— A kijavított dolgozatok április 23-án (csütörtökön) 13 órától 15 óráig megtekinthetők a H666-ban. Eredményhirdetés május 7-én csütörtök 16:15-től az IB025 -ben.
— Az értékelésnél részmegoldásokat is figyelembe veszünk. Minden feladat 10 pontot ér, de érdemi általánosítások illetve több lényegesen különböző megoldás ismertetése esetén egy feladatra 10 pontnál több is kapható.
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, név, kar, szak, évfolyam, tankör.

1. Tekintsük a pozitív egészekből álló $H_n = \{p^2 - 1 \mid p > n,\ p\,\text{prím}\}$ halmazt. Határozzuk meg H_n legnagyobb közös osztóját először külön az i) $n = 3$ esetben, aztán ii) általában.

2. Adjunk olyan (lehetőleg minél kisebb) k természetes számot, melyre igaz: ha van $I_1, I_2, \ldots$ véges sok intervallumunk melyre teljesül, hogy közülük bármely $r = 4$-ből kiválasztható 3 olyan, melynek van közös pontja, akkor ezek biztosan „lefoghatók” k ponttal (azaz megadható k pont úgy, hogy mindegyik intervallum tartalmazzon belőlük legalább egyet). Oldjuk meg a feladat általánosítását $r > 4$ esetére is.

3. Tekintsük a

$$b_n = \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j \sum_{1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_{2j} \le 4n} k_1 k_2 \ldots k_{2j}$$

képlettel definiált egészekből álló sorozatot. Mutassuk meg, hogy b se alulról, se fölülről nem korlátos, de bármely $r \in \mathbb{N}$ értékre van legalább r olyan egymást követő tagja, melyek előjele megegyezik.

4. Legyen f egy integrálható függvény $\mathbb{R}$ -en. Mutassuk meg:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx \le 8^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

Segítség: 1) először multiplikatív helyett adjunk additív becslést |f| integráljára 2) ehhez vágjuk az integrálási tartományt egy $[-t, t]$ és egy azon kívüli rész összegére.

5. Egy ködös reggel egy motorcsónakban ébredünk a tengeren. Azt tudjuk, hogy a part pontosan 10 kilométernyire van, de hogy merre, arról fogalmunk sincs. (Látótáv: nulla méter. A part hosszú, egyenes.) Tervezzünk olyan útvonalat, ami mentén haladva *biztosan* el fogunk jutni a partra — még akkor is, ha az üzemanyag csak 66,6 km -re elég. . .

6. Egy nagy téglalapot hézagmentesen kitöltünk egymás belsejébe nem metsző, a naggyal párhuzamos oldalú kisebb téglalapokkal. A kisebb téglalapok mindegyikének legalább egyik oldala egész hosszú. Következik -e ebből, hogy a nagy téglalapnak is legalább az egyik oldala egész hosszú?

7. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B is egy $n \times n$ -es pozitív szemidefinit mátrix, akkor $\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$.

8. Legyen $n = mp^h$ ahol p prím és m nem osztható p -vel, G pedig egy n-ed rendű csoport. Tegyük föl, hogy $H \subset G$ egy olyan p-hatványrendű részcsoport, hogy $HP = PH$ minden $P \subset G$ *p-Sylow* részcsoportra (azaz minden olyan részcsoportra, melynek rendje p^h). Bizonyítsuk be, hogy ekkor H szubnormálosztó G-ben; azaz van olyan $H = N_0 \leq N_1 \leq \ldots N_k = G$ részcsoportlánc, hogy N_j normálosztó N_{j+1}-ben minden $j = 0, \ldots, k-1$ -re.

9. Egy gonosz manónak van 100 db (rögzített) fixpontmentes permutációja. Mi viszünk neki egy $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_{1000})$ bitsorozatot, amit ő valamelyik permutációjával jól megkavar aztán – a biztonság kedvéért – még bitenként negál is. Ha az így kapott bitsorozat 666 vagy annál is több helyen különbözik az eredetitől, akkor ő fölkacag és azt mondja: „na, jól összezavartalak”. Mutassuk meg: tudunk neki olyan bitsorozatot vinni, amitől lefagy az arcáról a mosoly.

10. Legyenek A és B egy komplex Banach tér lineáris operátorai, melyek *kommutátora* $[A, B] \equiv AB - BA$ egyenlő az identitással. Mutassuk meg, hogy ekkor legalább ez egyik a két operátor közül nem lehet korlátos. *Segítség: indirekten föltéve, hogy* $\|A\|, \|B\| < \infty$, *számoljuk ki az* $[A, e^B]$ *kommutátort, majd ebből fejezzük ki* $e^B A e^{-B}$ *-t.*