Megoldásvázlatok és javítási útmutató a 2. zh -hoz

1. feladat A többi feladattal ellentétben itt a pontozásnál legyünk viszonylag szigorúak. Ha valaki a negyedik feladatnál elrontja a deriválást, még mindig megkaphatja a pontok nagyrészét ha megmutatja, hogy érti, hogyan kell a deriváltat lokális szélsőérték keresésre fölhasználni, helyesen hivatkozik a Bolzano-Weierstrass tételekre, stb. Ez a feladat viszont *kizárólag* arról szól, tud-e a hallgató deriválni. Ennek mindenkinek készségszinten mennie kell! Mivel az átmenetelhez 40 százalékot kell elérni, akinek láthatólag a mechanikus deriválás gondokat okoz, annak 5 pontnál többet ne adjunk (15 pont 40 százaléka = 6 pont).

2. (α) / 3. (β) feladat Az i)-nél (illetve a β verziónál az ii)-nél) a L'Hopital-szabály használata nem vezet eredményre. (A L'Hopital-szabály csak olyan esetre vonatkozik, amikor a deriváltak hányadosának *van* határértéke, ami itt nem teljesül.) De erre nincs is szükség: a kérdéses kifejezés ugyanis x, $\frac{x}{\sin x}$ és egy szinuszos (illetve β verziónál koszinuszos) tag szorzata. Az x-es tag határértéke = a behelyettesítési értékével, ami nulla. A $\frac{x}{\sin x}$-es tag határértékéről tudjuk, hogy az 1. Tehát ezen két tag szorzata a $0 \cdot 1 = 0$ -hoz tart. Ezek alapján a teljes határérték is nulla, hiszen a maradék tag korlátos. Ez a rész legyen a teljes pontszám kicsit kevesebb mint fele; mondjuk 14 pont.

A másik határérték egy közös nevezőre hozás után már "nulla per nulla" tipusú, és L'Hopital-szabály segítségével simán számolható. Az α verziónál egyszeri L'Hopitálás után egy kis rendezéssel a deriváltak hányadosa $\frac{1}{3(1+x^2)}$ alakra hozható, melynek határértéke = behelyettesítési értékével, azaz $\frac{1}{3}$-dal. A β verziónál az első L'Hopitálás után vagy emlékszünk a $\frac{\cos(x)-1}{x^2}$ határértékére (mely előadáson szerepelt), vagy $\cos(x)+1$ -el bővítve visszavezetjük azt a $\sin(x)/x$ határértékére, vagy ismételt L'Hopitálással határozzuk meg azt. Akárhogy is járjunk el persze, az eredmény $-\frac{1}{6}$ lesz. Itt a pontozásnál kb. 5 annak fölismerése, hogy közös nevezőre kell hozni a két tagot, mert úgy egy "nulla per nulla" tipusú kifejezésünk van és alkalmazhatjuk a L'Hopital-szabályt, a teljes feladatrész pedig értelemszerűen 16 pont.

3. (α) / 2. (β) feladat Legyenek az érintési pont koordinátái (x_o, y_o). Az ebbe a pontba húzott érintő meredeksége

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\frac{1}{3}x^2}\right)\Big|_{x=x_o} = \frac{2}{3}\, e^{\frac{1}{3}x_o^2}\, x_o$$

(illetve $\frac{1}{6}\, e^{\frac{1}{12}x_o^2}\, x_o$ a β verziónál), így az érintő egyenlete

$$y - y_o = \frac{2}{3}\, e^{\frac{1}{3}x_o^2}\, x_o(x - x_o)$$

illetve $y - y_o = \frac{1}{6}\, e^{\frac{1}{12}x_o^2}\, x_o(x - x_o)$ a β verziónál. Ez idáig kb. 8 pont.

A két ismeretlen (x_o és y_o) értékének meghatározásához a következő két dolgot fogjuk fölírni: 1) az érintési pont rajta van a görbén, azaz $y_o = e^{\frac{1}{3}x_o^2}$ (illetve $y_o = e^{\frac{1}{12}x_o^2}$ a β verziónál), 2) az $(-\frac{1}{2}, 0)$ pont rajta van az egyenesen, tehát $0 - y_o = \frac{2}{3}\, e^{\frac{1}{3}x_o^2}\, x_0(-\frac{1}{2} - x_o)$ (illetve $0 - y_o = \frac{1}{6}\, e^{\frac{1}{12}x_o^2}\, x_0(1 - x_o)$ a β verziónál). A helyes egyenletek fölírása további kb. 8 pont.

Az első egyenletből adódó y_o-t a másodikba helyettesítve, valamint az exponenciálissal (mely sose nulla!) leosztva a következő másodfokút kapjuk: $-1 = \frac{2}{3}x_o(-\frac{1}{2} - x_o)$, (illetve $-1 = \frac{1}{6}x_o(1 - x_o)$ a β verziónál). Ezt megoldva x_o lehetséges értékei: 1 és $-\frac{3}{2}$ (illetve 3 és -2 a β verziónál). A másodfokú egyenlet levezetése és megoldása további kb. 6 pont.

A maradék 3 pontot a helyes (pozitív) gyök kiválasztására, és az így adódó konkrét (x_o, y_o) fölírására — ami $(1, e^{\frac{1}{3}})$, illetve β verziónál $(3, e^{\frac{3}{4}})$ — adjuk.

4. feladat Mivel f deriválható, lokális szélsőértéke csak olyan $x \in \mathbb{R}$ helyen lehet, melyre $f'(x) = 0$, azaz melyre teljesül az

$$e^{-2\cos^2(x)}\, \sin(x)\, (4\cos^2(x) - 1) \;=\; 0$$

illetve a β verziónál az

$$e^{-2\sin^2(x)}\, \cos(x)\, (1 - 4\sin^2(x)) \;=\; 0$$

egyenlet. Mivel az exponenciális sose nulla (mindig pozitív), a fönti kifejezés pontosan akkor nulla, ha

$$\sin(x) = 0 \;\text{ vagy }\; \cos(x) = \pm\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = k\pi \;\text{ vagy }\; x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}),$$

illetve β esetben, ha

$$\cos(x) = 0 \;\text{ vagy }\; \sin(x) = \pm\frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \;\text{ vagy }\; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \;\; (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezen lehetséges szélsőérték-helyek ismerete mind a két feladatrészhez kelleni fog és erre kioszthatjuk a megszerezhető pontok harmadát. Ezek után az i) kérdésnél így érvelhetünk: mivel f folytonos és a kérdéses tartomány egy zárt, véges intervallum, a Bolzano-Weierstrass tételek értelmében f-nek itt lesz minimuma és maximuma is. A min/max értékek vagy az intervallum végeinél, vagy olyan intervallumba eső helyeknél lehetnek, melyek egyben lokális szélsőérték-helyek. Tehát a min/max értékek valójában a

$$\{f(-\frac{\pi}{2}),\, f(-\frac{\pi}{3}),\, f(0),\, f(\frac{\pi}{4})\} \;=\; \{0,\, \frac{1}{2\sqrt{e}},\, \frac{1}{e^2},\, \frac{1}{\sqrt{2}e}\}$$

halmaz, illetve a β esetben a

$$\{f(0),\, f(\frac{\pi}{6}),\, f(\frac{\pi}{2}),\, f(\frac{3\pi}{4})\} \;=\; \{0,\, \frac{1}{2\sqrt{e}},\, \frac{1}{e^2},\, \frac{1}{\sqrt{2}e}\}$$

min/max értékei. Ezek alapján a keresett minimum $= 0$, a keresett maximum $= \frac{1}{2\sqrt{e}}$. (A szóban forgó értékek nagyságrendi összehasonlításához elég azt tudni, hogy $e > 2$. Remélem ez egy hallgatónak sem okoz gondot.) Erre a részre a pontok kicsit több, mint harmadát adjuk.

A ii) résznél a legjobb, ha annak megálapításával kezdjük, hogy f 2π szerint periódikus. Ezért egyrészt lesz minimuma / maximuma (hiszen a teljes érték-készletét fölveszi a $[0, 2\pi]$ halmazon, ott pedig az i)-es részben elmondottak miatt biztos lesz minimuma és maximuma), másrészt pedig $\mathbb{R}$-en egy globális minimum / maximum egyben lokális szélsőértékhely is. Ezért f globális minimumának / maximumának meghatározásához f értékeit a már megtalált $x = k\pi$ és $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken, illetve a β verziónál az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ és $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ helyeken kell átnézni. Mindkét esetben a minimum $-\frac{1}{2\sqrt{e}}$, a maximum pedig $\frac{1}{2\sqrt{e}}$ -nek adódik. Mivel f folytonos, a Bolzano-Weierstrass tételek értelmében f e két szám között minden értéket fölvesz; tehát értékkészlete: $[-\frac{1}{2\sqrt{e}}, \frac{1}{2\sqrt{e}}]$. Erre a részre a pontok kicsit kevesebb, mint harmadát adjuk.

---

5. (IMSC) feladat Mivel f értékei csak pozitív számok lehetnek és az ln függvény szigorúan monoton nő, a kérdéses

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad vs. \quad \sqrt{f(a)f(b)}$$

viszony ugyanaz, mint a

$$\ln\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \quad vs. \quad \ln\left(\sqrt{f(a)f(b)}\right) = \frac{\ln(f(a)) + \ln(f(b))}{2}$$

viszony. Viszont némi számolással

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^2 \ln(f(x)) = -\frac{1 + 2\cos(\frac{x}{2})}{4\left(\cos(\frac{x}{2} + 2)\right)^2},$$

melynek előjele $\forall x \in (-\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}) \supset [3, 4]$ esetén negatív. Tehát a kérdéses intervallumon $\ln \circ f$ szigorúan konkáv és ezért

$$\ln\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) > \frac{\ln(f(a)) + \ln(f(b))}{2},$$

melyből az elmondottak szerint következik, hogy $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \sqrt{f(a)f(b)}$. Megjegyezendő, hogy ugyanezen intervallumon f viszont *nem* konkáv, tehát a feladatot nem lehet egy egyszerű számtani-mértani egyenlőtlenséggel + f konvexitásának vizsgálatával megoldani.