

— A kijavított dolgozatok megtekinthetők lesznek április 26-án szerdán 11:30-tól 13:30-ig a H666-ban. Ünnepélyes eredményhirdetés május 4 -én csütörtökön 17:15 -től a Q épület 4 emeletén; utána állófogadás a büfében.

— Minden feladat 10 pontot ér. A javítás során rész megoldásokat is figyelembe veszünk. Különleges esetekben egy feladaton 10-nél több pont is elérhető (pl. érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).

— **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja.

1. Mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2} = 1$.

2. Egy K konvex politóp esetén legyen \tilde{K} az a kisebb konvex politóp, melynek csúcsai K élének felezőpontja. Mutassuk meg: ha Δ_1 és Δ_2 közös tömegközépponttal rendelkező tetraéderek és $\Delta_1 \subset \Delta_2$, akkor $\tilde{\Delta}_1 \subset \tilde{\Delta}_2$.

3. Egy egység hosszú rúdon egyenletes független eloszlással kijelölünk 3 pontot, majd a pontok mentén a rudat földaraboljuk. Mi a valószínűsége, hogy mindegyik darab hosszabb lesz, mint t ? A kapott kifejezés segítségével (vagy bárhogy máshogy) számoljuk ki a legrövidebb darab várható hosszát!

4. Adjunk – lehetőleg minél egyszerűbb – összegképletet a $\sum_{k=1}^n k \sin(k)$ kifejezésre!

5. Egy 666 élű gráfot akarunk lerajzolni. Pontjai már a papíron, és első 633 élét olyan ügyesen kanyarítottuk ide-oda, hogy azokon idáig nem keletkezett metszéspont. Adjunk (minél jobb, azaz minél kisebb) felső korlátot a metszések számára, amire még szükségünk lehet a rajz befejezéséhez!

6. Legyen X egy valós valószínűségi változó, M egy pozitív konstans és f egy valós függvény melyre $|f'(x)| \leq M$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mutassuk meg: $\sigma(f(X)) \leq M\sigma(X)$. (Itt σ a valószínűségi változó szórása.)

7. Van a síkon 4 pontunk: p_1, p_2, p_3 és p_0 . Lehet-e, hogy bármely kettő távolsága 3-mal nem osztható egész? És ha a térben lennének? *Segítség: fejezzük ki a $\vec{v}_j = p_j - p_0$ ($j = 1, 2, 3$) vektorok közötti skaláris-szorzatokat a pontok távolságával!*

8. Határozzuk meg az összes olyan 10 pontú, összefüggő, egyszerű gráfot, melynek bármely szélességi feszítőfájában csak első és harmadfokú csúcsok vannak!

9. Az f egy folytonosan differenciálható, monoton csökkenő ($f' \leq 0$) de sehol sem negatív ($f \geq 0$) függvény a valós számegyenesen. Adjunk minél jobb olyan pozitív c konstans, mellyel még biztosan teljesül az

$$\left(\int_0^\infty x^2 f(x) dx \right)^2 \leq c \int_0^\infty x f(x) dx \int_0^\infty x^3 f(x) dx$$

egyenlőtlenség! Mi a legjobb – azaz legkisebb – ilyen c konstans?

10. Egy valós négyzetes M mátrix abszolút-értéke az az egyetlen pozitív szemidefinit $|M|$ mátrix, melyre $|M|^2 = M^t M$. Mutassuk meg: $|\text{Tr}(M)| \leq \text{Tr}(|M|)$.