

Név:

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	Σ

1. feladat (elmélet, 4+8 pont)

- i) Definiáljuk egy függvény konvexitásának fogalmát és mondjuk ki a konvexitás és a második derivált kapcsolatáról tanult tételt!
- ii) A következő számolások nem mind jók. Találjuk meg a hibásakat, magyarázzuk el, mi velük a baj és azt is mondjuk meg: mi lenne ezekben az esetekben a helyes eredmény.

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x+8} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos(x)}{1+0} = \nexists$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(\arctan(x)) - \ln(x)) = \ln(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x)}{x}) \stackrel{L'H}{=} \ln(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}) =$
 $= \ln(\frac{1}{1+0}) = 0$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \sin(x-1) \cos(x-1)}{2x-1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \cos^2(x-1) - 2 \sin^2(x-1)}{2} =$
 $= \frac{2 \cos^2(1-1) - 2 \sin^2(1-1)}{2} = 1$

2. feladat (10 pont)

Áll egy ismeretlen magasságú fa és tőle 8 méterre egy 1 méter magas bokor. A nap úgy áll, hogy a két növény csúcsának árnyéka éppen a pázsit azonos pontjára esik. Legalább mekkora kell, hogy legyen ennek a pontnak és a fa csúcsának távolsága?

3. feladat (8+6+8 pont)

i) $\int \ln(1 + \sqrt{x+3}) dx = ?$ ii) $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} dx = ?$ iii) $\int \frac{1}{x^3 + 4x} dx = ?$

(Az első integrálban használjuk az $u = \sqrt{x+3}$ helyettesítést.)

4. feladat (10 pont) Számoljuk ki az

$$\sqrt[3]{3x^2} \leq y \leq 3\sqrt[3]{x}, \quad y \geq 3$$

egyenlőtlenségek által definiált tartomány területét!