = M \setminus f(M \setminus p(H)) = g(p(H))$.

3.3.2. Russell-javaslata

A határozott deskriptor szimbolikus jelölése:

$$(\iota x)A(x)$$

ahol $A(x)$ egy monadikus predikátum. Ennek szándékaink szerint a jelölete (faktuális értéke) a következő praciálisan értelmezett függvény:

$$D : \{\{a\} \mid a \in M\} \to M,\ \{a\} \mapsto a$$

Vegyük észre, hogy ez egy olyan függvény, mely invariáns a tárgyalási univerzum permutációjára nézve, ugyanis

$$p(D(\{a\})) = p(a) = D(\{p(a)\}) = D(p(\{a\})).$$

Amit állításként tudunk megfogalmazni, hogy mi a $D(\{a\}) \in H$ metanylevi fordítású mondat átfogalmazása logikai operátorokkal. Hogy ez valóban a deskripciót tartalmazó mondat olvasata az tézis (azaz nem levezethető állítás). *Russell tézise* szerint a határozott individuumleírások

1) nem valódi nyelvi kifejezések, azaz csak kontextusban léteznek és
2) szereplésük az alábbi kontextussal helyettesítendő:

$$[(\iota x)A(x)/x]B(x) \;\equiv\; (\exists x)(A(x) \;\&\; B(x) \;\&\; (\forall y)([y/x]A(x) \supset y = x))$$

Matematikai példa. A tézist használják a matematikusok is. Tegyük fel, hogy a valós számok formális axiomatikus elméletében a nullát a következő axiómán keresztül definiáljuk:

$$(\exists y)(\forall x)(x + y = x = y + x)$$

Ekkor igazolható, hogy csak egyetlen nulla van, azaz

$$(\exists_1 y)(\forall x)(x + y = x = y + x)$$

azt, hogy a nullával szorozva minden nulla lesz a következőképpen fogalmazható meg:

$$(\forall x)(0{\cdot}x = 0) \;\equiv\; (\exists y)((\forall z)(z{+}y = z = z{+}y) \;\&\; (\forall x)(y{\cdot}x = y) \;\&\; (\forall v)([v/y](\forall z)(z{+}y = y = z{+}y) \supset v =$$

Tisztán algebrai operáció. Russell javaslata alapján, tisztán logikai az az operáció, mely egy $B(x)$ formulában az x helyére az $(\iota x)A(x)$ deskripciót helyettesíti. Ez a tézisből következik, amennyiben a helyettesítés is tisztán logikai operáció. De az, mert

$$[y/x]A(x) \;\equiv\; (\exists x)(x = y \;\&\; A(x))$$

A jelenlegi francia király problémája. Russell szerint a deskripciók a következők miatt nem valódi nevek. Senki se mondaná, hogy a jelenlegi francia király kopasz, mert ha az lenne, akkor a jelenlegi francia király megtalálható lenne a kopaszok halmazában, ahol viszont nem található meg. De az sem igaz, hogy a jelenlegi francia király nem kopasz, mert a nem kopaszok között sem fordul elő a jelenlegi francia király. Ám, ekkor a

$$\text{„A jelenlegi francia király kopasz”} = [(\iota x)F(x)/x]B(x) = B((\iota x)F(x))$$

$$\text{„A jelenlegi francia király nem kopasz”} =\sim [(\iota x)F(x)/x]B(x) =\sim B((\iota x)F(x))$$

mondatok közül mindkettő hamis, ami ellentmond az ellentmondásmentesség törvényének. Russell a fenti átfogalmazással oldotta meg az iménti paradoxont. A deskripciók szerinte ugyanis nem igazi nevek, és az alábbiak közül egyik olvasat sem rejt magában ellentmondást:

Szűk hatókörű negáció: $\overset{\downarrow}{\sim} [(\iota x)F(x)/x]\overset{\downarrow}{B}(x) \;\equiv\; (\exists x)(F(x) \;\&\; \sim B(x) \;\&\; (\forall y)([y/x]F(x) \supset y = x))$

Tág hatókörű negáció: $\overset{\downarrow}{\sim} \overbrace{[(\iota x)F(x)/x]B(x)}^{\downarrow} \equiv \sim (\exists x)(F(x) \;\&\; \sim B(x) \;\&\; (\forall y)([y/x]F(x) \supset y = x))$

A Waverley szerzőségének problémája. Egy Frege által felvetett és Russell által átfogalmazott probléma a következő.

„IV. György király szeretné tudni, hogy vajon Scott-e a Waverley szerzője.”

mivel tujuk, hogy Sir Walter Scott a Waverley szerzője, ezért az azonosság miatt és a Leibniz-törvény miatt a fenti mondat ugyanaz mint:

„IV. György király szeretné tudni, hogy vajon Scott-e Scott.”

Látható, hogy a két mondat nem ugyazat jelenti. A probléma feloldása Russell szerint, hogy az „a Waverley szerzője” nem helyettesítható Scott-tal, mert az előbbi nem valódi név. Valójában ugyanis a szóban forgó mondat így szól:

„IV. György király szeretné tudni, hogy vajon létezik-e olyan ember, aki azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy szerzője a Waverleynek, egyetlen szerzője a Waverleynek és Scottal azonos.”

Strawson kritikája. Strawson szerint a nem létező dolgokra utaló deskripciót tartalmazó mondat se nem igaz, se nem hamis. Viszont a nem egyértelműen utaló (inkomplett) deskripció „Az asztalt könyvek borítják.” (amikor több asztal is van) igaz lehet, ha a beszélő egy konkrét asztalra gondol közben, vagy a szövegkörnyezet ezt egyértelműsíti.

Donnellan kritikája. A deskripciót tartalmazó mondatoknak lehet *attributív* és *referenciális* olvasata. A „Smith gyilkosa őrült.” mondat mást jelent, ha a felügyelő a brutálisan meggyilkolt Smith holttestére nézve mondja, és mást jelent, ha a hamisan Smith meggyilkolásával megvádolt Jones-t magában motyogni látó riporter mondja. Az előbbi attributív és ugyanaz az értelme, mint Russellé az utóbbi referenciális és Jonesra vonatkozik.

3.3.2.1. Az azonosság problémája. Frege eredeti problémája a következő volt.

„A Hajnalcsillag (Phoszphorosz) a Nap által megvilágított égitest.”
„Az Alkonycsillag (Heszperosz) a Nap által megvilágított égitest.”

Mivel mindkettő név a Vénusz bolygóra vonatkozik, azért ezek egyenlők. Mégis, ha valaki nincs tisztában ezzel, az gondolhatja, hogy az első igaz, a második nem. Vagyis a két név jelölete ugyan azonos, de jelentése nem. Miközben a

„Hajnalcsillag azonos a Hajnalcsillaggal.”

mondat analitikusan igaz.

A fenti problémára egy válasz *a nevek Frege–Russell-féle jelentéselmélete* vagy *leíráselmélet.* Eszerint a nevek valójában individuumleírások rövidítései (pl. a Hajnalcsillag az égen utoljára látható csillag, az Alkonycsillag az égen először feltűnő csillag). Ennek megfelelően az $a = a$ mondat analitikus (matematikai szóhasználattal triviális) igazságot fejez ki, míg a „Heszperosz azonos Phoszphorosszal” igazságát csak empirikus kutatással lehet megállapítani, és – a kanti osztályozás – szerint egy poszteriori állítás nem lehet analitikus. Az elmélet szerint a nevek jelentése a definiáló fogalmuk, ami miatt valóban van különbség a fenti két kijelentés között.

3.3.2.2. Kaplan és a demonstratívumok. Már Strawson és Donnellan is pedzegette az inklomplett vagy üres leírások referáló tulajdonságát, azaz, hogy vagy a kontextusból adódóan vagy a beszélő szándékai miatt komplettté tehetők az inkomplett és referálók lehetnek az üres leírások. A demonstratívumok ennek megoldására tett kísérlet. Az én, te, ő, az, ... szavak kijelölnek egy dolgot, a leírások pedig szintén rámutatási aktussal rögzítik a referenciát. (A demonstratív „az" a kaplani dthat.)

3.3.2.3. Descartes modális érve

$$\frac{\text{El tudom képzelni, hogy én létezem, de a testem nem.}}{\text{Én nem vagyok azonos a testemmel.}}$$

Ennek az érvnek az érvényességét a lehetséges világok szemantikája alapján vizsgáljuk meg. Az „el tudom képzelni" intenzionális funktort „lehetségesnek" fordítjuk. Emlékeztetünk arra hogy lehetséges világ egy világleírás, azaz ugyanazok az objektumok, csak mások a tulajdonságaik.

$$\frac{\Diamond \sim (\exists x)(x = \text{ a testem})}{\text{én} \neq \text{a testem}}$$

A Frege–Russell-jelentéselmélet szerint ez nem érvényes érvelés, mert attól még, hogy a testem egy lehetséges világban nem létezik, attól még az aktuális világban lehet egyenlő a testemmel. Ellenben érvényes az alábbi gyengített formában:

$$\frac{\Diamond \sim (\exists x)(x = \text{ a testem})}{\sim \Box \text{én} = \text{a testem}}$$

Másik ellenpélda: lehetett volna, hogy Csukás István nem haszálja azt a kifejezést, hogy „a híres egyfejű". Ebből nem következik, hogy a mi aktuális világunkban a Süsü ne lenne a híres egyfejű.

Kaplan demonstartívumaival. A demonstratívum az aktuális világban jelöli ki a jelöletet, ami ott a jelölet, az az összes lehetséges világban is az:

$$\frac{\Diamond(\exists z)(\text{z én vagyok})\& \sim (\exists x)(x = (\text{ez az } y)(y \text{ a testem})}{(\text{ez az } z)(z \text{ én vagyok}) \neq (\text{ez az } y)(y \text{ a testem})}$$

Ekkor az érv érvényes. Ugyanis, ha az aktuális világban ugyanarra mutattam, akkor ha az álomvilágban nincs test, akkor én sem vagyok. Tehát másra mutattam. Csak ez lehet tehát, hogy az én és a testem különbözik. A zavart az okozhatja, hogy nehéz úgy rámutatnom az énemre és a testemre, hogy az ne ugyanaz legyen. Ekkor a rámutatási aktusok összekeverednek, inkomplett demonstratívumokkal állunk szemben, episztemológiai a probléma jelenik meg.

Kripke, oksági-történeti elmélet. Kripke szerint a nevek *merev jelölők,* azaz a nevek jelölete nem változik világról világra. Ez amiatt van, hogy a nevek egy keresztelési eljárásban kapják a jelöletüket, éspedig ekkor a névhez egy referenciát rendel valaki. Később ez a használat öröklődik és a név arra referál, amire a névadó referált. Ennek fényében az érv a következő alakot ölti.

$$\frac{\Diamond \sim (\exists x)(x = \text{a testem})}{\Box \text{én} \neq \text{a testem}}$$

És ez egy érvényes következtetés. Az első kontraintuitív érzésünk a merev jelölők feltételezésével intuitívvá, bár talán túl erőssé válik. A kérdés, hogy miért érezzük ezt?

3.3.2.4. Kripke megoldása Frege problémájára. Kripke szerint Heszperosz és Phoszphorosz azonossága szükségszerű (analitikus) annak ellenére, hogy aposzteriori igazsággal van dolgunk. Kant tiltása nem megalapozható, ha analitikusságon szükségszerűséget értünk. Nincs tehát jelentésbeli eltérés a „Heszperosz az Phoszphorosz" és a „Heszperosz az Heszperosz" mondatok között, Frege paradoxona feloldódik az oksági történeti elméletben. A feloldás centrális lépése, hogy komolyan vegyük, hogy az azonosság nem nevek közötti reláció, hanem dolgok közötti. Ahogy a $0 < 1$ sem nevek közötti reláció, hanem a jelölt dolgok közötti reláció.

3.4. Hilbert szimbólumai

Hilbert a következő operátorokat vezette be a logika nyelvébe.

3.4.0.1. A határozott individuumleírás:

$$(\iota x)A$$

Ennek szándékolt jelentése: **az a dolog, ami** A **tulajdonságú**. Ezt a termet csak akkor lehet használni ennek a jelentésnek megfelelő értelemben, ha teljesül a

$$\vdash (\exists x)(A \,\&\, (\forall y)([y/x]A \supset y = x))$$

szemantikai (értsd: bizonyításelméleti jelentéselméleti) feltétel, ellenkező esetben $(\iota x)A$ nem fejezi ki a szándékolt jelentését. Ha ez az egzisztenciafeltétel teljesül, akkor a rá vonatkozó axiómát fel kell venni az axiómák közé

$$[(\iota x)A/x]A \,\&\, (\forall y)([y/x]A \supset y = (\iota x)A)$$

amely tehát rögzíti, hogy mi a $(\iota x)A$ bizonyításelméleti jelentése és innentől legitim módon, azaz a szándékolt jelentésével összhangban használható a term.

3.4.0.2. A határozatlan individuumleírás:

$$(\eta x)A$$

Ennek szándékolt jelentése: **egy dolog, amely A tulajdonságú**. Ezt a termet csak akkor lehet használni ennek a jelentésnek megfelelő értelemben, ha teljesül a

$$\vdash (\exists x)A$$

feltétel, ellenkező esetben $(\eta x)A$ nem fejezi ki a szándékolt jelentését. Ha ez az egzisztenciafeltétel teljesül, akkor a rá vonatkozó axiómát fel kell venni az axiómák közé

$$[(\eta x)A/x]A$$

amely tehát rögzíti, hogy mi a $(\eta x)A$ bizonyításelméleti jelentése és innentől legitim módon, azaz a szándékolt jelentésével összhangban használható a term.

Világos, hogy $(\iota x)A$ és $(\eta x)A$ modellelméleti szemantikailag csak parciálisan értelmezett operátorok lehetnek és csak akkor használhatók a szándékolt módon, amikor az egzisztencia-unicitás formulájuk illetve az egzisztenciaformulájuk bizonyítottak. Hilbert bevezetett még két operátort, melyeknek az egzisztenciafeltétele klasszikusan mindig teljesül és modellelméleti faktuális értékük is mindig értelmezettek (értelmezettek tudnak lenni).

3.4.0.3. A feltételes határozatlan individuumleírás

$$(\varepsilon x)A$$

szándékolt jelentése: **egy olyan dolog, mely A tulajdonságú, ha van egyáltalán A tulajdonságú dolog.** Egzisztenciaformulája ez *lenne:*

$$\vdash_{\mathrm{C}} (\exists x)(((\exists y)[y/x]A) \supset A)$$

ami a klasszikus logikában triviálisan teljesül. Valóban! Modellelméleti szemantikailag igazolva. Tegyük fel, hogy van A tulajdonságú x. Ekkor $(\exists y)[y/x]A$ igaz és A is azaz $(\exists y)[y/x]A) \supset A$ is igaz, azaz $(\exists x)(((\exists y)[y/x]A) \supset A)$ igaz. Ha nincs A tulajdonságú x, akkor $(\exists y)[y/x]A$ hamis és abból minden következik.

Intuicionista logikában azonban nem levezethető a fenti állítás. Ha felvesszük az alábbi axiómát, melyet **az első epszilon axiómának** nevezünk

$$(\varepsilon_{\mathrm{I}}) \qquad (\exists x)A \supset [(\varepsilon x)A/x]A$$

akkor a $(\varepsilon x)A$-t a saját szándékolt jelentésének megfelelően használatjuk, és ennek nincs semmi szemantikai előfeltétele, pusztán az axióma megkövetelésével adódik.

Megjegyezzük, hogy ha bővítjük a nyelvet $(\varepsilon x)A$-vel és feltesszük az intuicionista logikában $(\varepsilon_{\mathrm{I}})$-t, akkor az egzisztenciális kvantor következtetési szabályai miatt teljesülni fog:

$$\vdash_{\mathrm{I}} (\exists x)A \equiv [(\varepsilon x)A/x]A$$

3.4.0.4. Hilbert-féle τ operátor

$$(\tau x)A$$

szándékolt jelentése: **egy olyan dolog, amely ha A tulajdonságú, akkor minden dolog A tulajdonságú** egzisztenciaformulája ez lenne:

$$\vdash_{\mathrm{C}} (\exists x)(A \supset (\forall y)[y/x]A)$$

Ami szintén triviálisan teljesül a klasszikus logikában, de az intuicionistában nem. És a hozzá tartozó axióma, **transzfinit axióma,**

$$[(\tau x)A/x]A \supset (\forall x)A$$

És persze

$$\vdash_{\mathrm{I}} [(\tau x)A/x]A \equiv (\forall x)A$$

3.5. A Heyting-aritmetika és Hilbert két epszilon axiómája

Az alábbi két tétel alapvető jelentősségű az *intuicionista aritmetikára,* azaz a *Heyting-aritmetikára* vonatkozólag. A Peano-(Heyting-)aritmetika (egy) nyelve: a konstans nulla, a rákövetkezést egyváltozós függvényjele, és két kétváltozós függvényjel (összeadás, szorzás)

$$0 \qquad S(\;) \qquad + \qquad \cdot$$

Axiómái:

$$(\forall x)(\forall y)(S(x) = S(y) \;\equiv\; x = y), \quad (\forall x)(S(x) \neq 0),$$
$$(\forall x)(x + 0 = x), \quad (\forall x)(\forall y)(x + S(y) = S(x + y)),$$
$$(\forall x)(x \cdot 0 = 0), \quad (\forall x)(\forall y)(x \cdot S(y) = (x \cdot y) + x)$$
$$(\;[0/x]A \;\&\; (\forall x)(A \supset [S(x)/x]A)\;) \;\supset\; ((\forall x)A)$$

Ez a klasszikus logikával ellátva a Peano-aritmetikát (PA-t) adja, az intuicionista logikával a Heyting-eritmetikát (HA-t).

3.5.0.1. Megjegyzés. Most két intuicionista logikai tételt igazolunk, amint bevezetjük az epszilon szimbólumokat és először az első majd mindkét epszilon axiómát. I+ε az első epszilon axiómával bővített intuicionista logikát jelöli. A tételek azt állítják, hogy ha HA-ban felvesszük az első epszilon axiómát, akkor ez HA-t majdnem klasszikussá teszi (mindegyik De-Morgan-azonosság teljesülni fog). Ha pedig a második epszilon axiómát (extzenzionalitási axiómát), azaz a

$$(\forall x)(A \equiv B) \supset (\varepsilon x)A = (\varepsilon x)B$$

sémát is felvesszük HA axiómái közé, akkor ez teljesen klasszikussá, azaz PA-vá teszi HA-t. Nincs tehát extenzionális epszilon kalkulusra épített HA, csak PA.

3.5.1. Tétel

– *Bell* – Ha a és b konstansjelek, B, C formulák, akkor

$$\{(\forall x)(x = a \vee x \neq a), a \neq b\} \vdash_{\mathrm{I}\varepsilon} (\sim (B \,\&\, C)) \supset ((\sim B) \vee (\sim C))$$

3.5.1.1. Bizonyítás. Legyen

$$A(x) = (x = a \,\&\, B) \vee (x \neq a \,\&\, C)$$

Ekkor

$$\vdash_{\mathrm{I}} A(a) \equiv B$$

$$\vdash_{\mathrm{I}} A(b) \equiv C$$

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim A \;\equiv\; ((x = a \supset \sim B) \;\&\; (x \neq a \supset \sim C))$$

Ez utóbbi amiatt, hogy $\vdash_{\mathrm{I}} \sim A \;\equiv \sim (x = a \,\&\, B) \,\& \;\sim (x \neq a \,\&\, C)$. Ebből indirekt bizonyítással jön ki midkét irány. Most, mivel a kontrapozíció a következő formában igaz: $(E \supset F) \supset (\sim F \supset \sim E)$, ezért igaz $(E \equiv F) \supset (\sim E \equiv \sim F)$ is. Axióma az, hogy

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim A(a) \equiv \sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim A(b) \equiv \sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

Az alábbi pedig a kontrapozíció miatt igaz:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim A((\varepsilon x) \sim A) \equiv \sim B$$

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim A((\varepsilon x) \sim A) \equiv \sim C$$

amiből nekünk most csak ez kell:

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim B \supset \sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

$$\vdash_{\mathrm{I}} \sim C \supset \sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

Most $\sim$-et megint nem törölhetünk, így ebből következik

$$\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim B$$

$$\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim C$$

azaz

$$\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim B \;\&\; \sim\sim C$$

azaz

$$\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim (B \;\&\; C)$$

$$\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim (B \;\&\; C)$$

Amit újra kontraponálva

$$\sim\sim\sim (B \;\&\; C) \vdash_{\mathrm{I}} \sim\sim\sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

azaz

$$\sim (B \mathbin{\&} C) \vdash_{\mathrm{I}} \sim A((\varepsilon x) \sim A)$$

Most behelyettesítjük $\sim A(x)$-be $(\varepsilon x) \sim A$-t, és kapjuk:

$$\sim (B \mathbin{\&} C) \vdash_{\mathrm{I}} ((\varepsilon x) \sim A = a \supset \sim B) \mathbin{\&} ((\varepsilon x) \sim A \neq a \supset \sim C)$$

Mivel pedig tudjuk, hogy

$$\vdash_{\mathrm{I}} (\varepsilon x)(\sim A(x)) = a \ \vee \ (\varepsilon x)(\sim A(x)) \neq a$$

ezért

$$\sim (B \mathbin{\&} C) \vdash_{\mathrm{I}} (\sim B) \ \vee \ (\sim C)$$

3.5.1.2. Extenzionalitás. A másik érdekes eredmény az extenzionalitási axióma következménye, mely az alábbi. **A második epszilon axióma,** vagy **extenzionalitási axióma**

$$(\forall x)(A \equiv B) \supset (\varepsilon x)A = (\varepsilon x)B$$

I+ε + Ext jelöli az első és második epszilon axiómával bővített intuicionista logikát.

3.5.2. Tétel

– *Bell* – Ha a és b konstansjelek és $A(\underline{x})$ akárhány változós formula, akkor

$$\{a \neq b\} \vdash_{\mathrm{I}+\varepsilon+\mathrm{Ext}} A(\underline{x}) \vee \sim A(\underline{x})$$

3.5.2.1. Bizonyítás. Legyen valamely nem $\underline{x}$-beli y változóra

$$B(\underline{x}, y) = (y = a) \vee A(\underline{x})$$

$$C(\underline{x}, y) = (y = b) \vee A(\underline{x})$$

Belátjuk, hogy az $A(\underline{x})$ feltétel mellett $B(\underline{x}, y)$ és $C(\underline{x}, y)$ az y-ban ekvivalensek. T. f., hogy

$$A(\underline{x}) \vdash (y = a) \vee A(\underline{x})$$

ekkor persze

$$A(\underline{x}) \vdash (y = b) \vee A(\underline{x})$$

és fordítva. Tehát

$$A(\underline{x}) \vdash (\forall y)(((y = a) \vee A(\underline{x})) \equiv ((y = b) \vee A(\underline{x}))$$

Ekkor az extenzionalitási axióma miatt, azaz

$$\vdash (\forall y)(B(\underline{x}, y) \equiv C(\underline{x}, y)) \supset (\varepsilon y)B = (\varepsilon y)C$$

miatt

$$A(\underline{x}) \vdash (\varepsilon y)B = (\varepsilon y)C$$

azaz kontrapozícióval:

$$(\varepsilon y)B \neq (\varepsilon y)C \vdash \sim A(\underline{x})$$

Világos, hogy a és b teljesíti B-t és C-t, azaz

$$\vdash B(\underline{x}, a)$$

$$\vdash C(\underline{x}, b)$$

Ezért az epszilon axiómák miatt

$$\vdash [(\varepsilon y)B/y]B(\underline{x}, y)$$

$$\vdash [(\varepsilon y)C/y]C(\underline{x}, y)$$

Azaz

$$\vdash ((\varepsilon y)B = a \ \vee \ A(\underline{x})) \,\&\, ((\varepsilon y)C = b \ \vee \ A(\underline{x}))$$

Ez a disztributív szabály miatt

$$\vdash ((\varepsilon y)B = a \,\&\, (\varepsilon y)C = b) \ \vee \ A(\underline{x})$$

Esetszétválasztással haladunk tovább

$$\vdash A(\underline{x})$$

esetén

$$\vdash A(\underline{x}) \vee \ \sim A(\underline{x})$$

$$\vdash (\varepsilon y)B = a \,\&\, (\varepsilon y)C = b$$

esetén pedig az egyenlőség axiómái miatt

$$\vdash (\varepsilon y)B \neq (\varepsilon y)C$$

Ellenkező esetben ellentmondásra jutnánk. Tehát

$$\vdash \sim A(\underline{x})$$

amiből

$$\vdash A(\underline{x}) \vee \ \sim A(\underline{x})$$

3.5.2.2. Megjegyzés. HA-ban igazolható minden a termre, hogy $(\forall x)(x = a \vee x \neq a)$, ezt úgy mondjuk, hogy az $x = a$ formula *eldönthető az intuicionista logikában.* Továbbá minden a termre HA $\vdash a \neq S(a)$.

Mindennek van egy lényeges következménye. Bell fenti két tétele HA-ban érvényes, ha bevezetjük HA-ba az epszilon axiómákat. Éppen ezért *HA átmegy PA-ba, ha a nyelvet kvantoreliminálják az epszilon axiómákkal.*

3.6. Primitív rekurzív számelméleti függvények

A következőkben definiáljuk egyfelől, hogy PA-ban melyek a primitív rekurzív termek ($t(v_1 \dots v_n)$-ek, melyek a névkonstansokból és a rákövetkezésből iterációval és helyettesítéssel definiálhatóak), és a primitív rekurzív számelméleti függvények (melyek a reprezentálhatóak PA-ban primitív rekurzív módon).

A továbbikaban

$$t(v_1 \dots v_n)$$

jelöljük az olyan t termeket, melyek szabad változói a $v_1, \dots, v_n$ közül kerülnek ki, de nem feltétlenül mindegyik.

3.6.1. Definíció

Tetszőleges $\Gamma \subseteq \mathrm{Sent}(\mathrm{PA})$ mondatosztály és $t(v_1 \dots v_n)$ term között definiálunk egy

$$\Gamma :_{\mathrm{PR}} t(v_1 \dots v_n)$$

relációt, melyre úgy fogunk utalni, hogy a Γ feltételekkel $t(v_1 \dots v_n)$ primitív rekurzív term. Ennek levezetési szabályai a következők:

$$\frac{}{\Gamma :_{\mathrm{PR}} k} \qquad \frac{}{\Gamma :_{\mathrm{PR}} S(v_i)}$$

ahol k kannonikus term, vagyik az

$$\mathrm{KT} = \{0, S(0), S(S(0)), \dots\}$$

halmaz eleme, és v_i tetszőleges változó (a konstansok primitív rekurzív termek, a rákövetkezés primitív rekurzív term).

$$\frac{\Gamma :_{\mathrm{PR}} r(v_2, \dots, v_n) \qquad \Gamma :_{\mathrm{PR}} s(v_1, \dots, v_{n+1})}{\Gamma \cup \Gamma_{r,s,t} :_{\mathrm{PR}} t(v_1 \dots v_n)}$$

ahol v_i-k tetszőleges változók, $r(v_2, \dots, \dots v_n)$ és $s(v_1, \dots, v_{n+1})$ termek,

$$\begin{aligned} \Gamma_{r,s,t} = \{ \quad & (\forall v_2) \dots (\forall v_n)\, t(0, v_2, \dots, v_n) = r(v_2 \dots v_n), \\ & (\forall v_2) \dots (\forall v_n)\, t(S(k), v_2 \dots v_n) = s(k, v_2, \dots, v_n, t(k, v_2, \dots, v_n))\}_{k \in \mathrm{KT}} \end{aligned}$$

és $\mathrm{KT} = \{0, S(0), S(S(0)), \dots\}$

3.7. A Hilbert-program és módszerei

3.7.1. Kvantormentes aritmetika

1920 nyarán vette kezdetét az a kutatási program, melynek célja a matematika ellentmondásmentességének igazolása volt ennek első eredménye a propozicionális logika ellentmondásmentességének igazolása, majd az aritmetika egy igen gyenge elméletének ellentmondásmentes megalapozása. Ezt a jellegzetes elméletet mutatjuk be most. Tekintsük a következő nyelvet:

$$\Rightarrow \qquad = \qquad 1 \qquad +$$

Termek: 1, $t+s$, ha t, s termek.
Formulák: $t = s$, ha t, s termek, $A \Rightarrow B$, ha A, B formulák.

Axiómák:

$$1 = 1$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} \;\Rightarrow\; \mathbf{t} + 1 = \mathbf{s} + 1$$

$$\mathbf{t} + 1 = \mathbf{s} + 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{t} = \mathbf{s}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} \;\Rightarrow\; (\mathbf{t} = \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{s} = \mathbf{r})$$

(itt $\mathbf{t}, \mathbf{s}, \mathbf{r}$ term kategóriájú sémaváltozók)

Következtetési szabály, a modusz ponensz:

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

Ez a rendszer ellentmondásmentes, ugyanis az $1+1 = 1$ formula nem levezethető. Legyen ugyanis egy A formula *korrekt,* a következő esetben: 1) ha A elemi formula és $\mathbf{t} = \mathbf{t}$ alakú korrekt, ha nem $\mathbf{t} = \mathbf{t}$ alakú, akkor inkorrekt. 2) Ha A azonos egy $B \Rightarrow C$ alakú formulával, akkor A legyen inkorrekt, ha B korrekt és C inkorrekt, a többi esetben korrekt:

B	C	$B \Rightarrow C$
korrekt	korrekt	korrekt
korrekt	inkorrekt	inkorrekt
inkorrekt	korrekt	korrekt
inkorrekt	inkorrekt	korrekt

Most ellenőrzéssel beláthatjuk, hogy minden axióma korrekt, továbbá, hogy a MP megőrzi a korrektséget. Következésképpen minden levezethető mondat korrekt. Ha tehát van inkorrekt mondat, az nem levezethető. Márpedig az $1 + 1 = 1$ inkorrekt.

Látható, hogy itt az értékelés szintaktikus (grafikus) kritériumok alapján ment, tehát függetlenül attól, hogy mi a szándékolt jelentése a mondatnak. Pl. $(1+1)+1 = 1+(1+1)$ sem korrekt (így nem is levezethető) pedig igaznak gondoljuk. Ez a formális módszer alapvetőnek mondható a Hilbert-programban, ahol *formálison* pontosan ezt a nem szemantikust, jelentésmentes értékelési módot értjük.

3.7.1.1. Megjegyzés. Az abszolút konzisztenciabizonyításoknak nem csak ez az egyetlen stratégiája. Az intuicionista logika normalizációs tételének egy következménye a *részformula tétel,* mely szerint a intiucionista logikában egy A formula Γ-ból való normál levezetése olyan, hogy az abban előforduló formulák vagy az A-nak vagy a Γ elemeinek részformulái. Következésképpen, ha van $\curlywedge$-nek levezetése ($\vdash_{\mathrm{I}} \curlywedge$), azaz van normál levezetése, akkor ennek levezetése az egyelemű ($\curlywedge$) sorozat. Ez viszont nem bizonyítás.

Mivel a bizonyításelméletnek van kiterjedt szemantikája (jelentéselmélete) ezért egyáltalán nem mondhatjuk, hogy a normalizációra hivatkozó ellentmondásmentességi bizonyítások formálisak lennének a fenti értelemeben, hiszen a normalizációs tétel világos jeletéssel bír (éspedig ez a következő: mivel a bevezetési szabályok részben igazolják a kiküszöbölési szabályokat, ezért szükségtelen inverzió (E-szabályt megelőző I-szabály) szereplése a bizonyításokban).

3.7.2. A Bourbaki-logika nyelve és elmélete

3.7.2.1. A Hilbert-féle epszilon szimbólum formális nyelvi alkalmazásai Ugyan a Hilbert-féle epszilon szimbólum a konzisztenciabizonyítások eszközeként lett bevezetve, számos alkalmazására lelhetünk a matematikai logika (choice-logic), a matematika formalizációja (Bourbaki-féle formális nyelv), a nyelvészet (donkey sentences), nyelvfilozófia (határozatlan individuumleírások) területein. Mindenképpen érdekes (és bizonyításelméletileg hasznos) nyelvi könyezetbe ágyazza a halmazelméletet, ha a formalizációját a Bourbaki-féle formális nyelvén prezentáljuk.

3.7.2.2. Definíció A logikai jelek és segédszimbólumok ebben a nyelvben

$$\vee \qquad \neg \qquad = \qquad \varepsilon \qquad \Box$$

itt $\Box$ nem a szükségszerűség jele, hanem egy grafikus manipulációkban használandó szmbólum. Ezeken kívül vannak változók: $x, y, z, \ldots,$ relációjelek (predikátumjelek): $r, p, q, \ldots,$ függvényjelek $f, g, s, \ldots$ ez utóbbi kettőhöz egy természetes szám is rendelve van, ami a reláció- ill. függvényjel aritását, változószámát adja. A termek és formulák egyszerre vannak definiálva:

1. a változók és konstansok (nulla változós függvényjelek) termek.
2. ha $t_1, \ldots, t_n$ termek, akkor egy n változós f függvényjellel

   $$ft_1, \ldots, t_n$$

   term (atomi termek). Jele: $f(t_1, \ldots, t_n)$.
3. ha $t_1, \ldots, t_n$ termek, akkor egy n változós r relációjellel

   $$rt_1, \ldots, t_n$$

   formula (atomi formula), jele $r(t_1, \ldots, t_n)$, ha t, s term, akkor

   $$= ts$$

   formula (atomi formula), jele $t = s$

4. ha A, B formulák, akkor
$$\neg A \qquad \vee AB$$
formulák, jeleik rendre $\neg A$ és $A \vee B$

5. ha A formula és x változó, akkor az a szimbólumsor, melyet úgy kapunk, hogy az A-ban az x összes szereplése helyére a $\Box$-ot tesszük, az így nyert formula elejére a ε-t helyezzük és ezt a karakterlánc fölött haladó vonalla az imént behelyettesített $\Box$-okkal összekötjük az egy term. Jele: $(\varepsilon x)A$.

További metajelölések, ha A, B formulák:
$$A \wedge B := \neg \vee \neg A \neg B$$
$$A \Rightarrow B := \vee \neg AB$$
$$A \Leftrightarrow B := (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$$
a zárójelek metanyelvi szimbólumok és nem tárgynyelviek.
Helyettesítés: $[t/x]A$ az a kifejezés, melyet úgy nyerünk, hogy az A-ban az x helyére mindenhol egyszerre a t termet tesszük (A lehet term is). Az egyszerre kitételnek akkor van jelentőssége, ha t-ben is szerepel x.
$$(\exists x)A := [(\varepsilon x)A/x]A$$
$$(\forall x)A := \neg[(\varepsilon x)(\neg A)/x](\neg A)$$
Példák. Ha r, p kétváltozós relációjelek, akkor
$$(\varepsilon x)(r(x,y) \vee p(x,z)) \overset{\circ}{=} \overline{\varepsilon \vee p\Box y r\Box}\, z$$
$$(\exists x)(r(x,y)) \overset{\circ}{=} [(\varepsilon x)(rxy)/x](rxy) \overset{\circ}{=} r\overline{\varepsilon r\Box}\, yy$$
Az egy epszilonos szereopléses kifejezések egyszerűen rekonstruálhatók. A két epszilonos szereplésesek már problémát jelenthetnek:
$$(\exists x)p(x,x) \overset{\circ}{=} p\overline{\varepsilon p\Box\Box}\,\overline{\varepsilon p\Box\Box}$$
lehetne-e rekonstruálni ezt két változóval:
$$p(\varepsilon y)(pyy)(\varepsilon z)(pzz)$$
Igen, így is keletkezhetett ez a formula, de ez azonos, azaz minden tekintetben ugyanak, mint $p(\varepsilon y)(pyy)(\varepsilon y)(pyy)$. A metajelölés azt sugallja, hogy a két formula nem azonos, pedig az.
$$(\forall y)(\exists x)(r(x,y)) \overset{\circ}{=} \neg\neg r\varepsilon r\Box\varepsilon\neg r\varepsilon r\Box\Box\Box\,\varepsilon\neg r\varepsilon r\Box\Box\Box$$
Ennek is lehet más rekonstrukciója, de attól még a két formula azonos. A $(\forall y)(\exists x)(r(x,y))$ nem a formula kanonikus rekonstrukciója (a formula-term definíció értelmében), hanem egy grafikus manipuláció, mely azonosat ad egy kanonikus rekonstrukcióval.

3.7.3. A Bourbaki-logika logikai axiómái és levezetés

Hilbert–Ackermann-axiómarendszer. Minden A, B, C formulára axióma az alábbi összes formula

$$(A \vee A) \Rightarrow A$$

$$A \Rightarrow (A \vee B)$$

$$(A \vee B) \Rightarrow (B \vee A)$$

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((C \vee A) \Rightarrow (C \vee B))$$

Az első epszilon axióma (transzfinit axióma). Minden t termre, x változóra és A formulára axióma az alábbi összes formula

$$([t/x]A) \Rightarrow (\exists x)A$$

A második epszilon axióma (extenzionalitási axióma). Minden x változóra, A és B formulára axióma az alábbi összes formula

$$((\forall x)(A \Leftrightarrow B)) \Rightarrow ((\varepsilon x)A = (\varepsilon x)B)$$

A Leibniz-szabály. Minden t és s termre, x változóra és A formulára axióma az alábbi összes formula

$$(t = s) \Rightarrow (([t/x]A) \Leftrightarrow ([s/x]A))$$

A fenti hét formulaosztály *formulaséma,* azaz a benne szereplő jelek A, B, C, t, s, x sémaváltozók és bármelyiket lecserélve egy azonos kategóriájú másikra ugyanúgy a formulaosztályon belüli formulát kapunk.

Levezethető egy A formula egy Γ formulahalmazból, ha a Hilbert-féle levezetési rendszerek definíciója értelmében a modus ponensszel

$$\frac{A \qquad A \Rightarrow B}{B}$$

, mint egyetlen következtetési szabállyal levezethető.

3.7.3.1. Megjegyzendő, hogy *nem* levezetési szabály a rendszerben az univerzális generalizáció

$$\frac{A}{(\forall x)A}$$

(a $\forall$ bevezetési szabálya), mert nem is mondható ki: nincsenek szabad és kötött változók.

A centrális fogalom a formulaosztályok (formulasémák) *helyettesítés-invarianciája.* Az S formulaséma helyettesítés-invariáns ha minden x változó, t term és A formula esetén, ha A az S eleme, akkor $[t/x]A$ szintén S eleme. Ez a szemantikában is lényeges szerepet fog játszani. Fáradtságos munkával kimutatható, hogy a fenti axiómasémák helyettesítés-invariánsak. Ehelyett két, a kvantorokkal kapcsolatos nagyon érdekes tételt említünk.

3.7.3.2. Az egzisztenciális kvantor epszilonos alaptulajdonsága. Legyen Γ formulahalmaz, A formula és x változó.

$$\Gamma \vdash (\exists x)A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ha } \textit{van} \text{ olyan } t \text{ term, amivel } \Gamma \vdash [t/x]A$$

Ugyanis, visszafelé az első epszilon axióma miatt igaz, odafelé pedig a $(\exists x)A \overset{\circ}{=} [(\varepsilon x)A/x]A$ definíció miatt triviális.

3.7.3.3. Az univerzális kvantor epszilonos alaptulajdonsága. Legyen Γ formulahalmaz, A formula és x változó.

$$\Gamma \vdash (\forall x)A \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{ha } \textit{minden } t \text{ termre } \Gamma \vdash [t/x]A$$

Tudjuk $(\forall x)A \overset{\circ}{=} [(\varepsilon x)(\neg A)/x]\neg\neg A$, ami a kettős tagadás törvénye miatt ekvivalens $[(\varepsilon x)(\neg A)/x]A$-val. Tehát jobbról balra, ha minden termre $\Gamma \vdash [t/x]A$, akkor $\Gamma \vdash [(\varepsilon x)(\neg A)/x]A$-ra is, azaz $\Gamma \vdash (\forall x)A$. Balról jobbra. Axióma, hogy minden t-re $[t/x]\neg A \Rightarrow (\exists x)\neg A$, azaz $[t/x]\neg A \Rightarrow [(\varepsilon x)(\neg)/x]\neg A$. De a De-Morgan-szabály miatt ekkor $\vdash \neg[(\varepsilon x)(\neg A)/x]\neg A \Rightarrow [t/x]\neg\neg A$, azaz a kettős tagadás törlése miatt $\vdash \neg[(\varepsilon x)(\neg A)/x]\neg A \Rightarrow [t/x]A$. Kész.

3.7.4. A halmazelmélet és két részelmélete

Set_0

A halmazelmélet szimbólumai a Bourbaki-logikában:

$$\neg \qquad \vee \qquad \varepsilon \qquad \square \qquad = \qquad \in$$

Az epszilonos $\mathrm{L}_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv egyetlen nemlogikai jele tehát a kétváltozós $\in$ szimbólum. Ha t, s termek, akkor $t \in s$ olvasata:

„a t halmaz eleme az s halmaznak”.

Set_0 jelöli az $\mathrm{L}_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv feletti epszilonos predikátumkalkulust, azaz a halmazelmélet tisztán logikai részét. Ha tehát egy A formulára:

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} A$$

akkor az azt jelenti, hogy csak a logikai axiómákból levezethető A, azaz logikai tétel.

Az epszilonos halmazelmélet legfontosabb forgalma a kollektivizáló formula.

3.7.4.1. Definíció – *x-ben kollektivizáló formula* – Azt mondjuk, hogy az alábbi formula kifejezi, hogy az $\mathrm{L}_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv A formulája kollektivizáló az x változóban, ha y tetszőleges x-től különböző változó

$$(\exists y)(\forall x)(x \in y \iff A)$$

Ezt a formulát $\mathrm{coll}_x(A)$-val jelöljük. (Ez a formula azt jelenti, hogy van olyan y halmaz, mely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy y elemének lenni pontosan azt jelenti, mint az A tulajdonságnak eleget tenni. Azaz hogy van az a halmaz, mely pontosan az A-t teljesítő halmazokból áll.)

3.7.4.2. Tény. Ha t bármilyen x-től különböző term, akkor $x \in t$ mindig kollektivizáló x-ben, azaz

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} \mathrm{coll}_x(x \in t)$$

(A tétel azt mondja, ki, hogy ha t halmaz, akkor $x \in t$ mindig kollektivizáló formula az x-ben, azaz ha t halmaz, akkor mindig létezik azaz halmaz, mely pontosan azokat az elemeket tartalmazza, melyre $x \in t$ teljesül. Például a

$$(\varepsilon y)(\forall x)(x \in y \iff x \in t)$$

termmel jelölt halmaz biztosan az. Még nem tudjuk Set_0-ban, hogy ez egyenlő-e t-vel, azt csak a meghatározottsági axióma megkövetelésével derül ki.) Bizonyítás: triviális logikai tétel.

3.7.4.3. Tény – *x-ben kollektivizáló formula által meghatározott halmaz* – Ha $\vdash_{\mathsf{Set}_0}$ $\mathrm{coll}_x(A)$, akkor az $\{x \mid A\}$-val jelölt $(\varepsilon y)(\forall x)(x \in y \iff A)$ term olyan, melyre:

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} (\forall x)(x \in \{x \mid A\} \iff A)$$

(Ebben a logikában a $\{x \mid A\}$ szimbólum a nyelv része, hisz ez egy epsilon-term.) Biz.: triviális logikai tétel.

3.7.4.4. Tény – *Russell-tétel* – Ha x tetszőleges változó, akkor

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} \neg\mathrm{coll}_x(x \notin x)$$

azaz $\vdash_{\mathsf{Set}_0} \neg(\exists y)(\forall x)(x \in y \iff x \notin x)$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy valamely t termmel: $\vdash_{\mathsf{Set}_0} (\forall x)(x \in t \iff x \notin x)$. Ekkor persze x-be t-t helyettesítve:

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} t \in t \iff t \notin t$$

Azaz indirekt feltevésünk ellentmondásra vezetett.

Set_C

Jelöljük Set_C-vel azt az elmétetet az $L_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv felett, melynek egyetlen axiómasémája (a korlátozatlan komprehenzivitás axiómája) $\ulcorner \mathrm{coll}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A}) \urcorner$, azaz

$$(\exists \mathbf{y})(\forall \mathbf{x})(\mathbf{x} \in \mathbf{y} \iff \mathbf{A})$$

azaz $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ változó kategóriájú egymástól különböző sémaváltozók, $\mathbf{A}$ formula kategóriájú sémaváltozó.

3.7.4.5. Tény – *Russell-antinómia* – Set_C ellentmondásos elmélet.

Bizonyítás. $\vdash_{\mathsf{Set}_0} \neg\mathrm{coll}_x(x \notin x)$, miközben a $\mathrm{coll}_x(x \notin x)$ a korlátozatlan komprehenzivitás axiómasémájának egy esete.

Set_*

Jelöljük Set_*-gal azt az elméletet az $L_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv felett, melynek egyetlen axiómasémája (*a részhalmaz axiómaséma* vagy a korlátozott komprehenzivitás axiómasémája) a

$$(\mathsf{sub}) \qquad (\forall \mathbf{x})(\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{t})) \Rightarrow \mathrm{coll}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A})$$

(ahol $\mathbf{x}$ nem szerepel $\mathbf{t}$-ben) és egyetlen explicit axiómája (*a meghatározottsági axióma*)

$$(\mathsf{ext}) \qquad (\forall x)(\forall y)((\forall z)((z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)) \Rightarrow (x = y))$$

Az egyetlen formulából álló axiómákat *explicit axiómáknak* szoktuk nevezni, szemben az ugyanolyan alakú formulák sokaságából álló axiómasémákkal.

3.7.4.6. Tény – *Az üres halmaz létezése* Set_**-ban* –

$$\vdash_{\mathsf{Set}_*} \mathrm{coll}_x(x \neq x)$$

Bizonyítás. Ugyanis ha t tetszőleges term, amely nem tartalmazza x-et, akkor

$$(\forall x)(x \neq x \Rightarrow (x \in t)) \Rightarrow \mathrm{coll}_x(x \neq x)$$

a részhalmaz axiómaséma egy esete és mivel

$$\vdash_{\mathsf{Set}_0} (\forall x)(x \neq x \Rightarrow (x \in t))$$

ezért

$$\vdash_{\mathsf{Set}_*} \mathrm{coll}_x(x \neq x)$$

Legyen $\emptyset$ az $(\varepsilon y)(x \in y \Leftrightarrow x \neq x)$.

3.7.4.7. Tétel – *A komprehenzív rész abszolút ellentmondásmentessége* – Set_* ellentmondásmentes.

Bizonyítás. I.) A halmazelmélet nyelvének *szintaktikus értékelésének* nevezzük azt az alábbi függvényeket

$$\omega_{ii}(=) = i, \qquad \omega_{ii}(\in) = i$$
$$\omega_{ih}(=) = i, \qquad \omega_{ih}(\in) = h$$
$$(\omega_{hi}(=) = h, \qquad \omega_{hi}(\in) = i$$
$$\omega_{hh}(=) = h, \qquad \omega_{hh}(\in) = h)$$

Ezeket kiterjeszthetjük a formulákra a következő módon: ha A azonos $\neg B$-val, akkor $\omega(A) = i$ pontosan akkor, ha $\omega(B) = h$, ha A azonos $B \vee C$-vel, akkor $\omega(A) = h$ pontosan akkor, ha $\omega(B) = i$ és $\omega(B) = h$. Világos, hogy 1) az értékelések megőrzik a modusz ponenszet, 2) helyettesítésinvariánsak a következő értelemben: ha ω szintaktikus értékelés, akkor

$$\omega([t/x]A) = \omega(A)$$

II.) Az értékelések mindegyike a Hilbert–Ackermann-axiómasémák az első epszilon axiómasémához és a Leibniz-szabály minden eleméhez az i-t rendeli, közülük az ω_{ii} és ω_{ih} a második epszilon axiómasémához rendeli az i-t. Elegendő a három utolsót megvizsgálni.

$$\omega([t/x]A \Rightarrow [(\varepsilon x)A/x]A) = \omega(A \Rightarrow A) = i$$

$$\omega(t = s \Rightarrow ([t/x]A \Leftrightarrow [s/x]A)) = \omega(t = s \Rightarrow (A \Leftrightarrow A)) = i$$

$$\omega_{i*}((\forall x)(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\varepsilon x)A = (\varepsilon x)B) = i$$

mert az i mindenből következik és $\omega_{i*}((\varepsilon x)A = (\varepsilon x)B) = i$

Belátjuk, hogy az axiómákhoz ω_{ih} az igazat rendeli. A meghatározottsági axiómához azért rendeli az i-t, mert az igaz mindenből következik.

A részhalmaz axiómához pedig azért rendeli az igazat, mert:

$$\omega_{ih}(\forall \mathbf{x})(\mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{x} \in \mathbf{t})) \Rightarrow \mathrm{coll}_{\mathbf{x}}(\mathbf{A})) = \omega_{ih}((A \Rightarrow h) \Rightarrow (h \Leftrightarrow A)) = i$$

Tehát minden olyan formula, melyhez ω_{ih} hamisat rendel nem levezethető: pl. $t \neq s$ vagy $t \in s$. De ilyen a páraxióma, a hatványhalmaz axióm vagy a végtelenségi axióma is.

Az alábbiakat rendre páraxiómának, hatványhalmaz axiómának ill. végtelenségi axiómának nevezzük:

$$(\mathsf{cou}) \qquad (\forall x)(\forall y)\mathrm{coll}_z(z = x \vee z = y)$$

$$(\mathsf{pow}) \qquad (\forall x)\mathrm{coll}_z((\forall y)(y \in z \Rightarrow y \in x))$$

$$(\mathsf{inf}) \qquad (\exists x)((\emptyset \in x) \wedge (\forall y)(y \in x \Rightarrow y^+ \in x)$$

ahol $y^+ = y \cup \{y\}$

3.7.4.8. Megjegyezzük, hogy ha Set_*-hoz hozzávesszük az unió axiómát és a kiválasztási axiómát, akkor ellentmondásmentes marad (ez Set_{**}). Itt az unió axióma:

$$(\mathsf{uni}) \qquad (\forall x)\mathrm{coll}_z((\exists y)(z \in y \Rightarrow y \in x)$$

Set^*

Jelöljük Set^*-gal azt az elméletet az $\mathrm{L}_{\mathsf{Set},\varepsilon}$ nyelv felett, melynek explicit axiómái a meghatározottsági axióma, a páraxióma, a hatványhalmaz axióma, az unió axióma és a végtelenségi axióma:

$$\mathsf{Set}^* = \quad \mathsf{ext} \quad \mathsf{cou} \quad \mathsf{pow} \quad \mathsf{uni} \quad \mathsf{inf}$$

3.7.4.9. Tétel – *Az iteratív rész abszolút ellentmondásmentessége* – Set^* ellentmondásmentes.

Bizonyítás. Csak azt kell ellenőrizni, hogy a ω_{ii} az axiómákhoz az i értéket rendeli. Ekkor minden pl. $t \neq s$ alakú formula nem levezethető. De független a Russell-kijelentés: $\mathrm{coll}_x(x \notin x)$ és a részhalmaz axióma egy esete is.

3.7.4.10. Megjegyezzük, hogy ha Set^*-hoz hozzávesszük a kiválasztási axiómát, akkor ellentmondásmentes marad.

3.7.4.11. Megjegyzés. Az előbbi két tétel nagy jelentősségű a matematikafilozófiában. Ezek szerint a halmazelmélet, mely az alább axiómákból áll:

$$\mathsf{Set}_{ZF} = \quad \mathsf{sub} \quad \mathsf{ext} \quad \mathsf{cou} \quad \mathsf{pow} \quad \mathsf{uni} \quad \mathsf{inf}$$

két jellegzetes részelmélete abszolút ellentmondásmentes, miközben magának a halmazelméletnek az abszolút ellentmondásmentességét még nem tudjuk jelenleg igazolni. Az egyik részelmélet a

$$\mathsf{Set}_* = \quad \mathsf{sub} \quad \mathsf{ext}$$

komprehenzív rész, melynek az alapötlete, hogy halmazokat tulajdonságokkal definiálunk. Másfelől a

$$\mathsf{Set}^{(*)} = \quad \mathsf{cou} \quad \mathsf{pow} \quad \mathsf{uni} \quad \mathsf{inf}$$

(itt az ext szükségtelen is), mely az iteratív rész, ami abban nyilvánul meg, hogy a halmazokat építgetéssel definiálunk és nem tulajdonságokkal. A két elmélet komplementer jellegű abban az értelemben, hogy az elsőnek csak egyetlen explicit axiómája van, míg a másodiknak nincs egyáltalán axiómasémája, de van sok explicit axiómája.

Ezt alátámasztó eredményre jutott Boolos is, aki a *Még egyszer az iterációról* c. cikkében kifejti, hogy mindkét szemlélet valamiféle halmazelméletet határoz meg, de egyik sem kitüntetett a másikhoz képest, azaz nem alapozható csak az egyikre a teljes halmazelmélet. Mi itt azt láttuk be, hogy mindkét alapszemlélet legitim, azaz bármelyik önmagában ellentmondásmentes rendszert alkot, bár hogy együtt mit csinálnak, azt nem tudjuk még.

4. Gödel-tételkör

4.1. Cantor diagonális érve

Mind a Gödel-tételek, mind a logikai ellentmondások egy tőről, a diagondális érvelésről fakadnak. Legvilágosabban ezt a Cantor-tétel bizonyításából olvashatjuk ki.

Cantor-tétel – Ha H halmaz és $\mathcal{P}(H)$ az összes részhalmazának halmaza, akkor nem létezik bijekció H-ból $\mathcal{P}(H)$-ba, azaz olyan $f : H \to \mathcal{P}(H)$ függvény, melyre tejesül, hogy minden értéket csak egyszer vesz fel és minden $\mathcal{P}(H)$-beli K esetén van olyan $k \in H$, hogy $f(k) = K$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy van ilyen f. Vegyük a következő halmazt:

$$M := \{x \in H \mid x \notin f(x)\}$$

Ekkor $M \in f(M) \Leftrightarrow M \notin f(M)$. Antorpomorf interpretációban (Smullyan), egy univerzumban végtelen sok tudatos lény van. A lények nagyon szeretnek bizottságokat alapítani: minden lehetséges módon választott részhalmazuk bizottságot alkot. Pl. az üres halmaz is bizottság, ebben éles vitákra nem kell számítani. Egy jegyző szeretné számbavenni ezeket, és mivel végtelen sok lény van, reményt táplál arra vonatkozóan, hogy ezt úgy tegye meg, hogy minden egyes bizottságot egy lényről és csakis egyről nevez meg. Sikerrel fog-e járni (ha van annyi ideje, amennyire szüksége lehet ehhez)? Legyen M a szerények bizottsága, azaz mindazoké, akik nem a saját magukról elnevezett bizottságnak a tagjai. Szerény-e a szerények bizottságának névadója?

Russell nevéhez fűződik az impredikábilis predikátum paradoxona, mely a Russell-paradoxon rokona.

Az impredikábilis predikátum paradoxona – Legyen Impr az a predikátumokon értelmezett mondat kimenetű funktor, mely pontosan akkor igaz egy predikátumra, ha az nem igaz saját magára:

$$Impr(p) = \text{„ } p \text{ nem igaz } p\text{-re”}$$

Tehát

$$Impr(p) \Leftrightarrow \sim p(p)$$

Itt helyettesítsünk p helyére $Impr$-t:

$$Impr(Impr) \Leftrightarrow \sim Impr(Impr)$$

Ennek a halmazelméleti megjelenése a Russell-antinómia:

$$R = \{\{x \mid p(x)\} \mid \sim p(\{x \mid p(x)\})\} = \{\{x \mid p(x)\} \mid \{x \mid p(x)\} \notin \{x \mid p(x)\}\}$$

Nyilván mindkettő feloldása a „kereszthivatkozás” letiltása predikátumok, predikátum bemenetű funktorok és nevek között. Ha letiltjuk, hogy az $\in$ jel bal és jobb oldalán ugyanaz szerepelhessen, akkor feloldottuk az összes eddigi paradoxont. (Ám, a paradoxonok természetéhez hozzátartozik, hogy ha kirúgjuk az ajtón, bejön az ablakon.)

4.2. Russell-típuselmélete

Russell a *Mathematical logic as based on the Theory of Types* cikkében majd a Whiteheaddel közösen írt *Principia Mathematica* könyvében fejti ki a típuselmélet szükségességét és felépítését. Lényegében a következő típusba sorolja a formális nyelvi kifejezéseket: ι: nevek, o: mondatok, ezek iterációjával: $\alpha(\dots)$: funktorok. Pl.

$$
\begin{array}{rr}
\sim A & o(o) \\
A \vee B & o(oo) \\
p(x) & o(\iota) \\
(\varepsilon x)p(x) & \iota(o(\iota)) \\
(\forall x)p(x,y) & o(o(\iota\iota))
\end{array}
$$

típusúak.

Látható, hogy így kiküszöbölhető az impredikabilitás problémája:

$$Impr \qquad o(o(\iota))$$

Ezért $Impr(Impr)$ olyan kifejezés, mely formálható, de nem sorolható be típusba. Az ilyet *nem szignifikáns* (jelentésnélküli) kifejezésnek nevezi Russell (1908). Russell rendszerében a $\sim$, $\vee$, $(\forall v)$ alapvető logikai operátorok, de a többit, még az azonosságot is definiálni lehet: ha x_1, y_1 individuumváltozók, akkor $x_1 = y_1$ ugyanis azonos a

$$(\forall x_2)(x_2(x_1) \supset x_2(y_1))$$

formulával.

4.2.1. Gödel (technikai) változtatásai a Principia Mathematicán

Gödel a típusokat egyetlen, a halmazelméletben jól ismert, fogással egyszerűsítette. A kezdő típus ι, azaz (1) a következő a $o(\iota)$ típus, melyet azonosítani lehet az individuumok osztályaival (2), a következő, Russellnél is szereplő eliminációs javaslattal: ha $\hat{x}p(x)$ jelöli az $\{x \mid p(x)\}$ osztályt, akkor az $y \in \hat{x}p(x)$ kifejezés csak kontextuálisnak szerepel a formális kifejezéskeben (azaz a deskripciókhoz hasonlóan $\hat{x}p(x)$ *nem valódi nevek*), éspedig a kiküszöbölésük

$$y \in \hat{x}p(x) \Leftrightarrow p(y)$$

A következő típus $o(o(\iota))$ azaz az individuumok osztályainak osztályai (3) ... Nincs szükség a kétváltozós $o(\iota\iota)$-ra, mert ez osztályok osztályaiból előállítható: $\{\{a\},\{a,b\}\}$ alakú osztályok osztálya. A vegyes típusok a vegyes változókkal, vagy a halmazelméleti függvénydefinícióval állítható elő.

A helyettesítés axiómái. A Subst $a\binom{v}{c}$ azt a grafikus manipulációt jelenti, amikor az a formulában v helyére a c-t tesszük:

$$((\forall v)a) \supset (\text{Subst } a\begin{pmatrix} v \\ c \end{pmatrix})$$

$$(\forall v)b \vee a \supset b \vee (\forall v)a$$

ahol v nem szerepel szabadon b-ben. A reducibilitás vagy a (típusonként korlátozatlan) komprehenzivitás axiómája:

$$(\exists u)(\forall v)(u(v) \equiv a)$$

feltéve, hogy a-ban nem szerepel v. A meghatározottsági axióma:

$$(\forall x_1)(x_2(x_1) \equiv y_2(x_1)) \supset (x_2 = y_2)$$

4.3. ω-konzisztencia és ω-teljesség

Gödel mutatott rá arra a tényre, (ez centrális jelentősségű a munkájában) hogy az aritmetikában az (egyszerű) inkonzisztencián kívül van egy formálisan ártalmatlan, de érdekes és nyugtalanító szemantikai inkonzisztencia, az ω-inkonzisztencia. Először is ismételjük át az ellentmondásmentesség (konzisztencia) és a telnesség fogalmát!

4.3.0.1. Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv és $\mathcal{L}^*$ ennek olyan töredéke, hogy $\{\supset, \sim\} \subseteq \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$ és legyen $T \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*)$.

1. Azt mondjuk, hogy T **inkonzisztens,** ha van olyan $A \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*)$, hogy $T \vdash A$ és $T \vdash\sim A$.

2. T **teljes,** ha minden $A \in \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*)$-re $T \vdash A$ vagy $T \vdash\sim A$.

4.3.0.2. Definíció. Legyen $\mathcal{L}$ elsőrendű nyelv és $\mathcal{L}^*$ ennek olyan töredéke, hogy $\{\supset, \sim, \forall\} \subseteq \mathcal{L}^* \subseteq \mathcal{L}$ (elég, ha $\forall$ valamilyen adekvát értelemben kifejezhető) és legyen $T \subseteq \mathrm{Sent}(\mathcal{L}^*)$. $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ végtelen sok *kitüntetett* zárt term.

1. Azt mondjuk, hogy T (az $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ -ra vonatkoztatva) ω-**inkonzisztens,** ha van olyan $A(x)$ formula, hogy $T \vdash A(n_k)$, minden k-ra és $T \vdash\sim (\forall x)A(x)$.

2. Azt mondjuk, hogy T (az $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ -ra vonatkoztatva) ω-**teljes,** ha minden $A(x)$ formulára, ha $T \vdash A(n_k)$, minden k-ra, akkor $T \vdash (\forall x)A(x)$.

Világos, hogy ha T ω-konzisztens, akkor (egyszerűen) konzisztens is, hiszen van nem levezethető mondata. Az ω-inkonzisztenciából azonban nem következik az inkonzisztencia, erre Tarski mutatott is példát.

Világosak továbbá az ellenkező tulajdonságok:

1. T (az $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ -ra vonatkoztatva) ω-**konzisztens,** ha minden $A(x)$ formulára vagy $T \nvdash A(n_k)$, valamely k-ra vagy $T \nvdash\sim (\forall x)A(x)$.

2. T (az $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ -ra vonatkoztatva) ω-**nemteljes,** ha van olyan $A(x)$ formula, hogy bár $T \vdash A(n_k)$, minden k-ra, de $T \nvdash (\forall x)A(x)$.

4.3.0.3. Példák. 1) Érdekes példát tudunk mondani az epszilonos logika köréből. Ott, $(\forall x)A(x)$ pontosan akkor levezethető, ha minden t termre $A(t)$ levezethető, hiszen a $(\varepsilon x)(\neg\neg A(x))$ ilyen term. Tehát ha egy epszilonos T elmélet konzisztens egy megszámlálható nyelven, akkor az összes zárt termek t_1, t_2, ... sorozatára vonatkozóan T ω-konzisztens. Hiszen, minden $A(x)$-re az $A(t_1)$, $A(t_2)$, ... pontosan akkor levezethető, ha $(\forall x)A(x)$ levezethető. Azaz ha $A(t_1)$, $A(t_2)$, ... mindegyikének levezethetősége mellett $\sim (\forall x)A(x)$ is levezethető lenne, akkor inkonzisztens lenne az elmélet.

2) A PA nyelvén ez a fogalom mindig a $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ termekre vonatkozik. Szemantikai ellentmondás lévén modellelméleti szemantikai példát érdemes mondani, éspedig mutatunk egy *relatív konzisztens, relatív ω-inkonzisztens* elméletet.

Bővítsük a c individuumkonstanssal PA nyelvét és tegyük fel rá a $c \neq n$ axiómasémát, ahol n végigfut az $0, S(0), S(S(0)), \ldots$ kanonikus termeken. Ez az elmélet relatív konzisztens (Set-re nézve), mert PA nemsztenderd mondelljei neki is modelljei, de ω-inkonzisztens, mert a $x \neq c$-ba mindegyik $0, S(0), S(S(0)), \ldots$-t helyettesítve levezethető formulát kapunk, de $\sim (\forall x)(x \neq c)$ is levezethető, hisz $(\forall x)(x \neq c)$ cáfolható az $x = c$ helyettesítéssel. Ez az elmélet ω-nemhelyes, ami definíció szerint azt jelenti, hogy ω nem modellje.

A Gödel-bizonyításban felvetődik egy másik furcsaság is, ez az a fogalom, ami aztán Tarskit kezdte érdekelni és ω-nemteljességnek nevezett le.

4.3.0.4. Példák. 1) Lehet egy elmélet teljes, de nem ω-teljes. Ilyen elméletre szintén Tarski adott példát (osztálykalkulus egy verziója).

2) Készítünk egy *abszolút konzisztens, ω-nemteljes, ω-helyes* elméletet. Hilbert első axiómarendszerét vesszük egy kis módosítással: Termek: 1, $t + s$, ha t, s termek.
Formulák: $t = s$, ha t, s termek, $\sim A$,$A \Rightarrow B$, ha A, B formulák.

Axiómák:

$$1 = 1$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} \;\Rightarrow\; \mathbf{t} + 1 = \mathbf{s} + 1$$

$$\mathbf{t} + 1 = \mathbf{s} + 1 \;\Rightarrow\; \mathbf{t} = \mathbf{s}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{s} \;\Rightarrow\; (\mathbf{t} = \mathbf{r} \;\Rightarrow\; \mathbf{s} = \mathbf{r})$$

Legyen a kanonikus (természetes számjelek) termhalmaza: $1, 1 + 1, (1 + 1) + 1, \ldots$. Továbbá legyen egy új axióma séma:

$$1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1) \;\Rightarrow\; \mathbf{t} = \mathbf{t}$$

Ez a $(\tau x)(x = x) = 1 + (1 + 1)$ esetet jelentené, ha lenne ilyen. Azt kell belátnunk, hogy van olyan „$A(t)$" formula séma, hogy ezt minden kanonikus term teljesíti az elméleten belül, de az univerzális állítás nem teljesül. Igen, k kanokikus termre $k = k$ levezethető

indukcióval, de az univrzális állítás: $1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1)$ nem teljesül a szigorú értékeléssel, azaz azzal, hogy csak a $k = k$ atomi formulák igazak, ahol k kanonikus term.
3) Érdemes konstruálni egy *abszolút konzisztens, ω-inkonzisztens, nem ω-helyes* elméletet is az előbbi elméletből. Most Hilbert első axiómarendszerét az

$$1 + (1 + 1) \neq 1 + (1 + 1)$$

axiómával és a

$$1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1) \;\Rightarrow\; \mathbf{t} = \mathbf{t}$$

univerzális kvantifikációt bohóckodó axiómasémával bővítjük. Ezzel a szigorúbb, csak a kanonikus k-ra a $k = k$-hez igazat rendelő értékelés szerint az axiómák igazak. Az „$x = x$" sémában a kanonikus termeket helyettesítve levezethető mondatokat kapunk, konzisztens is, mert pl. $1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1)$ nem levezethető, miközben „$\sim (\forall x)(x = x)$", azaz $1 + (1 + 1) \neq 1 + (1 + 1)$ axióma, azaz levezethető.

4) Egy érdekes új fogalom lenne az, ami a negációteljesség ω párja. Egy T elmélet **erősen ω-teljes,** ha minden $A(x)$ formulára az alábbiak közül *legalább az egyik* teljesül:
a) $T \vdash A(n)$ minden n kanonikus termre,
b) $T \vdash \sim (\forall x)A(x)$

és **nem erősen ω-teljes,** ha van olyan $A(x)$ formula és n kanonikus term, hogy $T \nvdash A(n)$ és közben $T \nvdash \sim (\forall x)A(x)$. Ha egy elmélet teljes, akkor ω-negációteljes is. Ha nem erősen ω-teljes, akkor konzisztens az elmélet.

Kissé erőltetett példát tudunk adni (konzisztens) *nem erősen ω-teljes,* de *nem ω-helyes* elméletre a hilberti első axiómarendszerrel. Legyen egy új axióma séma:

$$1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1) \;\Rightarrow\; 1 + \mathbf{t} = 1 + \mathbf{t}$$

Itt tehát $1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1)$ azt a szerepet játssza, mintha az „$1 + x = 1 + x$" formula univerzális lezártja lenne, azaz „$(\forall x)(1 + x = 1 + x)$" (vagy helyettesítéses olvasatban: $(\tau x)(1 + x = 1 + x) = 1 + 1$), hiszen párhuzamba állítható az univerzális kvantor kiküszöbölési szabályával:

$$\frac{(\forall x)(1 + x = 1 + x)}{1 + t = 1 + t}, \qquad \frac{1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1)}{1 + t = 1 + t}$$

Most adunk két értékelést azzal a céllal, hogy belássuk, hogy az „$1+x = 1+x$" valamelyik kanonikus termre nem vezethető le, de a „$\sim (\forall x)(1 + x = 1 + x)$" sem.

Egyfelől az az értékelés, mely az atomi $t = t$ formulákhoz rendeli az igazat, egyébként a hamisat. Ez igazzá teszi az axiómákat, és modusz ponenszre zárt. Ezzel az értékeléssel a „$\sim (\forall x)(1 + x = 1 + x)$", azaz $1 + (1 + 1) \neq 1 + (1 + 1)$ hamis, vagyis nem levezethető az axiómákból.

Másfelől legyen az értékelés az, hogy csak az $k = k$ alakú kanonikus termekhez rendeli az igazat, a többihez a hamisat. Ez igazzá teszi az axiómákat, és modusz ponenszre zárt. Ezzel az értékeléssel a „$1 + x = 1 + x$”, az $x = 1 + 1$ helyettesítéssel már hamis azaz $1 + (1 + 1) = 1 + (1 + 1)$ nem levezethető az axiómákból.

Néhány lényeges kapcsolat.

Ha T teljes, és nem erősen ω-teljes, akkor

$$T \nvdash A(n_i) \text{ és } T \nvdash \sim (\forall x)A(x)$$

akkor $T \vdash \sim A(n_i)$ és $T \vdash (\forall x)A(x)$, azaz inkonzisztens. De ha T teljes, csak nem ω-teljes, akkor csak arra következtethetünk, hogy van $A(x)$, hogy $T \vdash (\exists x) \sim A(x)$, miközben $T \vdash \sim A(n_i)$ minden i-re.

A PM szintaxisa és aritmetizálása

Jelek:

$$0 \quad f \quad \sim \quad \vee \quad \forall \quad (\text{valójában: } \Pi) \quad (\quad)$$

Változók (végtelen hierarchiája, azaz végtelen szortú nyelv):

$$\begin{aligned}
&x_1, y_1, z_1 \ldots (\text{individuumváltozók, 1. típusú változók})\\
&x_2, y_2, z_2 \ldots (\text{osztályváltozók, 2. típusú változók})\\
&x_3, y_3, z_3 \ldots (\text{harmadrendű osztályváltozók, 3. típusú változók})\\
&\qquad\vdots (\omega)
\end{aligned}$$

Jelölje Char az összes szibmólum halmazát, azaz

$$\text{Char} = \{0, f, \sim, \vee, \forall, (,), x_1, y_1, z_1, \ldots, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_3, y_3, z_3, \ldots\}$$

Szintaxis (angolszász):

Első típusú termek (első típusú jelek)

$$a \quad fa \quad ffa \quad \ldots$$

ahol a a 0 vagy indivíduumváltozó (1. típusú változó). Az *n-edik típusú termek* az n-edik típusú változók, ha $n > 1$.

Elemi formulák az

$$a(b)$$

alakú kifejezések, ha a egy $n + 1$-edik típusú term, és b egy n-edik típusú term.

Összetett formulák a

$$\sim (a) \quad (a) \vee (b) \quad (\forall v)(a) \qquad (\text{valójában: } v\Pi(a))$$

alakú (ahol v akármilyen változó). Itt egy formulában a változók kötött és szabad szereplésének szintaktikus fogalma a szokásos módon értelmezhetők. Származtatott formulák .(azaz & azaz és), $\supset, \equiv, (Ex), =$.

A helyettesítés, mint grafikus operáció:

$$\text{Subst } a \binom{v}{b}$$

jelöli azt a formulát, amit úgy kapunk, hogy az a formulában a v minden szabad szereplésébe egyszerre a v típusával azonos típusú b termek helyettesítjük. Grafikus manipuláció még a *típusemelés,* azaz amikor egy a formulában az összes szabad változó típusát ugyanazzal az m számmal megemeljük (ha az értelmes).

PM + Ari axiómái:

$$\begin{array}{l} \sim (fx_1 = 0) \\ (fx_1 = fx_2) \supset (x_1 = x_2) \\ x_2(0).(\forall x_1)(x_2(x_1) \supset x_2(y_1)) \supset (\forall x_1)(x_2(x_1))) \end{array}$$

Továbbá a Hilbert–Ackermann propozícionális logikai axiómák, a helyettesítés (szintaktikus) axiómái, a reducibilitás (típusonkénti komprehenzió) és az extenzionalitás (típusonkénti meghatározottsági axióma).

Következtetési szabály, logikai bizonyíthatóság: c a b és a $b \supset c$ közvetlen következménye

$$\frac{a,\ b \supset c}{c},$$

továbbá $(\forall v)a$ az a közvetlen következménye:

$$\frac{a}{(\forall v)a}$$

a logikailag bizonyítható formulák az axiómákat tartalmazó legszűkebb halmaz, amely zárt a közvetlen kövekezményre.
Aritmetizálás. Definiálunk a nyelvi kifejezések véges sorozatain értelmezett **N**-be képező injektív $\Phi : L \to \mathbf{N}$ függvényt.
Karakterek:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & f & \sim & \vee & \forall\,(\Pi) & (&) \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & \dots \\ 17 & 19 & 23 & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_2 & y_2 & z_2 & \dots \\ 17^2 & 19^2 & 23^2 & \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x_3 & y_3 & z_3 & \dots \\ 17^3 & 19^3 & 23^3 & \dots \end{array}$$

Karaktersorozatok: ha $\langle ch_1, ch_2, \dots, ch_k \rangle$ karaktersorozat, akkor

$$\Phi(\langle ch_1, ch_2, \dots, ch_k \rangle) = 2^{\Phi(ch_1)} 3^{\Phi(ch_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\Phi(ch_k)}$$

ahol p_k a k-adik prímszám.

Megjegyzés. Legyen R' olyan reláció, mely karaktersorozatok között értelmezett (azaz $R \subseteq (\mathrm{Char}^{<\omega})^n$, pl. legyen $R'(a,b)$ az, hogy b az a univerzális lezártja a v változóban), akkor ehhez van egy $R \subseteq \mathbf{N}^n$ számelméleti reláció, melyre teljesül, hogy ha $(a_1, \dots, a_n) \in R$, akkor és csak akkor, ha $(\Phi(a_1), \dots, \Phi(a_n)) \in R$. Speciel, minden $K' \subseteq \mathrm{Char}^{<\omega}$ osztályra létezik olyan $K \subseteq \mathbf{N}$, hogy $a \in K'$ pontosan akkor, ha $\Phi(a) \in K$. Az R'-höz rendelt R, a K'-höz rendelt K-kat a vesszős megnevezésének kiskapitális írásával jelöjük. Például az abból a relációból készült számelméleti relációt, hogy az „a egy első típusú változó” úgy jelöljük, hogy n EGY ELSŐ TÍPUSÚ VÁLTOZÓ. és

$$n \text{ EGY ELSŐ TÍPUSÚ VÁLTOZÓ} \Leftrightarrow n \in \{17, 19, 23, \dots\}$$

4.4. Gödel első nemteljességi tétele

Definíció – *Reprezentálhatóság* – Legyen R egy n változós számelméleti reláció ($R \subseteq \mathbf{N}^n$). Azt mondjuk, hogy R **P-reprezenrálható**, ha létezik olyan a P nyelvén felírt formula, hogy minden $(x_1, \dots, x_n)$ természetes szám n-esre:

$$R(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \mathrm{P} \vdash (\mathrm{Subs}\, a \tfrac{u_1}{\overline{x_1}} \dots \tfrac{u_n}{\overline{x_n}})$$

ahol $u_1, \dots, u_n$ az a változói és $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}$ kanonikus számjelek, melyek pont az $x_1, \dots, x_n$-eket jelölik.

R **teljesen P-reprezentálható,** ha emellett még az is igaz, hogy

$$\neg R(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \mathrm{P} \vdash \neg(\mathrm{Subs}\, a \tfrac{u_1}{\overline{x_1}} \dots \tfrac{u_n}{\overline{x_n}})$$

Egy számelméleti relációt primitív rekurzívnak nevezünk, ha karakterisztikus függvénye primitív rekurzív.

Lemma – *Reprezentálhatóság* – Minden primitív rekurzív számelméleti reláció teljesen P-reprezentálható.

A „nulla” konstans, a „rákövetkezés” és a „projekció” teljesen reprezentálhatók, továbbá a kompozíció a helyettesítéssel, a primitív rekurzió az indukció segítségével reprezentálható.

Megjegyzések: a korlátos kvantifikáció, mint számelméleti reláció primitív rekurzívak, a fenti lemma kiterjeszthető a következőképpen:

Lemma – *binumerális reprezentálhatóság* – Ha R primitív rekurzív számelméleti reláció, akkor van olyan r OSZTÁLYJEL, hogy

$$R(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow (\mathrm{Sb}\, r \,{}^{u_1}_{\mathrm{Z}(x_1)} \,\ldots\, {}^{u_n}_{\mathrm{Z}(x_n)}) \in \mathrm{Cn}(\mathrm{P})$$

$$(\mathbf{N}^n \setminus R)(x_1,\ldots,x_n) \Rightarrow \mathrm{Neg}(\mathrm{Sb}\, r \,{}^{u_1}_{\mathrm{Z}(x_1)} \,\ldots\, {}^{u_n}_{\mathrm{Z}(x_n)}) \in \mathrm{Cn}(\mathrm{P})$$

ahol $u_1,\ldots,u_n$ az r SZABAD VÁLTOZÓI.

Lényeges, hogy megfogalmazzuk néhány metanyelvi fogalom fordítását. A κ FORMULAOSZTÁLY ω-KONZISZTENS, ha minden a FORMULÁRA, melynek EGYETLEN SZABAD VÁLTOZÓJA az x az teljesül, hogy

$$\text{ha minden } n \text{ természetes számra } \mathrm{Sb}(\, a \,{}^{x}_{\mathrm{Z}(n)}) \in \mathrm{Cn}(\kappa), \text{ akkor } \mathrm{Neg}(x\,\mathrm{Gen}\, a) \notin \mathrm{Cn}(\kappa)$$

Tudjuk, hogy FORMULÁK κ osztálya primitív rekurzív, ha az $n \in \kappa$ reláció karakterisztikus függvénye primitív rekurzív függvény (azaz korlátos futási idejű program eldönti, hogy $n \in \kappa$ vagy sem).

Tétel – *Gödel első nemteljességi tétele* – FORMULÁK κ primitív rekurzív ω-KONZISZTENS halmazára létezik olyan r OSZTÁLYJEL, hogy

$$v\,\mathrm{Gen}\, r \notin \mathrm{Cn}(\kappa) \qquad \text{és} \qquad \mathrm{Neg}(v\,\mathrm{Gen}\, r) \notin \mathrm{Cn}(\kappa)$$

ahol v az r SZABAD VÁLTOZÓJA.

Bizonyítás.

Most megkíséreljük megszerkeszteni a hazug paradoxnának alábbi verziójának bizonyíthatósággal elmondott verzióját:

> (Liar) „A formula, amit úgy kapunk, hogy az ‚A formula, amit úgy kapunk, hogy az y formula nevét a benne szereplő egyetlen változója helyére helyettesítjük hamis' formula nevét a benne szereplő egyetlen változója helyére helyettesítjük hamis.”

Megjegyzések.

1) Egy formula *nevén* Tarski óta a formula *strukturális-leíró nevét* értjük, azaz egy olyan véges grafikus eljárást, ami megmondja, hogy miképpen áll össze a jelekből a formula. Ebben a strukturális-leíró névben már nincs változó, mert az csak grafikus jelváltozó lenne (pl. ide és ide egy akármilyen jelet tehetünk).

2) Ha ezt az utasítást végrehajtjuk, akkor saját magát a formulát kapjuk.

3) Tehát ez a formula mondat.

4) Pontosan a hazug paradoxonát rekonstruálja.

5) A Gödel-számozás egy formulához egy számot rendel, melynek dekódolásával a formula strukturális-leíró nevét kapjuk.

$$Q(x,y) \quad \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \neg(x\mathrm{Prov}_\kappa[Sb(y^{19}_{Z(y)})])$$

mivel a $x\mathrm{Prov}_\kappa y$ számelméleti reláció és a $Sb(y^{19}_{Z(y)})]$ számelméleti függvény primitív rekurzív, ezért $Q(x,y)$ is az. Ezért van olyan q RELÁCIÓJEL, mely a 17 és 19 SZABAD VÁLTOZÓKAT tartalmazza, hogy

$$Q(x,y) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(x\mathrm{Prov}_\kappa[Sb(y^{19}_{Z(y)})]) \Rightarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Sb}\, q\, {}^{17}_{\mathrm{Z}(x)}\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(y)})$$

$$\neg Q(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad x\mathrm{Prov}_\kappa[Sb(y^{19}_{Z(y)})] \Rightarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Neg}\,\mathrm{Sb}\, q\, {}^{17}_{\mathrm{Z}(x)}\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(y)})$$

„A formula, amit úgy kapunk, hogy az ‚A formula, amit úgy kapunk, hogy az y formula nevét a benne szereplő egyetlen változója helyére helyettesítjük nem levezethető' formula nevét a benne szereplő egyetlen változója helyére helyettesítjük nem levezethető."

Legyen p a következő EGYVÁLTOZÓS, a 19-et SZABAD VÁLTOZÓT tartalmazó OSZTÁLYJEL:

$$p = 17\,\mathrm{Gen}\,q$$

„A formula, amit úgy kapunk, hogy az ‚A formula, amit úgy kapunk, hogy az y formula nevét a változójába helyettesítjük nem levezethető.' formula nevét az egyetlen változója helyére helyettesítjük nem levezethető az x bizonyítással."

És legyen 17-et, mint SZABAD VÁLTOZÓT tartalmazó OSZTÁLYJEL

$$r = \mathrm{Sb}(q\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(p)})$$

„A formula, amit úgy kapunk, hogy az ‚A formula, amit úgy kapunk, hogy az y formula nevét a változójába helyettesítjük nem levezethető.' formula nevét az egyetlen változója helyére helyettesítjük nem levezethető."

Ennek GENERALIZÁCIÓJA:

$$g = 17\,\mathrm{Gen}\,r$$

Ekkor:

$$g = 17\,\mathrm{Gen}\,r = 17\,\mathrm{Gen}\,\mathrm{Sb}(q\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(p)}) = \mathrm{Sb}((17\,\mathrm{Gen}\,q)\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(p)}) = \mathrm{Sb}(p\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(p)})$$

Továbbá:

$$\mathrm{Sb}(q\, {}^{17}_{\mathrm{Z}(x)}\, {}^{19}_{\mathrm{Z}(p)}) = \mathrm{Sb}(r\, {}^{17}_{\mathrm{Z}(x)})$$

Nyilván y helyére p-t teszünk:

$$\neg(x\mathrm{Prov}_\kappa g) \Rightarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Sb}(r\, {}^{17}_{\mathrm{Z}(x)}))$$

$$(x\mathrm{Prov}_\kappa g) \Rightarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{NegSb}(r\,{}^{17}_{\mathrm{Z}(x)}))$$

Amiből következik, hogy 1) $g \notin \mathrm{Cn}_\kappa$.

$$g \in \mathrm{Cn}_\kappa \underset{\text{„létezik } n\text{"}}{\rightsquigarrow} n\,\mathrm{Prov}_\kappa\, g \rightsquigarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Neg}\,\mathrm{Sb}(r\,{}^{17}_{\mathrm{Z}(n)}))$$

Másrészt g-nek, azaz $17\,\mathrm{Gen}\,r$-nek KÖZVETLEN KÖVETKEZMÉNYE, az

$$\mathrm{Sb}(r\,{}^{17}_{\mathrm{Z}(n)})$$

hiszen itt az 17 kódú változóba helyettesítettünk egy tetszőleges számot. Emiatt

$$g \in \mathrm{Cn}_\kappa \underset{\text{„létezik } n\text{"}}{\rightsquigarrow} n\,\mathrm{Prov}_\kappa\, g \rightsquigarrow \mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Sb}(r\,{}^{17}_{\mathrm{Z}(n)}))$$

azaz κ INKONZISZTENS.

2) Most belátjuk, hogy $\mathrm{Neg}\,g \notin \mathrm{Cn}_\kappa$. 1)-ben beláttuk, hogy $g \notin \mathrm{Cn}_\kappa$, azaz minden n számra

$$\neg(n\,\mathrm{Prov}_\kappa\, g),$$

amiből a *binumerális reprezentáció* miatt minden n-re

$$\mathrm{Prov}_\kappa(\mathrm{Sb}(r\,{}^{17}_{\mathrm{Z}(n)}))$$

Ha most $\mathrm{Neg}\,g \in \mathrm{Cn}_\kappa$ lenne, azaz $(17\,\mathrm{Gen}\,r) \in \mathrm{Cn}_\kappa$ lenne, akkor az r egy olyan 17-et SZABAD VÁLTOZÓKÉNT TARTALMAZÓ FORMULA lenne, ami minden n ÉRTÉK BEHELYETTESÍTÉSÉVEL LEVEZETHETŐ lenne κ-BÓL, miközben a GENERALIZÁCIÓJA CÁFOLHATÓ κ-BAN. Ez lehetetlen, mert κ ω-KONZISZTENS. $\square$

4.5. Absztrakt Gödel-tételkör

$S = (Sent, \sim, \supset, f, \Box)$ önreferenciális rendszer, ha levezetési szabály a amodus ponens, benne a Hilbert–Ackermann-axiómák levezethetők, $\vdash f \supset p$ minden p-re (f a hamis) és $\Box p$ minden p-re egy mondat.

Egy ilyen rendszer stabil, ha

$$\vdash \Box p \quad \rightsquigarrow \quad \vdash p$$

Tétel – *Gödel I.* – Legyen S olyan önreferenciális rendszer, melyben létezik olyan G mondat, hogy

$$\vdash G \equiv\sim \Box G$$

és minden p mondatra,

$$\vdash p \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Box p$$

Ekkor,

1. ha $\vdash G$, akkor S inkonzisztens,

2. ha $\vdash\sim G$, akkor S inkonzisztens, vagy instabil.

Bizonyítás. 1.
$$\vdash G \quad\rightsquigarrow\quad \vdash\sim \Box G \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box G \quad\rightsquigarrow\quad \vdash f$$
2.
$$\vdash\sim G \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box G$$
ha tehát konzisztens, akkor $\nvdash G$, azaz G az instabil itást mutató mondat.

Tétel – *Rosser* – Legyen S olyan önreferenciális rendszer, melyben létezik olyan R mondat, hogy
$$\vdash R \equiv\sim \Box_R R$$
és minden p mondatra,
$$\vdash p \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box_R p$$
$$\vdash\sim p \quad\rightsquigarrow\quad \vdash\sim \Box_R p$$
Ekkor,

ha $\vdash R$ vagy $\vdash\sim R$, akkor S inkonzisztens.

Bizonyítás.
$$\vdash R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash\sim \Box_R R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box_R R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash f$$
$$\vdash\sim R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash\sim \Box_R R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box_R R \quad\rightsquigarrow\quad \vdash f$$
Tétel – *Gödel II.* – Legyen S olyan önreferenciális rendszer, melyben létezik olyan G mondat, hogy
$$\vdash G \equiv\sim \Box G$$
és minden p mondatra,
$$\vdash p \quad\rightsquigarrow\quad \vdash \Box p$$
$$\Gamma \vdash p \supset q \quad\rightsquigarrow\quad \Gamma \vdash \Box p \supset \Box q$$
Ekkor $\nvdash\sim \Box f$

Bizonyítás. Kell: $\vdash\sim \Box f \supset G$.

Ekkor
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash\sim \Box f$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash\sim G$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash G \supset f$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash \Box G \supset \Box f$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash\sim \Box f \supset\sim \Box G$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash\sim \Box G$$
$$\{\sim \Box f, \sim G\} \vdash G$$

5. Kleene, Church, MRDP

5.0.1. Rekurzív felsorolhatóság, eldönthetőség

$f : \omega^N \to \omega$ **primitív rekurzív,** ha előállítható az alábbiak véges sokszori alkalmazásával, éspedig

1. konstans függvényekként,
2. rákövetkezésként,
3. véges sorozatok projekciójaként,
4. korább definiált primitív rekurzív függvényekből helyettesítéssel ($f = g(h_1, h_2, ...)$)
5. korább definiált primitív rekurzív függvényekből primitív rekurzióval ($f(0, ...) = h(...)$, $f(n+1, ...) = g(f(n, ...), ...)$)

$f : \omega^N \supset\!\!\to \omega$ **parciális rekurzív,** ha a fentiekkel és az úgy nevezett μ operációval áll elő, azaz

$$f(...) = (\mu x)g(x, ...)$$

ahol $(\mu x)g(x, ...)$ az a legkisebb n szám, melyre

$$g(x, ...) = 0$$

(Ilyenkor g olyan mintha predikátum lenne az x változóval és a 0 itt az „igaz” érték.) Ebben az esetben f nem feltétlenül mindehol értelmezett.

$f : \omega^N \to \omega$ **totális rekurzív,** vagy **általános rekurzív,** ha f promitív rekurzív, azaz f olyan $\omega^N \supset\!\!\to \omega$ parciális rekurzív függvény, mely a ω^N minden pontjában értelmezett. Ezt úgy is meg lehet fogalmazni, hogy $f(y) = (\mu x)g(x, y)$ általános rekurzív, ha minden y-ra $(\exists x)g(x, y) = 0$.

5.0.1.1. Felsorolható halmazok. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \omega$ halmaz **rekurzívan felsorolható,** ha van olyan $f : \omega \to \omega$ általános rekurzív függvény, hogy az

$$\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(n) \ldots\} = H$$

5.0.1.2. Megjegyzés. Legyen H felsorolható. Ha $n \in H$ (a varázsló ezt megmondja), akkor ez a tény véges számítással igazolható. (Ha $n \in H$ „igaz”, akkor $n \in H$ „bizonyítható”.) Ám, ha $n \notin H$, akkor ez a tény a fenti felsorolással nem bizonyítható. (Ha $n \in H$ „hamis”, akkor $n \notin H$ nem „bizonyítható” feltétlenül.)

5.0.1.3. Eldönthető halmazok. Azt mondjuk, hogy a $H \subseteq \omega$ halmaz **eldönthető,** ha van olyan $f : \omega \to \omega$ általános rekurzív függvény, hogy minden $n \in H$-ra

$$n \in H \Leftrightarrow f(n) = 0$$

5.0.1.4. Megjegyzés. Legyen H eldönthető. Ekkor $n \in H$ (ezt a varázsló megmondja) esetén ez a tény véges számítással igazolható és ha hamis, akkor ez is. (Ha $n \in H$ „igaz”, akkor $n \in H$ „bizonyítható”, ha $n \in H$ „hamis”, akkor $n \notin H$ „bizonyítható”.)

5.0.1.5. Megjegyzés. Ha H és $\omega \setminus H$ is rekurzívan felsorolható, akkor H eldönthető. Valóban, ha H-t f, $\omega \setminus H$-t pedig g sorolja fel, akkor legyen az az eljárás, hogy rendre elkezdjük kiszámítani az

$$f(0), g(0), f(1), g(1), ...$$

sorozatot. Ha $n \in H$ (ezt a varázsló mondja meg), akkor a sorozatban, az $f(...)$-ok között elő fog fordulni n, azaz véges lépésben elérünk, ahhoz, hogy igazoljuk $n \in H$. Ha pedig Ha $n \notin H$ (ezt is a varázsló mondja meg), akkor a sorozatban elő fog fordulni n a $g(...)$-k között, azaz véges lépésben elérünk, ahhoz is, hogy igazoljuk $n \notin H$.

5.0.1.6. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ez utóbbi eljárás véget ér, de nem tudjuk mikor. Nincs egy olyan k általános rekurzív (vagy primitív rekurzív függvény), mely $k(n)$-t véges lépésben kiszámítja és megmondja hogy $n \in H$ a $k(n)$ lépésben eldől. Házi feladat végiggondolni, hogy igaz-e (tehát ez egy projektfeladat), hogy ha pontosan akkor primitív rekurzív az f függvény, ha van olyan k primitív rekurzív függény, hogy $f(n)$ legfeljebb $k(n)$ lépésben kiszámítható.

5.0.2. Eldönthetetlenségi tétel

5.0.2.1. Minden bogár rovar. Minden eldönthető halmaz felsorolható. Mert el kell kezdeni kiszámítani a karakterisztikus függvényét és figyelni hogy igazat vagy hamisat ad. Ha igazat ad, akkor leírjuk azt a számot, ha hamisat, akkor nem. A logikai függvények primitív rekurzív függvényekkel megvalósítható (ahogy azt a Gödel-tétel bizonyításában láttuk) ezért az eredmény egy rekurzív felsorolás lesz.

5.0.2.2. Kleene normálforma. Van olyan pr. rekurzív $U(x)$ és $T(e, n, x)$, hogy minden f függvényre, ha f kódja e, akkor

$$f(n) \approx U((\mu x)T(e, n, x))$$

azaz értelmezési tartományuk azonos, és ahol értelmezettek, ott egyenlők. $U((\mu x)T(e, n, x))$ tehát parciálisan rekurzív. Intuitív jelentésük:

$T(e, n, x) = 0 \Leftrightarrow$ az e kódú gép az n bemeneten az x kódú teljes számítási történetet produkálja

$$U(x) \text{visszaadja az } x \text{ kódú számítási történet eredményét.}$$

(a Normálforma Tétel tulajdonképpen egy trivialitás.) Ha rekurzív függvényekkel akarjuk elmondani, akkor ez azt jelenti, hogy az e kódú rekurzív függény konstrukciós fáját $y(...)$ kódolja és $x = y(n)$ az a lépéssorozat, mely az y konstrukciós fából kiszámítja, hogy az n helyen mit vesz föl y.

5.0.2.3. Nem minden rovar bogár. Van rekurzívan felsorolható halmaz, ami rekurzívan nem eldönthető.

$$K = \{e \mid (\exists x)T(e,e,x) = 0\}$$

K előáll a K_n-ek uniójaként:

$$K_n = \{e \mid (\exists x \leq n)T(e,e,x) = 0\}$$

ami eldönthető, mert ha rögzítjük e-e, akkor az öszes $x \leq n$-re az $T(e,e,x)$ kiszámítása véges lépésben megadja, hogy teljesül-e valamilyen $x \leq n$-re T vagy sem. Így a K_n-ek egy-egy végtelen sorozatba rekurzívan felsorolhatók és ezekezt a szokásos cikk-cakk elrendezésben kiszámítva és felsorolva $s(k)$-val kapjuk, hogy ha valami benne van $\mathrm{Ran}(s)$-ben, akkor K-ban is, ha pedig nincs benne a $\mathrm{Ran}(s)$-ben akkor a K-ban sincs.

Viszont K nem eldönthető. Legyen f_e az az függvény, melynek a kódja e. Vegyük ugyanis a következő függvényt:

$$\begin{cases} g(e) = 0, & \text{ha } e \notin K \\ g(e) = f_e(e) + 1, & \text{ha } e \in K \end{cases}$$

Ez is totálisan rekurzív, legyen g kódja e_0, tehát $f_{e_0} = g$. Mivel g totálisan rekurzív, ezért $e_0 \in K$. De ekkor

$$f_{e_0}(e_0) = g(e_0) = f_{e_0}(e_0) + 1$$

5.0.2.4. Megjegyzés. Rendesebben is megadható ez a g függvény. Azt kell feltenni, hogy az

$$g(e) \approx U((\mu x)T(e,e,x) = 0) + 1$$

normál alakban adott parciális rekurzív függvény totálisan értelmezett.

5.0.3. Matyijaszevics–Robinson–Davis–Putnam-tétel

5.0.3.1. Megjegyzés. Mivel $D(k_1, \ldots, k_n) = 0$ primitív rekurzívan reprezentálható, ezért

Hivatkozások

[Bour] Bourbaki, N., **Elements of Mathematics**, vol. I – *Theory of Sets,* Hermann, Paris (1968)

[Hilb] Hilbert, D. & Bernays, P., **Grundlagen der Mathematik**, vol. 1 (1934), vol. 2, Springer, Berlin (1939)

[Monk] Monk, J. D., **Mathematical Logic**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin (1976)