MICHAEL DUMMETT: *A GÖDEL-TÉTEL FILOZÓFIAI JELENTŐSÉGE*

MOLNÁR ZOLTÁN GÁBOR

1. Bevezetés

Michael Dummett egységes munkásságát legjobban jellemző egyik munkája az az írás, ami Gödel első nemteljességi tételének filozófiai alkalmazásáról szól. A neves oxfordi professzor egész életét annak szentelte, hogy megvédje a nyelvfilozófiai használatelméletet az analitikus filozófia erősen logika-dominált módszertanával. Ebben a munkájában Dummett azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy vajon Gödel első nemteljességi tétele ellenpélda-e a nyelvfilozófiában arra, hogy a jelentést a nyelvhasználat határozza meg. Ahogy írja:

> A Gödel-tétel az elemi aritmetika minden szemléletileg helyes formális rendszere számára ad egy olyan U kijelentést, amely ugyan nem bizonyítható, de nem csak igaz, hanem számunkra felismerhető módon igaz: lévén a kijelentés $\forall x\, A(x)$ alakú, ahol $A(x)$ eldönthető predikátum. Ha a Gödel-tételt ilyen módon jogosan fogalmazzuk meg, akkor a „természetes szám" fogalmát, szerepeljen akár olyan kijelentésben is, amelyben csupán egyetlen kvantor van, a maga teljességében semmilyen formális rendszerben nem fogjuk tudni körülírni. A nehézség ezen állítás ismeretelméleti jelentőségének megállapításában rejlik.

Mint ismeretes, a használatelmélet szerint egy szó jelentése a használatában rejlik. Egy jelentéselmélet magában foglalhatja az igaz fogalmát. Amikor tehát a természetes számok egy használatelméleti jelentéselméletét adjuk meg, ez tartalmazhatja, hogy az állítások igazsága miképpen ismerhető fel. A használatelmélet matematikai értelemben az, hogy a matematikai igazságokhoz véges bizonyításokkal és csakis véges bizonyításokkal juthatunk el. Gödel első nemteljességi tétele azt állítja, hogy ha a Peano-aritmetika (továbbiakban PA) axiómarendszerét olyan állításokkal, mint új axiómákkal bővítjük, amelyek ellentmondásmentesek, rekurzív halmazt alkotnak, azaz egy véges eljárás minden állításról eldönti, hogy axióma-e vagy sem, akkor ebben a bővítésben megfogalmazható egy olyan U állítás, amelyet az új axiómákból sem levezetni nem lehet, sem cáfolni nem lehet. Három érvet teszünk vizsgálat tárgyává azok közül, amik szerint U ellenpélda a használatelméletre. Ebből a harmadik lesz Dummetté; az első kettőben is jól felismerhető, hogy miért rossz az argumentum, a Dummett által kitűzött (ellen)érv viszont olyan furfangos, hogy ő is csak hosszú fejtegetések után jut el a cáfolatig.

A) Tehát egy kis időre tekintsünk el Dummett mondandójától és a szokásos zsargonnal élve, a szokásos interpretációt alkalmazva mondjuk azt, hogy U azt fejezi ki, hogy „saját maga nem levezethető". U tehát igazat állít. A használatelmélet megtestesülése a matematikában az, hogy onnan tudjuk, hogy valami igaz, hogy van ezt igazoló levezetés. Amikor egy állítás igazságának tényét szeretnénk mások számára kommunikálni, voltaképpen a matematikusközösség tudtára adni, akkor ezt úgy tesszük, hogy érvelünk mellette. A matematika módszertana meghatározza, hogy milyen érvek használhatók: ezek a bizonyítások. PA-ban PA bizonyításai ezek. A Gödel-tétel szerint U-nak (mint PA egy mondatának) nem létezik bizonyítása. Az előzőek miatt azonban mégis tudjuk, hogy U igaz, hiszen azt mondja, ami a helyzet: nem levezethető. Ez ellentmond annak, hogy a mondatok jelentése, így igazságuk ténye a használatukban érhető tetten, hiszen úgy vagyunk tudatában annak, hogy U igaz, hogy ezt semmilyen értelmes, matematikailag elfogadható módon nem tudjuk egymás számára kommunikálni.

B) Amikor egy pillanatra felfüggesztettünk Dummett gondolatmenetét, az azért volt, hogy jobban értsük, hogy U igaz, mégis megérvelhetetlen módon igaz. Valójában, ahogy a fenti idézet is beszámol erről, ennél sokkal súlyosabb a helyzet, mert U nem akármilyen tulajdonságú. U azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy $(\forall x)A(x)$ alakú, ahol $A(x)$ olyan predikátum, amelyre bármely n természetes szám esetén létezik olyan algoritmus, ami véges lépésben eldönti, hogy $A(n)$ levezethető vagy cáfolható az axiómák alapján (azaz U Goldbach-féle állítás, $A(x)$ pedig eldönthető predikátum). Ezután némiképp Kalmár László gondolatmenetére hasonlító érveléssel folytathatjuk[1] $A(n)$ minden n természetes számra felismerhető igazságértékkel rendelkezik (véges lépésben eldől, hogy levezethető vagy cáfolható). U azaz $(\forall x)A(x)$ biztosan nem hamis, mert ellenkező esetben a tagadása, $(\exists x)\neg A(x)$, olyan lenne hogy létezne n (felsorolva a számokat és kiszámítva $A(x)$ igazságértékét véges lépésben elérünk hozzá), amelyre $A(n)$ (és $\neg A(n)$) felismerhető igazságértékű lenne, azaz levezethető lenne és így U

[1] Lásd ugyanebben a kötetben Kalmár László írásáról szóló esszét.

cáfolható lenne. U tehát igaz, de – lévén nem levezethető – nem felismerhetően igaz.

Az A) érvelésben felhasználtuk a *korreszpondencia elvet:* egy állítás akkor és csak akkor igaz, ha az, amit állít, a *valóságban* is úgy van. Úgy azonban nem lehet cáfolni a használatelméletet (ezt az antirealista álláspontot), hogy éppen az ellenkezőjére, a matematika realitását feltételező platonizmusra hivatkozunk. Csak úgy lehet ellentmondást találni a használatelméletben, ha saját állításaival kíséreljük meg konfrontálni. Nem vethetjük össze egy mondat tartalmát a „valósággal", ha nem tisztázzuk, hogy mi a matematikai realitás. Márpedig a használatelmélet nem hivatkozik első lépésben a valóságra; első lépésben a jelentést a nyelvhasználók közösségének konvencióira alapozza és csak második lépésben hivatkozik arra, hogy amikor a nyelvhasználók beszélgetnek, akkor mi az a tárgy, amiről a diskurzus folyik.

A B) érvelésnél nehezebb felismerni a hibát, de nem lehetetlen. Tudjuk, amikor a használatelmélet talaján állunk, akkor az igazságértékhez csak érveléssel, azaz kommunikálva juthatunk el. A gondolatmenetben lényeges szerepet játszott, hogy U igazsága mellett nem lehet érvelni. Milyen érvelést tilt le azonban Gödel tétele? Kizárólag az aritmetikaiakat. Igaz ugyan, hogy az az érvelés, amivel U igazsága mellett érveltünk valódi érvelés volt, de eleve feltételezte, hogy tud úgy hamis lenni valami, hogy az nem felismerhetően hamis. Feltételezte, hogy ismerhetjük a hamis és az igaz tulajdonságait abban az esetben is, amikor nincsenek erről kommunikálható ismereteink. Gödel tétele – a közkeletű megfogalmazásban – azt mondja, hogy U biztosan nem felismerhetően hamis. Ám, a használatelmélet nem beszél olyan állítás igazságértékéről, amely kívül esik a végesen eldönthető állítások körén. Amikor tehát a B) érv cáfolni szerette volna a használatelméletet, akkor megint olyat feltételezett, amiről a használatelmélet nem tesz állításokat.

2. Ellentmondásos-e a nyelvfilozófiai használatelmélet?

Ahhoz, hogy tovább menjünk a harmadik és egyben relevánsabb Dummett-féle érv felé – legalább intuitív módon – meg kell értenünk mi egy axiómarendszer modellje. A legegyszerűbb (történeti) példa David Hilbert 1920-ban megalkotott mini-számelmélete (H), amely egy segédrendszer, ami a későbbi vizsgálatokhoz mutatott utat abban a kutatási programban, amit bizonyításelméletként ismert meg később a nagyközönség. H csak az 1-re, az összeadásra (+), az egyenlőségre (=)

és a kondicionálisra ($\rightarrow$) hivatkozik. Axiómái a következők:

$$1 = 1$$

$$a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$$

$$a + 1 = b + 1 \rightarrow a = b$$

$$a = b \rightarrow (b = c \rightarrow a = c)$$

Ez a „semmire se jó” kis axiómarendszer volt az első, amiről Hilbert belátta, hogy ellentmondásmentes. Célja, hogy erre szimultán építve a logikát és az aritmetikát, fokozatosan elérje a számelmélet ellentmondásmentességét igazoló eredményt. Úgy gondolunk erre az axiómarendszerre, mint ami – részlegesen – leírja a természetes számok elméletét. Modellje tehát H-nak a pozitív természetes számok halmaza:

$$\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ellátva az összeadás műveletével mint + művelettel és az 1-gyel mint 1-gyel, mert erre a halmazra és műveletre igazak a fenti axiomatikus követelmények. $\mathbb{N}$ fenti axiómarendszer *szándékolt modellje,* egyszerűen azért mert ezt a halmazt és műveletet szándékoztunk axiomatizálni. Akár *sztenderd modellnek* is nevezhetjük, ami egy másik elnevezése a szándékolt modellnek. A halmazelméletben ω-val jelölik $\mathbb{N}$-t, ami valójában a véges Neumann-rendszámok halmaza:

$$\omega = \{\emptyset, \quad \{\emptyset\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \dots\}$$

ahol az egyes elemek nevei rendre $0, 1, 2, \dots$. Ám, figyeljünk fel arra, hogy H-nak modellje ugyanezen halmaz felett az a struktúra is, amiben + a szorzást jelöli. Mi több, vehetjük a 2×2-es mátrixok halmazát is, az 1-gyel mint az egységmátrixszal és a mátrixszorzással mint művelettel:

$$\mathbb{R}^{2\times2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} \qquad 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ezek biztosan nem szándékolt modelljei H-nak, de mind modelljei, mert H axiómái igazak rájuk.

Dummett természetesen nem H-ról, hanem PA-ról beszél. PA nyelvén kifejezhető az összeadás, a szorzás, van nulla (0) és rákövetkezés ($n + 1$) és megvannak az ezekre vonatkozó axiómák. És van egy nevezetes axióma, *a teljes indukció*, amely igaziból végtelen sok posztulátum. Minden egyes, a PA nyelvén kifejezhető egyváltozós $A(x)$ predikátumról fogalmazza meg, hogy az mikor igaz minden természetes számra:

$$A(0) \rightarrow ((\forall x)(A(x) \rightarrow A(x + 1)) \rightarrow (\forall x)A(x))$$

A teljes indukció aximómája tehát azt mondja ki, hogy ha $A(0)$ fenn áll, és minden x-re $A(x)$ maga után vonja $A(x+1)$ fennállását, akkor teljesül $(\forall x)A(x)$ is. Már 1920-ban igazolta Thoralf Skolem, hogy PA-nak létezik ω-n, azaz a *sztenderd modellen* kívül úgy nevezett nem-sztenderd modellje is. PA-nak ω (vagy $\mathbb{N}$) modellje, de nem csak ez az egyetlen halmaz, amelynek elemei teljesítik PA axiómáit. Van olyan $\mathbb{M}$ halmaz, amelyben ugyan benne vannak a 0, 1, 2 ... „rendes" számoknak megfelelő elemek, de vannak olyanok is benne, amelyek ezektől mind különbözőek és mégis teljesítik PA axiómáit. Nem arról van szó, hogy a sztenderd természetes számok közé beékeltünk törteket, hanem arról, hogy vannak „végtelen nagy" természetes számok, amik minden sztenderd természetes számnál nagyobbak. Ezekre is igaz a teljes indukció axiómája, vagyis azzal a furcsa tulajdonsággal rendelkeznek, hogy amikor egy $A(x)$ tulajdonságról belátjuk, hogy öröklődik n-ről $n+1$-re, akkor a sztenderd számokat „elhagyva" nem okoz törést a teljes indukció érvényességében a nem-sztenderdekre való áttérés. Ezek a nem-sztenderd modellek nagyon furcsák. Például még akkor sem alkotnak rekurzív halmazt, ha megszámlálható számosságúak, azaz ha ugyanannyi elemük van, mint $\mathbb{N}$-nek.

Lényeges még említeni az elsőrendű logika teljességi tulajdonságát. *Gödel teljességi tétele* értelmében egy elsőrendű logikai K axiómarendszer esetén egy S mondat akkor és csak akkor levezethető K-ból, ha S az K *minden* $\mathbb{M}$ modelljében igaz. Most képzeljük el, hogy van egy olyan $A(x)$ számelméleti predikátum, amely a $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, ... , $\overline{n}$, ... *számjelek* (a PA nyelvének „számnevei") mindegyike esetén olyan, hogy $A(\overline{n})$ levezethető a PA egy axiómákkal való bővítésében, mondjuk K-ból, de $\forall x\, A(x)$ se nem levezethető, se nem cáfolható K alapján. Tekintsük most a szakasz elején szereplő U mondatot, amely $(\forall x)A(x)$ alakú úgy, hogy $A(x)$ eldönthető predikátum és $A(\overline{0})$, $A(\overline{1})$, ... minden levezethető. Gödel teljességi tétele miatt ekkor van K-nak olyan $\mathbb{M}_1$ modellje, amiben U igaz, és van olyan $\mathbb{M}_2$ modellje is, amiben U hamis, hiszen U nem levezethető és nem is cáfolható, azaz nem lehet minden modellben igaz vagy minden modellben hamis. Azaz $\mathbb{M}_2$-ben U hamis, azaz ebben van olyan „Rontó Pál" természetes szám, amelyre $A(x)$ hamis, holott $A(x)$ minden sztenderd természetes számra igaz. Más modellekben (pl. $\mathbb{M}_1$-ben, amiben $(\forall x)A(x)$ igaz) nincsenek ilyen „Rontó Pálok".

Nagyon jól mutatja ezt a jelenséget a testaxiómákat kielégítő két ismert modell. Képzeljük el azt a formális matematikai nyelvet, amit a középiskolában tanultunk és az alap műveletek szabályait foglalja magába. Tekintsünk most el a $\leq$ relációtól, idézzük csak fel a és $+$,

$\cdot$ számolási szabályait, a kommutativitást, a kiemelést, hogy nullával nem osztunk, stb. A matematikusok úgy mondják, hogy az ezt leíró aximák a testaxiómák. Jól tudjuk, hogy valós számok halmaza $\mathbb{R}$ modellje a testaxiómáknak. Arról is biztos sokan hallottak, hogy a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza is testet alkot. Mármost érdekes, hogy a testaxiómák alapján az $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$ állítás nem eldönthető. Ugyanis a valós számok esetén hamis (nincs megoldása a valós számok halmazán az $x^2 + 1 = 0$ egyenletnek), ám a komlexeken igaz, hiszen az immaginárius egység, i, olyan, hogy $i^2 = -1$. Az van tehát, hogy $(\exists x)(x^2+1 = 0)$ eldönthetetlen pusztán a számolási szabályok alapján, és van olyan rendes modell, ahol valóban nincs megoldása $x^2 + 1 = 0$, ám a komplexek között ott a „Rontó Pál” i, amelyik miatt igaz lesz $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$ és megoldása lesz $x^2 + 1 = 0$-nek. Nem kell tehát ennél bonyolultabb dologra gondolni a természetes számok esetén sem. PA-nak van „jó” modellje, amiben U igaz és van „rossz” modellje, amiben hamis. Az persze ízlés kérdése, hogy mennyire utáljuk a „rossz” modelleket és mennyire békülünk ki azzal, hogy ω kicsit sincs egyedül PA modelljei között.

C) Most már elérkeztünk oda, hogy megismerjük a Dummett által felvázolt, használatelmélettel szembeni érvet, amit éppen Dummett jelen tanulmánya hivatott cáfolni.

> Az értelmezések közül egy gyakori a következő. Minthogy U se nem bizonyítható, se nem cáfolható, ezért kell, hogy legyen a rendszernek olyan modellje, amelyben igaz, és egy olyan is, amelyben hamis. Mivel tehát U nem igaz *minden* modellben, ezért amikor azt mondjuk, hogy igazként tudjuk felismerni U-t akkor ezt úgy kell értenünk, hogy „igaz a rendszer *szándékolt* modelljében”. Tehát egy elég határozott elképzelésünk van arról a fajta matematikai struktúráról, amire hivatkozni szándékozunk, amikor természetes számokról beszélünk; és erre az intuitív fogalomra való hivatkozás az, amely révén ismerjük föl U-t igaznak. Másfelől viszont sosem érhetjük el ennek az intuitív fogalomnak a teljes jellemzését a természetes számokra vonatkozó állítások bármely végesen összeállított rendszerének posztulálásával.

Lényeges megemlíteni, hogy a természetes számok elméletét nem lehet elsőrendű nyelvben úgy definiálni, hogy csak a sztenderd modell tegye igazzá ezt a definíciót. Ezen azt kell érteni, hogy PA-nak a halmazelméletben vannak még megszámlálható (ω-val azonos számosságú) modelljei is, amelyek nem izomorfak ω-val. Az izomorf itt azt jelenti, hogy a két modell elemei kölcsönösen egyértelműen és műveletartó módon megfeleltethetők egymásnak. Felvetődik a kérdés, hogy akkor az előbb mi volt az, amikor azt mondtuk, hogy a sztenderd modell ω. Úgy tűnik ezt elég jól tudtuk definiálni. Nos, a probléma súlyosságára Dummett a következőket hangsúlyozva tér ki:

> Így tehát van egy bizonyos, jól meghatározott fogalom, amit nem lehet teljesen jellemezni éppen amiatt, hogy pontos feltételezéseket teszünk róla. [...] Amikor megkíséreljük karakterizálni a természetes számok totalitását – pl. azzal a céllal, hogy rámutassunk, hogy a formális rendszerünk bármely modellje amelyben U hamis olyan elemeket fog tartalmazni, amik nincsenek benne ebben a totalitásban – olyan kifejezéseket kellene használnunk, mint „halmaz” vagy „véges sok”. Ha mármost megpróbáljuk felhasználni ennek a kifejezésnek a jelentését oly módon, hogy olyan feltételeket rakunk össze, amik tartalmazzák *ezt,* akkor viszont olyan rendszert kapunk, amely beágyazható egy a „természetes szám” definícióját tartalmazó rendszerbe. Tekintettel arra azonban, hogy a Gödel-tétel érvényben van minden olyan rendszerben, amely tartalmazza az aritmetikát, lenne egy olyan aritmetikai kijelentés, amely kifejezhető a rendszerben, de nem bizonyítható és amelyet azonban igazként ismerhetnénk fel: tehát nem sikerült teljesen karakterizálni a „természetes szám” fogalmát.

Dummett ezt az állítását később is megismétli. Világos, hogy a természetes számokat a halmazelméletben jól tudjuk definiálni, pont olyan jól, mint ahogy a mindennapi életben az 5-ről meg tudjuk mondani, hogy az természetes szám: a „rendes” természetes számok a halmazelméletben a véges Neumann-rendszámok: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ De mivel a halmazelmélet tartalmazza a természetes számokat, lesz egy olyan mondata, amely egy olyan aritmetikai állítást fogalmaz meg amely nem lesz sem levezethető a halmazelméletben, sem cáfolható (feltéve, hogy a halmazelmélet ellentmondásmentes). Ám, éppen azáltal ismerjük fel a szándékolt modellt, hogy ez a halmazelméleti Gödel-mondat benne igaz. Tehát nem kerültük ki a problémát: van olyan tudásunk, ami megmondja erről az aritmetikai állításról, hogy igaz a sztenderd modellben, miközben sehogy sem lehet pusztán nyelvileg definiálni a halmazelméletnek azt a sztenderd modelljét, amiről éppen beszélünk. A problémát (a sztenderd modell megfogalmazhatatlanságának, de felismerhetőségének problémáját) a halmazelmélet egy problémájává alakítottuk. A következő nyelvfilozófiai ellentmondásra leltünk tehát:

> Akik a szóban forgó helyzet fenti értelmezését fogadják el, arra a konklúzióra jutnak, hogy a „természetes szám” kifejezés ellenpélda arra a tézisre, hogy egy kifejezés *jelentése* a *használatában* megragadható. Ebben az összefüggésben a számnevek használata – az a használat, amelyben ők a válaszok a „Mennyi?”, „Milyen gyakran?” kérdésekre – problémamentes; minthogy tudjuk, hogyan vessünk számot kielégítő módon a használatuk ezen vonatkozásaival, csak az aritmetikai kijelentésekkel kell foglalkoznunk. És ezek között is csak az az, amit nem tudunk megtenni, hogy a „természetes szám” jelentését jellemezzük azáltal, hogy rögzítünk aritmetikai kijelentéseket, amiket fel kell tennünk és logikai következtetési szabályokat, amiket el kell fogadnunk. Mindenkinek, aki számára ismert a „természetes szám” kifejezés van ennek a jelentéséről egy tökéletesen világos intuitív képe; de ez a jelentés olyan, (eszerint a nézet szerint) hogy ennek a kifejezésnek az általunk történő használata – vagy bármilyen használata – semmilyen megközelítéssel sem kimerítő módon leírható.

A következőkben Dummett nagyon érdekes magyarázatot említ erre a jelenségre, ám rámutat arra, hogy a természetes számok furcsa sajátossága, hogy ugyan vannak problémás tulajdonságokat kifejező formulái – abban az értelemben, hogy az igazságuk nem ekvivalens a bizonyíthatóságukkal –, de egy részük, éspedig az úgy nevezett rekurzív aritmetikai formulák problémamentes tulajdonságokat fejeznek ki. A névvel rendelkező számok rekurzív tulajdonságai bárki számára ugyanazok. Ám, ha valaki a sztenderdekre gondol, egy másvalaki pedig a nem-sztenderdekre, akkor az összes természetes számok tulajdonságait érintő kérdésekben ellentétes ítéleteik lehetnek.

> Egy természetes ellenvetés, hogy mivel nem tudok belenézni egy másik ember elméjébe, hogy kiolvassam belőle, milyen jelentést társít a „természetes számhoz”, minthogy csak azzal tudok foglalkozni, amit csinál a kifejezéssel, ezért nem tudhatom biztosra, hogy ugyanazt társítja-e hozzá, mint én. Tehát egyfajta szkepticizmusnak nyílik tér hasonlóképpen ahhoz, mint

> amikor azt kérdezzük: „Honnan tudhatnám, hogy amit mindketten ‚kéknek' nevezünk, nem úgy néze ki neked, mint az, amit én annak nézek, amit közösen ‚pirosnak' nevezünk?" A két eset közti különbség az, hogy a feltételezett eltérés a „kék" egyéni jelentésében sosem kerülhet napvilágra, míg a „természetes számhoz" társított jelentés feltételezett eltérése napvilágra kerülhet. Ami azonban megmarad, hogy semmi sem lenne képes garantálni, hogy amit ő ért a „természetes szám" alatt, az ugyanaz, mint amit én értek.

Ezután egy viszonylag hosszú fejtegetésbe kezd arról, hogy milyen viszonyban van a jel és jelentése egymással, továbbá, hogy miben állhat egy jel jelentésének felismerése. Ráirányítja a figyelmet arra, hogy – elsősorban a használatelmélet – nem úgy képzeli el a jelölő-jelentés kapcsolatot, ahogy mondjuk Saussure, hogy az egy érme lenne, amelynek egyik oldalán a jelölő van és a túloldalán a jelentés és közösen alkotnák a jelkapcsolatot. Inkább úgy, mint amikor megadjuk egy sakkfigura jelentését a sakkjátékban. A játékban minimális szerepe van annak, hogy a sakkfigura hogy néz ki. A „huszár" játékbeli jelentését az adja, hogy az összes többi figurához képest milyen lehetőségei vannak a lépésre, ütésre, ill. mire jogosítja fel a játék. Megérteni a „huszár" szerepét tehát nem pusztán abban nyilvánul meg, hogy megmondjuk melyik karakter ő. Védelmébe veszi a használatelméletet abból a szempontból, hogy az ezen elmélet melletti elköteleződés nem pusztán annyit jelent, hogy kijelentjük, hogy a jelentést a használat határozza meg. Ez csak egy nulladik lépés és számos további analitikus tevékenységnek kell, követnie ezt, amelyek például arra irányulnak, hogy a használat pontosan miben is áll. Ezzel kapcsolatban egy mellékvágányt nyit, ami a matematikafilozófia számára igen érdekes lehet.

> Mielőtt a jelentés használat általi definiálása mellett kötelezzük el magunkat, egy másik dolog mellett is döntést kell hoznunk. Amellett, hogy válaszolunk arra a kérésre, hogy mely kifejezésekkel írható le a használat, ha ez egyáltalán olyan, ami leírásra alkalmas, arra is válaszolnunk kell, hogy miképpen ismerjük fel egy szó vagy kifejezés használatnak meghatározását helyesként vagy adekvátként: más szóval mi *alapozza meg* egy szó vagy kifejezés használatát. Ha általában matematikafilozófiával foglalkozunk, akkor a

> problémának ez a része elég makacs tud lenni: el kell tudnunk dönteni nem csak azt, hogy milyen elvek alapján ítélhetjük igaznak vagy hamisnak a matematikai állításokat, de azt is, hogy mi a *lényege* vagy *célja* az igazságérték eldöntésének. Ám, jelen esetben nem vagyunk érdekeltek ebben az összetett problémának a kifejtésében; számunkra az most a fontos, hogy milyen fényben tünteti fel a „természetes szám" kifejezés jelentését a Gödel-tétel, amennyiben a jelentés megértése magában foglalja az „igaz" predikátumnak az aritmetikai kijelentésekre vonatkozó alkalmazása megértését is.

Itt „lényegen" és „célon" Dummett valószínűleg azt érti, hogy az „igaz" minősítést mire akarjuk használni. Pl., hogy az igazságérték meghatározása milyen melléktermékekkel jár: akarjuk-e, hogy az igazságérték eldöntése véges eljárás legyen vagy elég, ha például indirekt egzisztenciabizonyítással jutunk el hozzá. Általában is itt arról lehet szó, hogy intuicionista vagy klasszikus logikát választunk-e a matematikai megértést vezérlő jelentéselmélet alapjaként.

3. Hogyan ismerhető fel igazként a Gödel-mondat?

Az utolsó mondatban Dummett végre visszatér az eredeti problémához. Eszerint a „jelentés a használatban rejlik" nyelvfilozófiai tézisre ellenpélda a „természetes szám" kifejezés, mégpedig a következők miatt. A jelentés fogalmának többek közt magába kell foglalnia az „igaz" predikátum értelmezését is. U igazsága nem kommunikálható, mert nem lehet levezetni (feltéve, hogy PA ellentmondásmentes). Két eset van: 1) U igazsága mégis felismerhető, és ekkor birtokában vagyunk egy olyan képességnek, ami annak ellenére napvilágra hozza az igazságértéket, hogy nem kommunikálható hogyan; ez tehát valóban ellentmond a használatelméletnek. 2) U igazsága csak abban az értelemben ismerhető fel, hogy a szándékolt modellben igaz, ami viszont azért probléma, mert akkor az elménk képes kiválasztani a sztenderd modellt, ami azonban lehetetlen, hiszen ez a PA nyelvére alapozva karakterizálható egyértelműen. A későbbiekben Dummett amellett érvel, hogy miért nem lesz mégsem ellenpélda U felismerhető igazsága a használatelmélettel szemben. Ezen a ponton fordul rá az ellentmondás feloldására:

> Annak a megközelítésnek a hibája, amiről beszélünk inkább a modell fogalmának helytelen alkalmazásában rejlik. Ez a fogalom, a hozzá illő matematikai elméletben

> teljesen precíz: a halmazelméletben beszélhetünk axiómarendszerek modelljeiről, vagy ahogy a predikátumkalkulus teljességi tételének bizonyításában beszélhetünk a természetes számok vagy ezek függvényeinek fogalmával modellekről. Ezekben az esetekben modellről egy matematikai elmélet keretei között beszélünk, és ezen elméletek segítségével definiáljuk, mi az a modell. A Gödel-tétel szóban forgó megközelítése azonban a modell fogalmával úgy dolgozik, mintha bármilyen leírástól függetlenül lenne adva: mint egyfajta intuitív fogalom, amit a lelki szemeink segítségével szemlélhetünk anélkül, hogy találnánk bármilyen leírást, ami ezt egyértelműen meghatározza. Ennek azonban semmi köze ahhoz a modell-fogalomhoz, amit a matematika jogosan nevez annak. Nincs olyan mód, amivel „adott" lehetne egy modell, de ne kéne megadni a leírását. Ha nem adható meg számunkra a számelmélet egy modelljének egy kész jellemzése, akkor egyáltalán nincs más mód amivel ennek a teljes leírásnak a hiányában el tudnánk jutni a számelméleti struktúra egy kész fogalmi konstrukciójához.

Dummett szerint az ellentmondást megalapozó érvben a modell fogalma nem függetleníthető attól a nyelvi környezettől, amiben a modell fogalmát definiáljuk. Ez a nyelvi környezet a halmazelmélet formális nyelve. Tehát csak akkor tekinthető a modell fogalma nyelvfüggetlenül adott objektív létezőnek, ha a halmazelméleti realizmus álláspontját tesszük magunkévá. Ez azonban megint azt jelenti, hogy a használatelméletből ellentmondást kihozó érv során éppen azt feltételezzük, ami nincs benne a használatelmélet ontológiájában és aminek a védelmében az ellentmondás meg lett szerkesztve: hogy nem valamely leírásukkal adott entitásokról beszélünk, hanem a létezésüket mindenféle verbalitás nélkül feltételezzük. A modell fogalmának említése az ellentmondást megalapozó érvben tehát, Dummett szerint, inkoherens.

> Nem tudjuk formálisan karakterizálni a természetes számokat izomorfizmus erejéig. Bármely formális karakterizációban le fogunk tudni írni olyan modellt, amit nem-sztenderdként ismerünk fel. Bár, ebben van valami körkörösség, mivel amikor a természetes számról beszélünk, akkor ezt nem tudjuk a maga teljességében megtenni egy teljes karakterizációra

> hivatkozva; a sztenderd modellre hivatkozva tudjunk csak megmagyarázni. Ennek a fogalomnak a számára meg kell adnunk egy leírást, amelynek vagy a „természetes számra” vagy ehhez közeli pl. a „véges” szóra kell hivatkoznia.

Itt érdemes megemlíteni, hogy ha van PA ellentmondásmentességét igazoló finit, de nem aritmetikai bizonyítás, amelynek a létét korábban Gödel sem zárta ki, éppen olyan fogással él, amely a „véges” természetes szám fogalmáról beszél. Ez azért lényeges, mert Gödel második nemteljességi tétele nem PA rekurzív bővítései ellentmondásmentességének finit bizonyítását zárja ki, hanem olyan finit konzisztenciabizonyításokat, amelyek PA nyelvén formalizálhatók. Márpedig PA nyelvén lehetetlen kifejezni a „véges” természetes szám fogalmát, mert akkor PA képes lenne különbséget tenni sztenderd és nem-sztenderd számok között, amit viszont nem tud megtenni, lévén mindkettő PA-nak modellje.

Ennek ellenére van valami, ami alapot adhat arra, hogy értelmezzük az „igaz” predikátumot, de ez nem a modell fogalmára hivatkozva történik. A Gödel-tétel ugyanis nem azt mondja, hogy a Gödel-mondat igaz, de nem levezethető. Hanem azt, hogy *ha* az aritmetika ellentmondásmentes és helyes, akkor a Gödel-mondat igaz.

> Van azonban valami, ami arra késztet minket, hogy az U állítást igazként ismerjük fel, és ami tehát túlmegy a természetes számok karakterizációján [...]. Az, hogy U-t igazként ismerjük fel azáltal, hogy nem-sztenderdként ismerjük fel a modellt, amiben ő hamis lenne, olybá tűnik, olyan elvre hivatkozva történik, ami megkülönbözteti a sztenderd modellt a nem-sztenderdtől és amire a formális rendszer nincs megtervezve. Ezzel azonban elfedjük a tényt, hogy ez a különbségtétel semmivel sem írható le, csak a „természetes számra” való hivatkozással vagy valami hasonló fogalommal, pl. a „számnévvel”. Valóban, abból, hogy $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz triviális következtetni arra, hogy $\forall x \ A(x)$ kijelentés igaz. Az érvelés alapja, ami nincs beépítve a rendszerbe, és amit alkalmazunk elérkezve arra a megállapításra, hogy $\forall x \ A(x)$ igaz, nem ez az átmenet, hanem inkább az, ami arra késztet minket, hogy elfogadjuk, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz. A

> modellelméleti szóhasználat homályossá teszi ezt az egyébként nyilvánvaló tényt. Amikor ugyanis arról beszélünk, hogy a $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz egy modellben, akkor átsiklunk afelett, hogy a „minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$-t képesek vagyunk igazként felismerni”, nem ugyanaz, mint a „képesek vagyunk felismerni igaznak, hogy minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$”.

Minden $\overline{n}$ számnévre „igazként ismerni fel, azt hogy $A(\overline{n})$ igaz” nem ugyanaz, mint „igazként ismerni fel azt, hogy minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$”. A sztenderd modellben (azaz modellelméleti értelemben) ez a kettő ugyanaz. A bizonyításelmélet szemszögéből azonban nem mindegy, hogy végtelen sok bizonyításunk van vagy csak egy. És valóban! Az $A(x)$ predikátum olyan speciális tulajdonságú a Gödel-tétel bizonyításában, hogy PA ellentmondásmentességi bizonyításának ismeretében véges lépésben igazolni tudjuk, hogy U igaz.

> Az érv amellett, hogy U igaz abból az ismeretből ered, hogy a kérdéses formális rendszer konzisztens. Továbbá az is ismert, hogy minden eldönthető $B(x)$ predikátumra és minden $\overline{n}$ számnévere $B(\overline{n})$ bizonyítható, ha igaz, és $\neg B(\overline{n})$ bizonyítható, ha $B(\overline{n})$ hamis (az igazság és hamisság az ilyen állítások esetén problémamentes). A mi $A(x)$ predikátumunk olyan, hogy ha $A(\overline{n})$ hamis egy $\overline{n}$ számnévre, akkor konstruálhatunk $\forall x\ A(x)$ számára egy bizonyítást. Ebből pedig – azzal a feltétellel, hogy a rendszer konzisztens –, az következik, hogy az $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... kijelentések mindegyike igaz.

Dummett gondolatmenete a következő. Feltételezve PA ellentmondásmentességét, teljesül, hogy ha valamely $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$ hamis, akkor lévén $A(x)$ rekurzív, így igazsága problémamentes, $\neg A(\overline{n})$-nek van bizonyítása és ez lefordítható PA nyelvére. Ez viszont $A(x)$ értelmezése miatt éppen azt jelenti, hogy n kódolja U bizonyítását, azaz ebben az esetben U bizonyítható. U ugyanis a következő mondat:

$$(\forall x)\neg(x\mathrm{Pr}\overline{g})$$

ahol $x\mathrm{Pr}y$ pontosan az a formula, ami azt fejezi ki, hogy az x számkódú mondatsorozat bizonyítását kódolja az y számkódú mondatnak. Bizonyára ismeri az Olvasó hogy vannak speciális matematikai területekre kitalált automatikus bizonyításellenőrző szoftverek. Ha beírjuk egy állítás bizonyítását, akkor a szoftver a bizonyítást valahogy a számítógép számára alkalmas kóddal kódolja és erről ellenőrzi, hogy szintén általa kódolt állításnak bizonyítása-e. Ezt elég gyorsan megteszi. Nos, U éppen azt mondja, hogy „egyetlen x szám sem kódolja a g kódú mondat bizonyítását", ahol g éppen az U mondatnak (vagy vele logikailag ekvivalensnek) a kódja. Ha tehát lenne n, amire $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ hamis, akkor $\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g}$ igaz lenne és mivel a $x\mathrm{Pr}y$ predikátum esetén egybeesik a bizonyíthatóság és az igazság, úgy n éppen U bizonyítását kódolná, ami Gödel tétele értelmében nem létezik.

$x\mathrm{Pr}y$ eldönthető prédikátum, minden n-re $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ igazságértéke azonban csak akkor derülne ki, ha képesek lennénk végignézni az összes n természetes számra, hogy $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ igaz-e. Márpedig felismerni tudni, hogy minden n-re $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ igaz, nagyon nem ugyanaz, mint minden n-re felismerni tudni, hogy $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ igaz. Minden adott természetes számra véges lépésben kiderül számunkra, hogy $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$ igaz-e. Gödel azonban éppen azt igazolta, hogy nincs olyan véges eljárás, ami eldönti, hogy minden n-re igaz-e $\neg(\overline{n}\mathrm{Pr}\overline{g})$.

Gödel tétele éppen azt mondja, hogy U nem bizonyítható, feltéve, hogy PA ellentmondásmentes, ezért minden $\overline{n}$ számnévre $A(\overline{n})$-nek igaznak kell lennie. Emellett pedig $\forall x\ A(x)$, azaz U is igaz, hiszen ennek pontosan az a (szándékolt interpretációbeli) feltétele, hogy $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... mind igaz legyen. Ha tehát megvan PA ellentmondásmentességének (véges) bizonyítása, akkor igazolni tudjuk (véges lépésben) azt is, hogy $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, ... mind igaz, sőt azt is, hogy U is igaz. Néhány lényeges distinkciót kell azonban tennünk. Amikor azt igazoljuk, hogy U igaz, akkor ez nem egy PA-beli igazolás, hanem annak a rendszernek a bizonyításfogalmát használjuk, amiben PA ellentmondásmentessége lett igazolva. Éppen ezért U nem a sztenderd modellben lett igaz, hanem például a transzfinit rekurzív aritmetika eszközeivel lett igazolva, amiben Gentzen eljutott PA ellentmondásmentességéhez. Egy ilyen, a PA konzisztenciáját igazoló keretelméletben megszerkeszthető az igazság fogalma, egyfajta rekurzív módon. Az első reduktív osztály, amelynek a stabil igazságfogalmára építhető az új igazságfogalom, az az eldönthető predikátumok, hiszen ezek esetén az igazság problémamentes (az igazság és a PA-beli bizonyíthatóság azonos). A második reduktív osztály, a $\forall x\ A(x)$ alakú formulák osztálya, amelyekben $A(x)$ eldönthető predikátum. Ezekre a formulákra az igazság nem lesz azonos a PA-beli bizonyíthatósággal. Erre jó példa U, ami nem lesz PA-bizonyítható, ám bizonyítható a keretelméletben.

Érdemes megjegyezni, hogy az előbbi gondolatmenetre úgy hivatkoznak, mint a Gödel-mondat igazságára vonatkozóan megfogalmazott Dummett-féle szemantikai érvre. Egyes felfogások ezt a bizonyítást úgy fogalmazzák át, hogy U intuicionista bizonyítását lehessen megszerkeszteni belőle.[Wright, 1994] Mások vitatják ezt az értelmezést.[Serény, 2011] Mindenképpen érdemes megjegyezni, hogy a mód, ahogy – a Gentzen-féle konzisztenciabizonyítással a kezünkben – Dummett felállítja az aritmetikai igazságpredikátum elméletét, kísértetiesen hasonlít Stephen Kleene rekurzív igazságdefiníciójához.[Kleene, 1952, p. 499]

Ki kell térnünk arra, hogy mely közvetlen érvek szólnak azon állítás ellen, hogy a természetes szám fogalma ellenpélda a nyelvfilozófiában arra, hogy a használat meghatározza a jelentést (és így az igazságot). Dummett rámutat, hogy a nyelvben számtalan határozatlanság van, sőt, vannak olyan kifejezések, amelyek olyan módon inherensen határozatlanok, hogy semmilyen módon nem lehet – egy bizonyos pontosságnál jobban – teljes jellemzést adni a jelentésükre. Példaként azt a szót hozza fel, hogy „vicces". A nyelvhasználók döntő többsége pontosan tudja, hogy mi vicces és mi nem. Ám lehetetlen pontosan körülírni, hogy mi vicces. Hasonló példa volt még erre a sakkfigura és a szín. Hiába definiáljuk jól az egyedi sakkfigurát a kinézete alapján, nem az teszi futóvá a futót, ahogy kinéz, hanem meg kell találni azt a leírási módot, ami alkalmasan határozza meg a futó fogalmát. Ez pedig a sakkjáték szabályaiban rejlik, és abban, ahogy a futó képességei a többi sakkfigura képességeihez viszonyul. A sakkjáték kontextusában definiálható, hogy mit jelent futónak lenni, vagy legalább is a játék célja szempontjából elegendő információt tartalmaz a leírás, hogy bármely a sakkjáték kontextusában feltett kérdésre meghatározott válasz létezzen. A szín példája szintén a nyelv, mint kommunikációs forma korlátaira mutat rá és diszkvalifikál bizonyos kérdéseket, azokat ebből a szempontból értelmetlennek értékelve. Lehetséges, hogy a kék és a piros szót jól használjuk, de nem garantálható (sőt eléggé valószínű), hogy az én kékem más lesz mint a te kéked. Semmi sem garantálja, hogy amikor mindketten kéket mondunk, akkor mindkettőnknek ugyanaz az árnyalat jelenik meg a szemünk előtt. Lehet, hogy én egyszerűen mindent pirosasabb árnyalatban látok, mint te. Ez az eltérés azonban sosem fog napvilágra kerülni, mert minden egyazon mértékben pirosasabb a számomra. Ad abszurdum még az is lehet, hogy a kék és a piros színt az agyam felcseréli és *valójában* én azt látom kéknek, amit te pirosnak. Ez a „valójában" azonban kommunikálhatatlan, tetten érhetetlen.

A másik lehetőség arra, hogy fogást találjunk a használatelmélet elleni érven az, hogy rámutatunk az olyan totalitásokra utaló kifejezéseknek, mint a „rendszámnak" és a „természetes számnak" sajátos viselkedése van. Mindkettő jelentése valamilyen mértékű inherens homályosságot, határozatlanságot mutat. Akárhogy is adunk meg egy halmazt, ami a rendszámok egy jól definiált összességét alkotja, lesz egy olyan új halmazelméleti entitás, amellyel kibővítve ezt a halmazt szintén joggal mondhatjuk, hogy az a rendszámok halmaza. Dummett „határozatlanul kiterjedő" [indefinitely extensible] fogalomnak nevezi az ilyet. Határozatlanul kiterjedő egy fogalom, ha tartozik hozzá egy olyan természetes általánosítási módszer, amelyet tetszőleges sokszor alkalmazva tetszőlegesen nagy kiterjedésűvé bővíthető a fogalom terjedelme. A véges Neumann-rendszámok ω halmaza a „rákövetkezéssel" illetve az „uniózással" vagy „rendszámlimesz-képzéssel" szintén folytatható: ω is „rendszám", bár nem véges, $\omega + 1$ is „rendszám", majd az $\omega + 2$ és így tovább, amelyek aztán az ω elemeivel együtt $\omega + \omega$-t, vagyis a 2ω-t fogják alkotni. Ami szintén bővíthető a rákövetkezéssel és az összeuniózással. A „rendszám" fogalma tehát feltételezi a rákövetkezést és a limeszképzést, mint folytatási lehetőséget (ebből a szempontból jól meghatározott), de nem határozza meg a „rendszám" fogalmának terjedelmét, azaz az egyes rendszámokat.

Ezzel szemben – fogalmaz Dummett – a „természetes szám" teljesen jól megadja mi természetes szám. Azt is meghatározza, hogy az egyes természetes számoknak mik a tulajdonságaik (tehát ez a fogalom nem terjedelem vonatkozásában határozatlan), ám nem határozza meg a minden természetes számokra vonatkozó állítások igazságértékét. Részben ez annak köszönhető, hogy a természetes szám tulajdonságait körülíró axiómarendszerben eleve benne van a teljes indukció axiómája, ami a minden természetes számra vonatkozó állítások igazságának egy feltételéről szól. Egyáltalán nem határozatlan tehát, hogy mely entitások tartoznak a természetes szám fogalma alá. Ezek, egy meghatározatlan metanyelven, a nulla és *véges* rákövetkezői. Ám, ha jól meggondoljuk, ez az iménti definíció körkörös: éppen úgy említi a természetes szám kifejezést (a „véges" szó használatával), mint amikor a természetes számok sztenderd halmazelméleti modelljét úgy definiáljuk, hogy annak elemei a „véges Neumann-rendszámok". Ha instant definícióval próbálkozunk (a természetes számok „egyenkénti" definiálásával), akkor ugyanabba a problémába ütközünk, mint a sakkfigurák esetén, amikor a külalakjuk alapján akartuk megmondani mik azok: ez a definiálási törekvés nyilvánvalóan kudarcot fog vallani. Ha azonban a sakkfigurák képességeinek leírásához hasonlóan a szabályok lefektetésével, vagyis axiómák posztulálásával próbálkozunk, akkor a Gödel-tétel miatt lesznek olyan univerzális állítások, amelyek igazságfogalma határozatlan marad, azaz nem fogjuk tudni kimerítően meghatározni a természetes számok tulajdonságait.

4. Konklúzió

Nem csak citálva, de újraértelmezve Michael Dummett érvét, a nemteljesség, ami abban nyilvánul meg, hogy nem lehet nyelvileg (rekurzívan) úgy posztulálni a természetes számok tulajdonságait, hogy az egy kimerítő leírás számára adjon alapot, nem ellenpélda a használatelméletre. Ez a nemteljesség nem a használatelméletnek magának mond ellent, hanem a nyelv egy sajátosságát tükrözi. Ez a példa valójában a természetes számokra vonatkozó platonista felfogásnak mond ellent, ami feltételezi, hogy minden aritmetikai állítás vagy igaz, vagy hamis. Vagy a halmazelméleti realizmusnak mond ellent, ami a halmazokat minden előzetes nyelvi-fogalmi apparátus rögzítése nélkül létező, objektív entitásoknak gondolja, és amikre vonatkozóan minden állítás vagy igaz, vagy hamis. Ha a kritikus érvelő a használatelméletet ellentmondásosnak gondolja, akkor a használatelmélet keretei között kell az ellentmondást megtalálnia. A modell fogalmára mutogatva el kell ismernie, hogy előfeltételezte a halmazelméleti realista álláspontot, így nem érhető el a kívánt ellentmondás a használatelméleten belül.

Hivatkozások

[Dummett, 1963] Dummett, M., *The Philosophical Significance of Gödel's Theorem.* In: Truth and Other Enigmas. Duckworth, 1978.

[Wright, 1994] Write, C., *About „The Philosophical Significance of Gödel's Theorem": Some Issues,* in: The Philosophy of Michael Dummett. Ed.: B. McGuinness and G. Oliveri. Kluwer Academic Publishers, 1994, pp. 167-202.

[Serény, 2011] Serény György, *How do We Know that the Gödel Sentence of a Consistent Theory Is True?* , Philosophia Mathematica, Volume 19, Issue 1, Pages 47–73.

[Kleene, 1952] Kleene S. C., *Introduction to Metamathematics.* Wolters-Noordhoff & North-Holland Pub. Co., 1952, 1971.