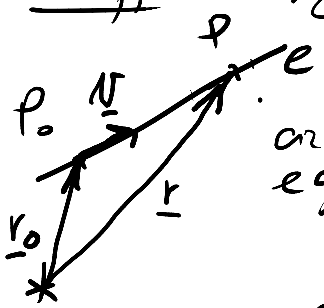
Koordináta reprezentáció

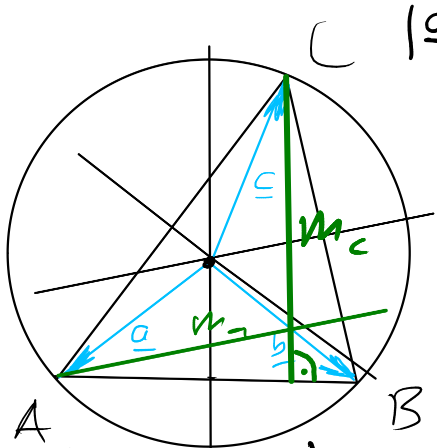
[$\underline{a}_1,\dots,\underline{a}_n$ vektorok $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ számok akkor a $\lambda_1\underline{a}_1+\dots+\lambda_n\underline{a}_n$ kifejezést lineáris kombinációnak nev.]

① A háromszög magasságai egy pontban metszik egymást, éspedig ha $\underline{a},\underline{b},\underline{c}$ az ABC △ csúcsaiba mutatnak a köré írt kör középpontjából, akkor ez az $\underline{m}=\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$.

megj.) egyenes $e: \boxed{\underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\cdot t}$

az egyenes vekt. egyenlete





$|\underline{a}|=|\underline{b}|=|\underline{c}|=R$

$\underline{v}^2=|\underline{v}|^2$

$m_c:\ C\in m_c\ ;\ m_c\perp AB$

$\overrightarrow{AB}=\underline{b}-\underline{a}$; sejtés: $\underline{a}+\underline{b}\perp\underline{a}-\underline{b}$

$$(\underline{a}+\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b})=\underline{a}^2\cancel{-\underline{b}\underline{a}}+\cancel{\underline{b}\underline{a}}-\underline{b}^2=R^2-R^2=0$$

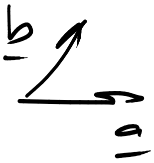
$\underline{v}_{m_c}=\underline{a}+\underline{b}$ $m_c:\ \underline{r}=\underline{c}+(\underline{a}+\underline{b})\cdot t$

$m_a:\ \underline{r}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})\cdot t$ $t=1$

$m_b:\ \underline{r}=\underline{b}+(\underline{a}+\underline{c})\cdot t$

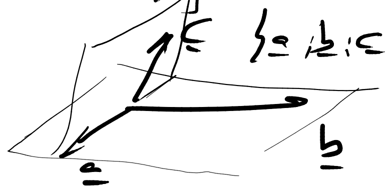
[ha m_a, m_b, m_c legyek pályája (egyenesvonalú egyenletes mozgással repülnek), akkor a számítás szerint a $t=1$ időpontban találkoznak is]

Koordinátarendszer

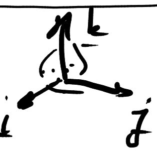


Bázis: → síkban: $\underline{a} \nparallel \underline{b}$ $\quad \{\underline{a}; \underline{b}\}$

→ térben: három nem egy síkban lévő vektor $\{\underline{a}; \underline{b}; \underline{c}\}$



sztenderd bázis $\underline{i}, \underline{j}$

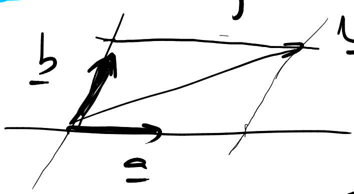


Tétel (egyértelműségi tétel)

Tetszőleges $\underline{v}$ vektor egyértelműen áll elő a bázisvektorok lineáris kombinációjaként.

$\mathcal{B} = \{\underline{a}; \underline{b}\}$

Pl.



$\underline{v} = \underset{\lambda}{1{,}9}\,\underline{a} + \underset{\mu}{1{,}2}\,\underline{b}$; $[\underline{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1{,}9 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

$[\underline{v}]_S = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

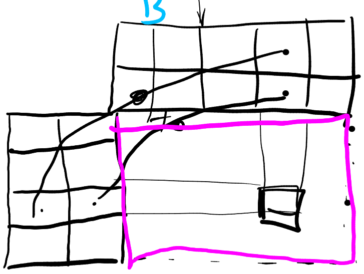
$$[\underline{a}+\underline{b}] = [\underline{a}] + [\underline{b}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix}$$ síkban

$$[\lambda \cdot \underline{a}] = \lambda[\underline{a}] = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R} \ni \underline{a} \cdot \underline{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

B

A



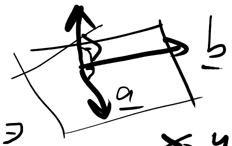
Ez itt a mátrix szorzás

$A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$; $B = \mathbb{R}^{2\times 5}$

$\Rightarrow A \cdot B \in \mathbb{R}^{4\times 5}$; $(A\cdot B)_{ij} \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{3} A_{ik} \cdot B_{kj}$

Vektoriális szorzat $(\underline{i};\underline{j};\underline{k})$

$$\underline{a}\times\underline{b}=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\underline{i}(a_2b_3-a_3b_2)-\underline{j}(a_1b_3-a_3b_1)+\underline{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

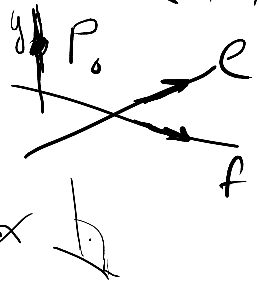


Egyenes egyenletrendszere

$\underline{r}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$; $\underline{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$; $\underline{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $\qquad \underline{r}=\underline{r}_0+\underline{v}\cdot t$

$$e:\begin{cases} x=x_0+v_1\cdot t\\ y=y_0+v_2\cdot t\\ z=z_0+v_3\cdot t\end{cases}$$

① Keressük $g\perp e;f$, és $g \ni P_0(1,2,0)$



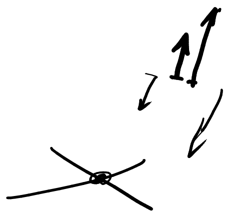
$$e:\begin{cases} x=2+3t\\ y=1-2t\\ z=8\end{cases};\quad f:\begin{cases} x=-3+2t\\ y=4\\ z=2-t\end{cases}$$

$\underline{v}_e=\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \underline{v}_f=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$\underline{v}_g=\underline{v}_e\times\underline{v}_f=\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=2\cdot\underline{i}-\underline{j}\cdot(-3)+\underline{k}(+4)=2\underline{i}+3\underline{j}+4\underline{k}$$

$$g:\begin{cases} x=1+2t\\ y=2+3t\\ z=0+4t\end{cases}$$

② metszik egymást v. nem | párhuzamosak v. nem



$$e:\begin{cases} x=3t+2\\ y=-t\\ z=1-2t\end{cases};\quad f:\begin{cases} x=2t-3\\ y=-1\\ z=3t+9\end{cases}$$

$\underline{v}_e=\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}$ $\nparallel$ $\underline{v}_f=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$

$\rightarrow x=3t+2$

$y=-t$

$z=1-2t$

$\rightarrow x=2\cdot s-3$

$y=-1$

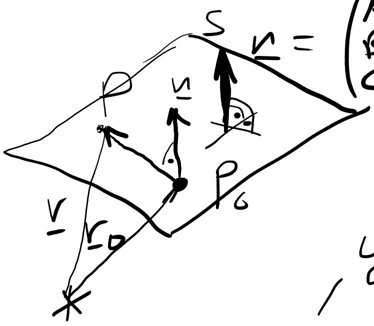
$z=3\cdot s+9$

$\rightarrow t=1$; $\quad 5=2\cdot s-3\longrightarrow s=4$

$1-2t=3s+9$

$-1=21$ ↯

Sík

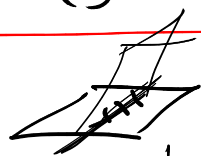


$\underline{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

$$(\underline{r} - \underline{r}_0) \cdot \underline{n} = 0$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$

$x \quad x_0$
$y \quad y_0$
$z \quad z_0$



$y = 3 + 2t - 4t - 5$

$y = x - 4t - 5$

3.

$S_1: x - y - 4z - 5 = 0$

$+ \quad S_2: 2x + y - 2z - 4 = 0$

$3x - 6z - 9 = 0 \quad / :3$

$x - 2z - 3 = 0$

$z = t \in \mathbb{R}$

$$m: \begin{cases} x = \underline{3 + 2t} \\ y = -2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

Írjuk fel a metszésvonal egyenletét!

megh:
$x = 3$
$y = -2$
$z = 0$