Instabilitás a logikában*

Molnár Zoltán†

2009

Kivonat

Az instabilitás matematikai logikai fogalmának segítségével mutatok be két logikafilozófiai kérdést. Előadásom első felében röviden kitérek az önreferenciális rendszerek instabilitásának egy lehetséges forrására, majd rámutatok az instabilitásra vonatkozó tételek és Gödel második nemteljességi tételének szoros analógiáira. Kevésbé formális tárgyalásra térve olyan hétköznapi példákat sorolok fel, melyekből ki fog kerekedni a klasszikus levezethetőség fogalmának két nemklasszikus alternatívája (az intuicionista és a releváns logika). Foglalkozom azzal a kérdéssel, hogy lehetséges-e ú.n. erős ellenpéldákat találni a nemklasszikus logikákat igazolandó. Javaslok egy megoldást, ami szerint ha ezeket a logikákat a Gentzen-féle természetes levezetési rendszerben hasonlítjuk össze, akkor csak „gyenge" ellenpéldákat találhatunk. A szituációt laza párhuzamba állítom Smullyan „instabil érvelőinek" magatartásával és a Putnam által elemzett liberalizált intuicionista állásponttal.

1. Az instabilitás fogalma és motivációja

Az instabilitás az önreferenciális rendszerek egy tulajdonásga, melyet Smullyan vezett be a nemteljességi tételekről szóló tanulmányában[1]. Egy *önreferenciális rendszer* olyan elsőrendű elmélet melyet egy

$$S = (\mathcal{S}, \mathrm{PC}, \mathtt{f}, \vdash, \Box,)$$

rendszer reprezentál, ahol $\mathcal{S}$ a mondatok halmaza, PC a propozicionális logika szerint érvényes mondatok halmaza, $\mathtt{f}$ a hamis mondat jele, $\vdash$ egyargumentumú reláció a mondatok felett, melyet levezethetőségnek mondunk és $\Box$ mondatokból

*Előadás, mely elhangzott: Theoretical Philosophy Forum, 2009. március 2., ELTE BTK, Filozófiai Intézet, url: `http://phil.elte.hu/tpf`

†BME, Matematikai Intézet, Algebra Tanszék, email: `mozow@math.bme.hu`

[1] [Smul], pp: 153-4.

mondatokat készítő leképezés, az úgy nevezett tárgynyelvi levezethetőség, melyekre igazak az alábbiak:

$$\text{(taut)} \qquad \vdash \mathrm{PC}$$

$$\text{(norm)} \qquad \vdash p \quad \rightsquigarrow \quad \vdash \Box p$$

azaz S-ben a propozicionális logika érvényes mondatai levezethetők és ha egy mondat levezethető, akkor tárgynyelvben megfogalmazott levezethetősége is levezethető.

Példaként a Peano-aritmetikát hozzuk, ahol $\Box$ a 'Lev' mondatfunktor felel meg, melynek adekvát jelentése:

$$\text{`}\mathrm{Lev}\, p\text{'} \quad \overset{\text{jelenti}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{"`}p\text{' levezethető"}$$

Ezesetben a (norm) tulajdonság interpretációja az, hogy „p levezetése igazolja, p levezethetőségének levezethetőségét", ugyanis $\mathrm{PA} \vdash p$ esetén[2] p levetezése kódolható magában PA nyelvében és így levezethető lesz a „létezik olyan k szám, mely p levezetését kódolja" jelentésű '$k \,\mathrm{Lev}\, p$' mondat.

A (norm) megfordítása a stabilitás.

1. Definíció – *Stabilitás, instabilitás* – S **stabil**, ha

$$\vdash \Box p \quad \rightsquigarrow \quad \vdash p$$

és **instabil**, ha

létezik olyan p, hogy bár $\vdash \Box p$, de $\nvdash p$

Világos, hogy ha S instabil, akkor konzisztens. Ugyanis ellentmondésos elméleben minden mondat levezethető. Ha tehát – például az instabilitás okán – létezik olyan mondat, mely nem levezethető, akkor bizotos, hogy nem inkonzisztens. Éppen ezért mondhatjuk, hogy az instabilitás a konzisztencia egy erősebb (vagy ha úgy tetszik szigorúbb) változata.

Honnan a fogalom? Ezt az alábbi tétel bizonyításából olvashatjuk ki.

1. Tétel – *Absztrakt Gödel-tétel* – Legyen S olyan negációteljes rendszer, melyben van olyan G mondat, hogy

$$\vdash G \equiv \sim \Box G \qquad \text{[diag]}$$

Ekkor S vagy **inkonzisztens** vagy **instabil.**

---

[2] PA a Peano-aritmetika kódja.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S konzisztens.

1. Tf. $\vdash G$. $\overset{[\text{diag}]}{\rightsquigarrow}$ $\vdash\sim\Box G$ $\overset{\not\vdash\mathtt{f}}{\rightsquigarrow}$ $\not\vdash\Box G$

$$\overset{[\text{norm}]}{\rightsquigarrow} \ \vdash \Box G$$

$\rightsquigarrow$ ilyen eset nincs.

2. $\overset{[\text{PC}],[\text{diag}]}{\rightsquigarrow}$ $\vdash\sim G \equiv \Box G$

Tf. $\vdash\sim G$. $\overset{[\text{diag}]}{\rightsquigarrow}$ $\vdash \Box G$ $\overset{\not\vdash\mathtt{f}}{\rightsquigarrow}$ $\not\vdash G$
Az instabilitást okozó mondat: G. ■

2. PA instabilitásának kérdése

2.1. Negatív eredmények

Először nézzük meg a *bizonyításelmélet* felől, tud-e instabil lenni PA. Van-e p, hogy

$$\mathrm{PA} \not\vdash p, \text{ de } \mathrm{PA} \vdash (\exists k)(k \,\mathrm{Lev}\, p)$$

Tegyük fel, hogy PA instabil. Ha a $(\exists k)(k \,\mathrm{Lev}\, p)$ mondat levezetésének utolsó lépése konstruktív, azaz efféle:

$$\frac{k_0 \,\mathrm{Lev}\, p}{(\exists k)(k \,\mathrm{Lev}\, p)},$$

akkor k_0 a p egy bizonyításának kódolja. Ha tehát tudjuk mi k_0, akkor ez egy bizonyítást kódol, amit visszafordíthatva a metanyelvre kapjuk p egy levezetését, ami ellentmond annak, hogy p nem levezethető. Arra jutottunk tehát, hogy megfogalmazhatjuk:

SEJTÉS – PA instabilitását nem mutathatja „konstruktív" bizonyítás.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy ha a metaelmélet konzisztens, akkor konstruktív módon nem igazolható az instabilitása. Ugyanis, amint „meglátnánk" az instabilitást okozó mondat Gödel-számát, a metaelmélet azonnal inkonzisztenssé válna. Emiatt egy konzisztens metaelmélet – mintegy a fekete lyukak eseményhorizontjához hasonlóan – elfedi előlünk az instabilitást okozó mondatot.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy *modellelméleti* értelemben inkonstruktív bizonyítás mégúgy sem igazolhatja az instabilitást. Tegyük fel ugyani, hogy a halmazelmélet ellentmondásmentes. Ekkor, minthogy ω modellje PA-nak, PA konzisztens.

Tegyük fel most is, hogy $\mathrm{PA} \vdash (\exists k)(k \,\mathrm{Lev}\, p)$. Ekkor az ω-helyesség[3] miatt

$$\omega \models (\exists k)(k \,\mathrm{Lev}\, p)$$

de ekkor ott van ω-ban az a k_0, melyet visszafejtve megkapjuk p levezetését és ezzel ellentmondásra jutunk. (Megjegyezzük, hogy az ω-helyesség felhasználásával PA stabilitása direkt úton is igazolható.)

SEJTÉS – PA *relatív stabilitása* – PA konzisztenciáját az instabilitás megmutatásával a halmazelmélet nem tudja igazolni.

Ez a sejtés rokonítható Gödel második nemteljességi tételével. Mi okozza ezt a szoros párhuzamot? Tegyük fel, hogy PA ω-*konzisztens*, azaz

$$\text{ha } \mathrm{PA} \vdash (\exists x)\varphi(x), \text{ akkor létezik olyan } n, \text{ hogy } \mathrm{PA} \vdash \varphi(n)$$

Ekkor világos, hogy létezik – azaz konstruktívan létezik – az a k_0, melyre $k_0 \, Lev \, p$, azaz ekkor PA stabil. Ez lenne az ω-konzisztenciára hivatkozó stabilitásbizonyítás.

2.2. Példa relatív instabil elméletre

Eddig láttunk relatív stabil elméletet. Most lássunk biztosan relatív instabil elméletet.

2. TÉTEL – *Példa relatív instabil elméletre* – $\mathrm{PA}+ \sim G$ instabil, ha a halmazelmélet ellentmondásmentes.

Bizonyítás. $\mathrm{PA}+\sim G \vdash \sim G$ triviális.

$$\overset{[\mathrm{diag}]}{\rightsquigarrow} \quad \mathrm{PA}+\sim G \vdash \Box G \quad \overset{\mathrm{rel.\ konz.}}{\rightsquigarrow} \quad \mathrm{PA}+\sim G \nvdash G$$

Itt tehát az instabilitást okozó mondat: G. ■

Ebből persze az is következik, hogy $\mathrm{PA}+ \sim G$ modelljei nem ω-helyesek. Igazolható, hogy $\omega \models G$, ezért ha PA olymódon lenne ellentmondásmentes, hogy G-instabil lenne (azaz instabilitását a $\vdash\sim G$ és $\nvdash \Box \sim G$ kijelentések okoznák), akkor a halmazelmélet ellentmondásos lenne, hisz az $\omega \models \mathrm{PA}$-ből $\omega \models\models\sim G$ is következne.

2.3. További megjegyzések

Tovább erősíthetjük a Gödel tételek és az instabilitásra vonatkozó tételek párhuzamát, ha megfogalmazzuk az insabilitás tárgynyelvbeli megfelelőjét. Vegyük a következő mondatot:

$$\mathrm{Inst}(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \Box\Box G \ \& \ (\sim \Box G)$$

[3] Az aritmetika nyelvének egy Γ elmélete ω-helyes, ha $\omega \models \Gamma$, azaz ha Γ minden mondata igaz a természetes számok halmazában.

Ez annak a metanyelvi mondatnak a fordítása, hogy „G a rendszer instabilitását okozza”.

3. TÉTEL – *Az instabilitás bizonyíthatatlansága* – Ha PA ellentmondásmentes, akkor

1. $\mathrm{Inst}(G)$ nem bizonyítható PA-ban.
2. $\mathrm{Inst}(G)$ nem bizonyítható $\mathrm{PA} + (\sim G)$-ben.

Ugyanis, $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{Inst}(G) \supset G$, mert $\mathrm{PA} \vdash \sim \Box G \equiv G$. Tehát ha $\mathrm{Inst}(G)$ levezethető lenne, akkor G is. 2. Ha $\mathrm{PA} + (\sim G) \vdash \mathrm{Inst}(G)$ lenne, akkor $\mathrm{PA} \vdash \Box G \equiv \sim G$ miatt $\mathrm{PA} + (\sim G) \vdash \Box G$ lenne, ami ellentmondást jelentene a metaelméletben.

Megjegyzések. Az 1. eset csak a levezethetetlen mondatok sorát bővíti. Konkrétan mondható, hogy $\mathrm{Inst}(G)$ nem igaz ω-ban, így szerencsére nem is levezethető. A 2. eset már inkább gödeli. $\mathrm{PA} + (\sim G)$ ugyanis instabil, ha PA ellentmondásmentes, márpedig ekkor az a mondat, hogy ‘G a rendszer instabilitását okozza’ ekkor nem lesz levezethető, hasonatosan az ellentmondásmentes PA-beli, a konzisztenciát kifejező mondattal[4].

3. Instabilitás az informális logikában

Instabilitásokat keresünk a hétköznapi érvelések között, a következő program szerint. A p instabilitást a következőképpen interpretáljuk:

„Tud arról a kényszerképzetéről, hogy p érvényes, bár nem tartja meggyőzőnek p-t”

Tehát kerestetik olyan érvelő, aki hisz valamilyen következtetsben, bár nincs meggyőződve arról, hogy az biztosan helyes-e. Illetve vannak-e olyan következtetési szabályok, melyek érvényesek, de nem meggyőzőek? Ilyen furcsaság[5] például Epimenidész paradoxonából származtatható.

1. példa. Tegyük fel, hogy hajónkkal kikötünk Kréta szigetén. Semmi nincs a parton, csak egy kunyhó, ahol Epimenidész lakik. Mikor odalépünk hozzá ezzel az állítással fogad minket: „Minden krétai hazudik.” Igazat mond-e Epimenidész (elhiggyük-e, amit mond), ha tudjuk, hogy krétai?

[4]Azaz a $\mathrm{Cons} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sim \Box \mathtt{f}$ tárgynyelvi mondattal.

[5]Furcsaságokat és nem ellentmondásokat, az igazság és hamisság eldöntésben mutatkozó „instabilitásokat” és nem inkonzisztenciát keresünk. Ennél fogva a hazug antinómiája nem fog szerepelni a példák között.

Vagy igazat mond, vagy hazudik. Igazat nem mondhat, mert ebben az esetben – lévén krétai – hazudik. Ha viszont hazudik, akkor állításnak tagadása áll, azaz „Van olyan krétai, aki igazat mond”. De Epimenidész nem mond igazat, így *kell, hogy legyen még egy krétai rajta kívül is a szigeten,* akiről ráadásul még azt is tudjuk, hogy igazat mond. Egyeseknek feltűnhet, hogy anélkül tudjuk, hogy Kréta lakossága legalább két fő, hogy láttunk volna egy másik krétait. Úgy tűnik, mintha a logikának olyan kényszerítő ereje lenne a valóságra vonatkozóan, hogy képes pusztán nyelvi okokkal igazolni egy krétai polgár létezését. Aki ezt elfogadja, de azért némileg zavarja az „igazságérzetét”, az máris az instabil logikusok közé sorolhatja magát.

Tekintsünk egy matematikai példát.

2. példa. Van n darab skatulya, amelyekbe elhelyeztünk összesen $n+1$ darab golyót. Igaz-e, hogy van olyan skatulya, amiben legalább két golyó van?

Hát persze, hogy igaz. Hiszen ezt mondja ki a skatulyaelv. De még igazolni sem nehéz, csak indirekt okoskodáshoz kell folyamodnunk. Tegyük fel, hogy nincs ilyen doboz. Ekkor minden dobozban legfeljebb csak egy golyó van, azaz az összes dobozban legfeljebb n. Ez persze ellentmond annak, hogy a dobozokba összesen $n+1$ golyót helyeztünk el. Létezik tehát olyan skatulya, amiben legalább két golyó van, de vajon melyik doboz ilyen?

Az előző két példában egy dolog létezését *indirekt egzisztenciabizonyítással* mutattuk ki, azaz bebizonytottuk, hogy a dolog nem létezése lehetetlen. Ezt a sémát használtuk:

$$\text{Ha } (\forall x) \sim \mathbf{A}(x) \text{ lehetetlen, akkor } (\exists x)\mathbf{A}(x)$$

Szubjektív benyomásaink alapján mondhatjuk, hogy az indirekt egzisztenciabizonyítás kevésbé akkora meggyőző erővel hat ránk, mint például a modus ponens[6]. Azok a logikusok, akik igazoltnak látták azt, hogy az előbbi következtetés helytelen, előnyben részesítik az *intuicionista logikát.*

Gyanús, hogy a skatulyás példában a véges skatulyaszám miatt lehetséges konstruktív módon is megtalálni a keresett dobozt.

3. példa. Ugyanaz a szituáció, mint a 2. példában, de a feladat ez: mutassunk olyan skatulyát, melyben legalább két golyó van!

Számozzuk be a skatulyákat és nézzünk bele az elsőbe. Ha ott legalább két golyó van, akkor kész, megtaláltuk. Ha nem, nézzük a másodikat! Ha ott már legalább kettő van, akkor véget ért az eljárás, ha nem, nézzünk bele a következő

[6]A modus ponens sémája: $\ulcorner \mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, de $\mathbf{A}$, tehát $\mathbf{B} \urcorner$.

dobozokba... Ha az n-edik skatulyáig nem találtunk legalább két golyót, akkor belenéznük az utolsóba és nagyon csodálkoznánk, ha nem lenne benne legalább két golyó, mert akkor csak n darab golyó maradt volna összesen. Bár ez az utolsó lépés indirekt, a bizonyítás maga konstruktív. Mindazonltal az utolsó lépésben lehet némi bizonytalanság bennünk, valami irracionális félelem attól, hogy talán mégsem lesznek meg abban a skatulyában a maradék golyók. Kicsit izgulhatunk azért, hogy a logikának ebben az esetben is legyen a valósgra vonatkozó kényszerítő ereje.

Szellemes példáért bízvást fordulhatunk Smullyanhez. A most következő ugyan szó szerint nem szerepel a könyvben, de annak útmutatásai alapján, egy benne lévő feladatból mutatis mutandis nyerhetjük.[7]

4. példa. Egy Portia nevű new yorki lány[8] elhatározta, hogy kérőjét kicsit megtréfálja, és azt mondta neki, hogy csak akkor megy hozzá, ha kitalálja, hogy az általa feliratozott három ládikában elrejtett képe melyikben van. A ládikk egyikébe bele is tette a képet. A szelencékre ez volt írva:

A kép az aranyládikában van	A kép az ezüstládikában van	A három állítás közül kettő hamis
’A’ : arany	’E’: ezüst	’O’: ólom

Melyikben van a kép?

Jelöljük az aranyládika feliratát („A kép az aranyládikában van”) A-val, az ezüstládika feliratát („A kép az ezüstládikában van”) E-vel és az ólomládika feliratát („A három állítás közül kettő hamis”) O-val. A kérő először így okoskodott. Belátjuk, hogy az ‘$A \vee E \vee O$’ kijelentés teljesül. Ha ugyanis a kép az aranyládikában van, akkor A igaz. Ha a kép az ezüstben van, akkor E igaz, ha pedig az ólomldikában van, akkor sem A, sem E nem igaz, ezért O feliratának megfelelően legalább két hamis állításunk van, azaz O teljesül. Ezután a kérő belátta, hogy lehetetlen, hogy A igaz legyen (azaz ‘$\sim A$’ teljesül). Tegyük fel ugyanis, hogy A igaz, azaz a kép az aranyládikában van. Ekkor E hamis és így O jelentésére tekintettel, amennyiben O igaz, akkor két hamis állításnak kellene lennie, miközben csak egy ilyen van (ami ellentmondás), ha pedig O hamis, akkor pedig két hamis kijelentésünk van, az O tagadása által megkívánt kettőtől különböző számú hamis kijelentéssel szemben (szintén ellentmondás). Ugyanilyen indokokból E is lehetetlen. Nincs más hátra, O-nak kell igaznak lennie és a kép az ólomldikban van – jelentette ki a kér. Felnyitotta az ólomládikát és megrökönyödéssel konstatálta, hogy a kép nincs ott. Miután mérgében feltépte a többi láda fedelét is, azt találta, hogy a kép az aranyládikban volt. Portia a vádak ellenére váltig állította, hogy nem hazudott, mégis csak Smullyannel tudta megértetni, hogy ez hogy is lehet.

[7]A [Smul88] könyv 69. oldalának 69c. számú Cellini-Bellini-s feladatát úgy kellett módosítani, hogy a 71. oldalon lévő „meglepő” szituációvá alakuljon át.

[8]Az előtörténet megtalálható a [Smul88] könyvben a 65. oldalon.

Nézzük meg ismét a feladatot, a skatulyák konstruktív megtalálásakor is kisebb bizonytalanságot eredményező indirektszerű bizonyítssal kapcsolatban! A következtetési forma, amit használtunk, a *diszjunktív szillogizmus* volt

$$\text{Ha } \mathbf{P} \vee \mathbf{Q}, \text{ de } \sim\mathbf{P}, \text{ akkor } \mathbf{Q}$$

Nem lenne jó ez a következtetés?[9]

4. Következtetési rendszerek cáfolhatósága

Ahhoz, hogy megvizsgáljuk, hogy ez előző szakaszbeli bizonytalan érvek honnan származnak, rendszeres módon kell összehasonlítanunk a logikákat. Ez a példáktól függetlenül azért is fontos, mert érdemes megvizsgálni, hogy hogyan értékeljük jelentősségükben az intuicionista logika mellett felhozott és a klasszikus logikát kétségbe vonó erős és gyenge ellenpéldákat, valamint a releváns logika kételyeit a klasszikus logikával szemben. Ezt megtehetjük például a Gentzen-féle természetes levezetések stílusában. Ez a forma bevezetési és kiküszöbölési szabályok alapján definiálja a logikai konnektívumok működését.[10] Például a $\vee$-re vonatkozó bevezetési és kiküszöbölési szabály:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\begin{matrix}[\varphi][\psi] \\ \vartheta,\ \vartheta, \varphi \vee \psi,\end{matrix}}{\vartheta}$$

Definiáljuk egy ilyen rendszerben az összes érvényes következtetés osztályát:

$$\mathrm{Inf}(\mathbf{G}) \stackrel{\text{def}}{=} \{(\Gamma, \varphi) \mid \Gamma \mathrel{\underset{\mathbf{G}}{\vdots}} \varphi\}$$

Két (azonos nyelv feletti) levezetési rendszer összehasonlíthatóságát definiáljuk a következőképpen:

2. DEFINÍCIÓ – *Összehasonlíthatóság* – $\mathbf{G}_1$ *összehasonlítható* $\mathbf{G}_2$-vel, ha $\mathrm{Inf}(\mathbf{G}_1) \subseteq \mathrm{Inf}(\mathbf{G}_2)$ vagy $\mathrm{Inf}(\mathbf{G}_2) \subseteq \mathrm{Inf}(\mathbf{G}_1)$
Vizsgáljuk meg ennek a definíciónak a fényében, hogy ha $\mathrm{Inf}(\mathbf{G}_1) \subset \mathrm{Inf}(\mathbf{G}_2)$ akkor cáfolhatja-e a szigorúbb $\mathbf{G}_1$ a másikat? A cáfolatnak két fajtáját érdemes tekinteni:[11]

3. DEFINÍCIÓ – *Erős és gyenge ellenpéldák* –

---

[9] Bővebben lásd itt: [Inst].
[10] [Ruzs].
[11] Az erős ellenpélda fogalmával Dummett foglalkozott a [Dumm] könyvben a logikai törvények igazolása és bírálata fejezetben. pp. 193-5.

- *Gyenge ellenpélda*: $\Gamma \underset{\mathbf{G_2}}{\vdots} \varphi$ de $\Gamma \underset{\mathbf{G_1}}{\not\vdots} \varphi$
- *Erős ellenpélda*: $\Gamma \underset{\mathbf{G_2}}{\vdots} \varphi$ és $\Gamma \underset{\mathbf{G_1}}{\not\vdots} \bot$, de $\Gamma \underset{\mathbf{G_1}}{\vdots} \sim \varphi$

Az előző két definícióból triviálisan következő tény:

TÉNY. Ha G_1 összehasonlítható G_2-vel, akkor erős ellenpélda nincs.

Speciálisan: $G_{\text{Klasszikus}}$-t sem a $G_{\text{Intuicionista}}$ sem a $G_{\text{Relevárns}}$ nem cáfolhatja erősen (nincs igazi ellenpélda). Azaz ha elhagyunk levezetési vagy kiküszöbölési szabályokat, akkor olyan rendszereket kapunk, melyek szigorúbbak ugyan, de nem cáfolják erősen a gyengébb rendszert.

5. Instabilitások a logikafilozófiában

Az előző szakaszbeli tényt úgy is interpretálhatjuk, hogy ellentmondást okozó ellenpéldát ugyan nem találhatunk, de instabilitást okozót, gyenge ellenpéldát talán igen. Ezzel azonban nem szándékozunk azt állítani, hogy a klasszikus logika elsőbbséget élvez a többi logikával szemben. Alább belátjuk, hogy ha két levezetési rendszer összehasonlítható, akkor bizonyos értelemben mindkettő instabil.

Instabilitásokat keresünk a következtetési rendszerek között a következő program szerint. Úgy tekintjük, hogy a p következtetés instabilitást okoz a rendszerben, ha:

„elfogadható racionális indoklása p-nek, bár nem érvényes p"

Erre két példa:

1. **Liberalizált intuicionista.** Megmutatjuk, hogy egy intuicionista, ha számontartja a klasszikus érvelők következtetéseit, akkor instabil. Ha p egy indirekt diszjunktív következtetés, akkor $p \notin \mathbf{GI}$, bár $\Box p \in \mathbf{GI}$ ahol $\Box p$-ben p-t fogalmazzuk meg csak az & és $\sim$-mel azaz a PC-nek GI-be történő beágyazása[12] segítségével.[13] Ekkor GI egy liberalizált intuicionista, aki számontartja, hogy egy következtetése során a

[12]Lásd [Ruzs] 179. o.

[13]Például q legyen az

$$\frac{\sim(\sim \mathbf{A} \,\&\, \sim \mathbf{B})}{\mathbf{A} \vee \mathbf{B}}$$

következtetése, mely a klasszikus logikában érvényes, az intuicionistában azonban nem. Az intuicionista logikában nem lehet ilyen indirekt módon bevezetni a diszjunkciót. Ebben a példában $\Box p$ a következő:

$$\frac{\sim(\sim \mathbf{A} \,\&\, \sim \mathbf{B})}{\sim(\sim \mathbf{A} \,\&\, \sim \mathbf{B})}$$

ami triviálisan érvényes mindkét rendszerben.

diszjunkció szelektív-e vagy sem.

2. **Mérsékelt klasszikus érvelő.** Megmutatjuk, hogy egy klasszikus érvelő, ha számontartja az intuicionisták aggályait, akkor instabillá válik. Ebben az esetben lazábban kell értelmeznünk a program előírásait. Legyen p az a kijelentés, hogy „az indirekt egzisztenciakövetkeztetés nem érvényes”. Ha a klasszikus érvelő jogosnak érzi ezt a kételyt, azaz számol azzal, hogy mikor szelektív az egzisztenciatétel és mikor nem, nevezzük nem keményvonalas klasszikus érvelőnek. Természetesen ez egy instabil állapot, hisz p-nek létezik racionális indoklása, de elfogadni p-t a klasszikus érvelő nem fogja.

Megjegyezzük, hogy a [Putn] cikkben Putnam hasonló fogalmakat használt, de egészen másként érvelt amellett, hogy a nem keményvonalas realista (nálunk mérsékelt klasszikus érvelő) álláspontja nyelvfilozófiai ellentmondást rejt. Ő ott amellett érvelt, hogy nyelvfilozófiai szempontból a liberalizált intuicionizmus elsőbbséget élvez a mérsékelt realizmushoz képest. Mi amellett érveltünk, hogy a kettő között nincs különbség a bevezetett stabilitási szempontból.

Köszönetnyilvánítás. Köszönet Serény Györgynek, aki gondos magyarázataival segített az instabilitás matematikai logikai fogalmának megvilágításában.

Hivatkozások

[Dumm] Michael Dummett, *A metafizika logikai alapjai*, Osiris, 2000.

[Inst] —, *Instabil logikusok*, Szabad Változók (5), 2009, `http://www.szv.hu/cikkek/instabil-logikusok`

[Putn] Hilary Putnam, *Modell és valóság* (1980) in: A matematika filozófiája a 21. század küszöbén, szerk.: Csaba Ferenc, Osiris, 2003.

[Ruzs] Ruzsa Imre – Máté András, *Bevezetés a modern logikába*, Osiris, 1997.

[Smul88] Raymond Smullyan, *Mi a címe ennek a könyvnek?*, Műszaki Könyvkiadó, 1988.

[Smul] Smullyan, Raymond, *Gödel nemteljességi tételei*, TipoTeX, 1999.