BME Matematika Verseny **2016 április 27.** 13^{15}–17^{00}, **IB025**

— A kijavított dolgozatok május 3 -án kedden 11 órától délután fél kettőig megtekinthetők a H666 -ban. Eredményhírdetés május 12 -én csütörtök 16:15 -től a QB402 -ben.
— Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

---

1. Legföljebb mekkora lehet a $\sum_{j<k} d(p_j, p_k)$ távolság-összeg, ha a $p_1, \ldots p_n$ pontoknak egy (akárhány dimenziós) egység-gömb felszinén kell elhelyezkedniük?

2. Legyen $f(x) = \lim_k (1 + x^5 + x^{10})(1 + x^{5^2} + x^{2(5^2)}) \ldots (1 + x^{5^k} + x^{2 \cdot 5^k})$. Határozzuk meg azt az n természetes számot (ha egyáltalán van ilyen), melyre

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^j f(x) \,\Big|_{x=0} \;=\; 1000.$$

3. Egy BME hallgató 1000 € készpénzzel betért egy illegális játékbarlangba és beszállt egy olyan játékba, ahol minden körben 1 € -t lehet nyerni vagy veszteni. (A körök egymástól függetlenek és a nyerési esély minden körben azonos.) Hírlik, hogy diákunk a 666 -odik kör után fölállt, és néhány, a feladatsorba nem igazán illő szó kiséretében, 500 € -val szegényebben befejezte a játékot. Ezek alapján mi az esélye, hogy a kezdeten kívül volt még olyan pillanat, amikor veszteség nélkül távozhatott volna? (A válasz lehetőleg ne egy papíron kiértékelhetetlen kifejezés, hanem egy konkrét érték legyen.)

4. Adott $m \in \mathbb{N}$ mellett az $f_1, \ldots f_n$ és $g_1, \ldots g_n$ függvények minden x, y valós számpárra kielégítik a

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) g_k(y) = (x + y)^m$$

egyenletet. Lehet -e n kisebb vagy egyenlő, mint m?

5. Mutassuk meg, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin(x)} \,\mathrm{d}x \; > \; \pi(e - \frac{1}{e})$. *Segítség: először adjunk rekurziós képletet* $I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(x) \,\mathrm{d}x$ *értékére.*

6. Egy $x \in \mathbf{R}$ számhoz végtelen sok olyan $a, b \in \mathbb{N}$ relatív prímpár létezik, mely kielégíti az $|x - \frac{a}{b}| < \frac{1}{b^{n+1}}$ egyenlőtlenséget. Mutassuk meg: x nem lehet egy egész együtthatós, legföljebb n-ed fokú $p \neq 0$ polinom gyöke.

7. Egy a szabad versenyt nem kedvelő országban van 9, repülőtérrel is rendelkező város. Mindegyik polgármestere legföljebb 3 légitársaságnak adhat koncessziós jogot az adott város melletti reptér használatára, és az ország sajátos berendezkedése miatt bármely két nagyváros között kell, hogy legyen — egy természetesen monopolhelyzetben lévő — repülőjárat. Mutassuk meg: ilyen körülmények között 10 légitársoság még igen, de 11 már nem tud belföldi járatot üzemeltetni a kérdéses országban.

8. Úgy van lerakva n kör a síkra, hogy nincs olyan egyiket se metsző egyenes, melynek mindkét oldalán lenne belőlük legalább egy. Bizonyítsuk be, hogy az összes kör lefedhető egy (megfelelően elhelyezett) $\sqrt{2}R$ sugarú nagy körlappal ahol $R = r_1 + \ldots + r_n$ a megadott körök sugarainak összege; sőt, valójában egy kisebb, R sugarúval is.

Segítség a nehezebb változathoz: próbáljuk meg a fölveendő körlap középpontját az adott körök valamilyen súlyozás szerint vett átlagába helyezni.

9. Két bit n-es (azaz 0 -ákból és 1 -ekből álló n hosszú sorozat), $b = (b_0, \ldots b_{n-1})$ és $c = (c_0, \ldots c_{n-1})$ *konvolúciója* az a $d = b \star c$ bitsorozat, melyre $d_k = \sum_{j=0}^{n-1} b_j c_{k-j}$, ahol természetesen a szorzás és összegzés mod(2), az indexben szereplő $k - j$ pedig mod(n) értendő. Mutassuk meg: a $b \star b = b$ kielégítő bit n -esek száma mindig kettő-hatvány.

Megjegyzés: az ilyen sorozatok száma meglehetősen kaotikusan függ n -től; tehát nem lehet könnyű rá formulát találni — viszont erre most nincs is feltétlen szükségünk...

10. Adott $A_1, \ldots A_n$ $n \times n$ -es mátrixok mellett tekintsük a

$$D(A_1, \ldots, A_n) := \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}\right) \ldots \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}\right) \det(x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n)$$

kifejezést. Igazoljuk, hogy a fölírt n-szeres derivált konstans függvény és, hogy $A_1, .. A_n \mapsto D(A_1, \ldots, A_n)$ mindegyik változójában lineáris. Számoljuk ki $D(A_1, \ldots A_n)$ értékét abban az esetben, ha $A_1, .. A_n$ mindegyike 1-rangú és a kapott eredmény segítségével bizonyítsuk be, hogy ha $A_1, .. A_n$ mindegyike pozitív szemidefinit, akkor $D(A_1, \ldots A_n) \geq 0$.