BME Matematika Verseny **2014. április 15.** 10^{00}–14^{00}, **E1C**

— A kijavított dolgozatok következő hét csütörtökén (április 24 -én) 10:00 -tól 12:30 -ig megtekinthetők a H666 -ban. Eredményhirdetés május 8 -án csütörtök 16:00 órakor a QAF15 -ben.
— Az első feladat megoldását csak elsőéves hallgatóknál értékeljük; a maradék kilenc feladatra bárki adhat be megoldást. Érdemi részmegoldásokat, érdemi általánosításokat és lényegesen különböző megoldásokat is figyelembe veszünk.
— Minden feladat 10 pontot ér.
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör.

1. Mennyi a $33^n - 7^m$ kifejezés által fölvehető legkisebb pozitív érték, ha $n, m \in \mathbf{Z}^+$?

2. Mutassuk meg, hogy $\frac{1}{2^{999}} \sum_{k=0}^{500} \binom{1000}{2k} 5^k$ egy páratlan egész.

3. Mutassuk meg hogy létezik, és számoljuk ki a $\int_0^\pi \ln(\sin(x))\,dx$ integrál értékét.

4. Bizonyítsuk be: minden n, d pozitív egészhez létezik $j \geq 1$ és $m_d \geq m_{d-1} \geq \ldots m_j \geq j$ egészek úgy, hogy $n = \binom{m_d}{d} + \binom{m_{d-1}}{d-1} + \ldots \binom{m_j}{j}$.

5. Legyen K egy háromdimenziós konvex test (azaz $K \subset \mathbf{R}^3$ konvex kompakt és nemüres belsejű) és $p \in K$. Bizonyítsuk be: létezik olyan p -t tartalmazó S sík, melyre teljesül hogy K -nak S -sel párhuzamos metszetei között a $K \cap S$ metszet maximális területű. Segítség: először oldjuk meg a feladatot kétdimenzióban.

6. Legyen X egy véges halmaz. Mutassuk meg: ha az $f : X \to X$ függvénynek nincs fixpontja, akkor X fölbontható három diszjunkt halmazra: $X = A \,\dot\cup\, B \,\dot\cup\, C$ úgy, hogy $A \cap f(A) = B \cap f(B) = C \cap f(C) = \emptyset$.

7. Független, egyenletes eloszlással számokat húzunk ki a $(0, 1)$ intervallumból egészen addig, míg a kihúzott számok összege túl nem lépi az 1 -et. Mennyi a húzások számának és a kapott összegnek a várható értéke?

8. Ül az egész osztály. Ha a tanítónéni valakinek a nevét kimondja, akkor az illető és annak összes barátja föláll ha idáig ült, és leül, ha idáig állt. El tudja -e érni a tanítónéni, hogy az egész osztály egyszerre álljon? (Föltételezzük, hogy a barátság szimmetrikus de nem feltétlen tranzitív.)

9. Tegyük föl, hogy $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ olyan, hogy minden $c \in \mathbf{R}$ esetén $t \mapsto f(t, c)$ illetve $t \mapsto f(c, t)$ egy $d(c)$ illetve $\tilde{d}(c)$ fokú polinom. Bizonyítsuk be hogy f egy kétváltozós polinom — először feltételezve, hogy $d, \tilde{d}$ közül legalább az egyik korlátos, majd e feltétel elhagyásával is.

10. Legyen X egy komplex $n \times n$ -es mátrix. Mutassuk meg: pontosan akkor egyértelmű az az U unitér mátrix, ami minimalizálja az $\|X - U\|_{\mathrm{Tr}} \equiv \sqrt{\mathrm{Tr}((X - U)^*(X - U))}$ távolságot, ha X invertálható. Segítség: probáljunk meg konkrét formulát adni U -ra.