

- A kijavított dolgozatokat május 15-én szerdán 15:15-től 17:00-ig lehet megtekinteni a H666-ban. Az eredményhirdetés időpontja később kerül meghatározásra.
- Minden feladat 10 pontot ér. Az értékelés során részmegoldásokat is figyelembe veszünk. A javító különleges esetekben egy feladatra 10 pont fölötti értéket is adhat (például érdemi általánosítások, illetve egy probléma több, lényegesen különböző megoldásának ismertetése esetén).
- **Minden feladatot kérünk külön lapra írni.** Minden lapon szerepeljen a feladat sorszáma, a versenyző neve és NEPTUN kódja!
-

1. Legyenek $q, n > 1$ adott egészek. Szeretnénk rögzíteni valami $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ valós értékeket úgy, hogy minden $m < q^{n+1}$ természetes szám előálljon olyan

$$m = \sum_{k=0}^n c_k a_k$$

összegként, melyben a c_k együtthatók ($k = 0, 1, \dots, n$) mind q -nál (határozottan) kisebb nemnegatív egészek. Hány olyan $(a_0, \dots, a_n)$ érték-lista van, melyre ez teljesül?

2. Legyen $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ egy differenciálható függvény. Teljesítheti-e f az $f' = f \circ f$ egyenletet? Először mutassuk meg, hogy ha így volna, akkor kellene lennie olyan $x_0 > 0$ értéknek, melyre $f(x_0) - x_0 > 1$, majd ezt fölhasználva (vagy bárhogy máshogy) bizonyítsuk be, hogy f nem elégítheti ki a kérdéses egyenletet!

3. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot \binom{n}{k} \cdot k!}{n^{k+1}} = 1$$

tetszőleges n természetes számra!

4. Legyen A, B két valós szimmetrikus 77×77 -es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $v \neq 0$ vektor, amin A és B kommutál; azaz melyre $ABv = BA v$!

5. Valaki ceruzával rajzolt egy négyzetet a síkra, majd piros színnel megjelölt mind a négy oldalán egy-egy pontot. Sajnos az idők során a négyzet megfakult; most már csak a 4 piros pont látható ebből a műből. A 4 pont milyen elhelyezkedése esetén igaz, hogy egyértelműen meghatározható, hogy hol volt az eredeti négyzet? Milyen szerkesztési eljárással végezhető el ilyenkor a rekonstrukció?

6. Öt egyforma képességű versenyző fejenként tizet lő egy körlap alakú céltáblára. Minden versenyző minden lövése a többitől független, egyenletes eloszlású pontban találja el a céltáblát. Várhatóan hány találat lesz közelebb a céltábla középpontjához a legfiatalabb versenyző legjobb találatánál? (A válasz lehetőleg ne valami integrálokat vagy szummát tartalmazó, nehezen kiértékelhető képlet, hanem egy ténylegesen fölírt szám legyen!)

7. Adott k pont az $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ gömbfelszínen: $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$. Szeretnénk őket úgy elmozgatni valami $\underline{u}'_1, \dots, \underline{u}'_k \in S$ pontokba, hogy a közöttük lévő távolságok megfelelő legyenek; tehát, hogy $\forall j, l : d(\underline{u}'_j, \underline{u}'_l) = \frac{1}{2}d(\underline{u}_j, \underline{u}_l)$ legyen, ahol d az Euklideszi távolság:

$$d(\underline{v}, \underline{w}) \equiv \|\underline{v} - \underline{w}\| \equiv \sqrt{(\underline{v} - \underline{w}) \cdot (\underline{v} - \underline{w})} \equiv \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + \dots + (v_n - w_n)^2}.$$

Mutassuk meg, hogy ez pontosan akkor tehető meg, ha $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k$ egy hipersíkra esnek; azaz ha létezik úgy $\underline{w} \neq 0$ vektor és c skálár, hogy $\underline{w} \cdot \underline{u}_j = c$ minden $j = 1, \dots, k$ esetén!

8. Az $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n} \in \mathbb{C}$ értékekről azt tudjuk, hogy minden $k = 1, \dots, n$ esetén

$$\alpha_1^{2k-1} + \alpha_2^{2k-1} + \dots + \alpha_{2n}^{2k-1} = 0.$$

Mutassuk meg, hogy a megadott számok $(\beta, -\beta)$ alakú párokba rendezhetők!

9. Legyen $\mathcal{J}$ egy az $\mathbb{R}$ korlátos zárt intervallumaiból álló véges gyűjtemény és $|\mathcal{J}| \geq k \geq 3$. Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{J}$ bármely k tagjából kiválasztható 3 olyan, melyek közös metszete nem üres, akkor az egész gyűjtemény “lefogható” $k - 2$ ponttal (azaz megadható $k - 2$ pont úgy, hogy $\mathcal{J}$ mindegyik eleme tartalmazzon belőlük legalább egyet)!

10. Legyen $S \subset \mathbb{R}$ egy pozitív Lebesgue-mértékű halmaz. A kontinuum-hipotézis feltételezése nélkül bizonyítsuk: S nem lehet kontinuumnál kisebb számosságú!