BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR

Babcsányi - Csank - Nagy - Szép - Zibolen

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY III.

Műegyetemi Kiadó, 2007

Lektor:
Dr. Szász Gábor

Szerkesztő:
Dr. Nagy Attila

Szerzők:
Dr. Babcsányi István (22., 23., 24.,)
Csank Lajos (27., 28., 29.,)
Dr. Nagy Attila (30.)
Dr. Szép Gabriella (26.)
Dr. Zibolen Endre (25.)

Rajzoló:
Dr. Lukács Erzsébet

(Tizenegyedik utánnyomás)

egyetemi jegyzet
oktatási célra

Azonosító: **075004**

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Természettudományi Karának
megrendelése alapján kiadja a
Műegyetemi Kiadó
www.kiado.bme.hu
Felelős vezető: Wintermantel Zsolt
Terjedelem: 27,75 (A/5) ív
Nyomdai munkák:
Műegyetemi Nyomda
Munkaszám: 6384/07

Tartalom

Előszó iii

22. Számsorok 22-1
Sor és összege 22-1
Nemnegatív tagú sorok 22-3
Leibniz-sorok 22-6
Abszolút és feltételes konvergencia 22-6
Műveletek sorokkal 22-9
Vegyes feladatok 22-10

23. Függvénysorozatok és sorok 23-1
Alapfogalmak 23-1
Hatványsorok 23-3
Taylor-sorok, Maclaurin-sorok 23-6
Fourier-sorok 23-9
Vegyes feladatok 23-12

24. Komplex függvények 24-1
Komplex változós elemi függvények 24-1
Komplex függvények differenciálása 24-4
Komplex függvények integrálása 24-7
Laurent-sorok 24-10
Reziduum-tétel 24-12
Valós integrálok kiszámítása komplex integrálokkal 24-14
Vegyes feladatok 24-18

25. Laplace-transzformáció 25-1
Laplace-transzformáció fogalma és alaptulajdonságai 25-1
A konvolúciótétel és következményei 25-4
A Laplace-transzformált differenciálása és integrálása 25-6
Hasonlósági és eltolási tételek 25-8
Az inverz Laplace-transzformáció 25-11
Vegyes feladatok 25-14

26. Egyismeretlenes egyenletek közelítő megoldása 26-1
Intervallumfelezési eljárás 26-1
Húr- és szelőmódszer 26-2

Newton-módszer, A fokozatos közelítés módszere 26-3
Módszerek keverése, több gyök meghatározása 26-4

27. Differenciálegyenletek 27-1
A differenciálegyenlet fogalma, típusa 27-1
Görbesereg és differenciálegyenlet 27-4

28. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek 28-1
Szétválasztható változójú differenciálegyenletek 28-1
Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek 28-4
Hiányos másodrendű differenciálegyenletek 28-6
Alkalmazások 28-8
Egzakt differenciálegyenletek, multiplikátorok 28-9
Izogonális és ortogonális trajektóriák 28-11
Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása 28-12
Iránymező 28-15

29. Lineáris közönséges differenciálegyenletek 29-1
Homogén lineáris differenciálegyenletek 29-1
Inhomogén lineáris differenciálegyenletek 29-5
Euler-féle differenciálegyenletek 29-9
Laplace-transzformáció alkalmazása 29-11
Lineáris differenciálegyenletek megoldása hatványsorokkal 29-14

30. Parciális differenciálegyenletek 30-1
Elsőrendű parciális differenciálegyenletek 30-1
Másodrendű parciális differenciálegyenletek 30-4
Hiperbolikus parciális differenciálegyenletek 30-5
Parabolikus parciális differenciálegyenletek 30-7
Kétdimenziós Laplace-egyenlet 30-10

Megoldások
22. Számsorok *22.1*
23. Függvénysorozatok és sorok *23.1*
24. Komplex függvények *24.1*
25. Laplace-transzformáció *25.1*
26. Egyismeretlenes egyenletek közelítő megoldása *26.1*
27. Differenciálegyenletek *27.1*
28. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek *28.1*
29. Lineáris közönséges differenciálegyenletek *29.1*
30. Parciális differenciálegyenletek *30.1*

Előszó

Ez a kötet a harmadik abból a négykötetes feladatgyűjteményből, melyet a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékének oktatói készítenek Szász Gábor Matematika I-II-III című tankönyvéhez. A kötet kilenc fejezete megfelel a tankönyv második, illetve harmadik kötetében található hasonló számozású fejezeteinek. A fejezetek sorszámozatlan alfejezetekre oszlanak. Minden alfejezet tipográfiailag is elkülönülő elméleti összefoglalóval kezdődik; ez tartalmazza a felhasználandó ismeretek legfontosabb elemeit: jelöléseket, definíciókat, tételeket, példákat, alkalmazásokat, megjegyzéseket, melyek azonosítója egy-egy betűvel kezdődik (ezek jelentése: J jelölés, D definíció, T tétel, P példa, A alkalmazás, M megjegyzés), majd a fejezet sorszáma, végül a fejezeten belüli saját sorszám következik. Például:

D 30.2 Ez itt a harmincadik fejezet elméleti bevezetőjének kettes sorszámú definíciója.

Az elméleti bevezető után következnek a feladatok; ezek csak a fejezeten belüli sorszámukat viselik. Azonos fejezetből való hivatkozásnál csak ez a sorszám (pl.: **56.**), más fejezetből való hivatkozásnál a fejezet és a feladat sorszáma együtt szerepel (pl.: **30.56.**). A feladat sorszámának felső indexében szerepelhet egy jel, melyet az alábbi példákban magyarázunk:

51.° Ez a feladat alapfeladat, az olvasó által való megoldását fontosnak tartjuk.

52.$^{\triangleright}$ Ehhez a feladathoz részletes útmutató tartozik a megoldásoknál.

53.* Ez a feladat a nehezebbek közé tartozik.

54.^{k} Ehhez a feladathoz kalkulátor használata szükséges.

55.^{P} Ehhez a feladathoz programozható számoló- vagy számítógép használata szükséges.

A végeredményt, néhány kivétellel, minden feladatnál közöljük. Az ábráknak nincs saját sorszámuk, de minthogy közvetlenül a feladat mellett szerepelnek, a szövegből mindig egyértelmű, hogy melyikhez tartoznak.

A kötet szerzői köszönetet mondanak Szász Gábornak rendkívül gondos lektori munkájáért és hasznos javaslataiért.

A feladatgyűjtemény szövegét a LaTeX, rajzait az AUTOCAD programcsomaggal szerkesztettük. Ez könnyebbé teszi egy javított kiadás elkészítését. Ezért kérünk minden olvasót, hogy a megtalált hibákat, javítási ötleteiket juttassák el a Közlekedésmérnöki Kar Matematika Tanszékére.

Budapest, 1993. július 15.

A szerkesztő

22. fejezet

Számsorok

Sor és összege

D 22.1 Az $[a_n; n \in \mathbf{N}^+]$ komplex (valós) számsorozathoz (D 7.3) hozzárendelt

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

formális összeget **komplex (valós) számsornak** vagy egyszerűen **sornak** nevezzük. Az $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n \in \mathbf{N}^+)$ (véges) összeget a sor n-edik **részletösszegének**, az $[a_n]$ sorozat elemeit pedig a sor **tagjainak** nevezzük. Ha a részletösszegek $[s_n]$ sorozata konvergens és határértéke s, akkor azt mondjuk, hogy a sor **konvergens**; s-et a sor **összegének** nevezzük, és ezt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ alakban írjuk.

Ha az $[s_n]$ sorozat divergens, akkor azt mondjuk, hogy a sor **divergens**. Speciálisan, ha $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \quad (-\infty)$, akkor azt szoktuk mondani, hogy a sor **végtelenhez (mínusz végtelenhez) divergál**, s ezt a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad (-\infty)$ képlettel jelöljük. A fejezetben i mindig a képzetes egységet jelenti.

T 22.2 Sor konvergenciáját nem befolyásolja, ha a sorból véges számú tagot elhagyunk, vagy a sorhoz véges számú tagot hozzáírunk, a sor összege azonban általában megváltozik.

T 22.3 Konvergens számsor tagjai nullasorozatot alkotnak.

T 22.4 **Cauchy-féle konvergenciakritérium**: A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ϵ-hoz van olyan n_0 valós szám, hogy minden $m > n > n_0$ esetén

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \epsilon.$$

A számításoknál jobban használható az előzővel ekvivalens következő megfogalmazás:

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ϵ-hoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$ tetszőleges, akkor minden p pozitív egész számra

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Az utóbbi feltételből következik, hogy ha $n > n_0$, akkor $\lim\limits_{p\to\infty} |s_{n+p} - s_n| \le \epsilon$.

T 22.5 A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ ($a, q \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ **mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha** $|q| < 1$; ebben az esetben a sor összege: $s = \dfrac{a}{1-q}$.

Feladatok

Közvetlenül a definíció alapján bizónyítsuk be, hogy az alábbi számsorok konvergensek, és határozzuk meg a sorok s összegét:

1.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + 3^n}{6^n}$,

2.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{5}{10^{2n+1}} + \dfrac{2}{10^{2n+2}}\right)$,

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^n$; $a > 0$,

4.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^n}$,

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1-i)^{3n}}{3^n}$,

6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{9n}}{1024^n}$,

7.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(a^2+a-1)^n}$; $a \in \mathbb{R}$,

8.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$,

9.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+2)}$,

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$,

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{9n^2 - 3n - 2}$,

12.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + (2i+1)n + i - 1}$,

13.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2}{n^2 + 2n(i+1) + 2i - 1}$,

14.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(a+n)(a+n+1)(a+n+2)}$; $a \in \mathbb{R}$,

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$,

16. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$,

17.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2+n+1}$ (Útmutatás: Mutassuk meg, hogy $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n+1}$),

18.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$,

19.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} = \dfrac{2n-1}{2^n}$,

20.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{a^n}$; $a > 1$,

21.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$,

22.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

Bizonyítsuk be, hogy a következő sorok divergensek:

23.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$; $0 < |a| \le 1$,

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$,

25.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

27.▷ $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$; $a, q \in \mathbf{C}$, $a \ne 0$, $|q| \ge 1$.

A Cauchy-féle konvergenciakritérium (T 22.4) segítségével bizonyítsuk be, hogy az alábbi sorok konvergensek:

28.▷ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a^n}$; $a > 1$, $0 \le a_n \le a$,

29.▷ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1}$,

30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}}{n}$.

Döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek:

31. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$,

32.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$,

33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^k}$; $a > 1$, $k \in \mathbf{N}$,

34. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{5^{n+a}-1}$; $a \in \mathbf{R}^+$,

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n}{n2^n}$,

36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+in}$,

37.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$; $x \in \mathbf{R}$,

38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$; $x \in \mathbf{R}$.

Nemnegatív tagú sorok

T 22.6 Nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata felülről korlátos. (Nyilvánvaló, hogy minden nemnegatív tagú sor valós.)

T 22.7 **Majoránskritérium**: Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ valós számsorozatokhoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor $0 \le a_n \le b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens. (Azt szokás mondani, hogy a $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$ sor **majorálja** a $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ sort, illetve a $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ sor **minorálja** a $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} b_n$ sort.)

T 22.8 **Minoránskritérium**: Ha az $[a_n]$ és $[b_n]$ valós számsorozatokhoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor $0 \le b_n \le a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens.

T 22.9 Gyökkritérium: Ha az $[a_n]$ valós számsorozathoz van olyan $0 < q < 1$ és olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $a_n \geq 0$ és $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Speciálisan, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemnegatív tagú sor és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a sor konvergens. (Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a sor divergens; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetben a gyökkritériummal nem dönthető el a konvergencia.)

T 22.10 Hányadoskritérium: Ha az $[a_n]$ valós számsorozathoz van olyan $0 < q < 1$ és olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Speciálisan, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor és $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a sor konvergens. (Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a sor divergens; $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ esetben a hányadoskritériummal nem dönthető el a konvergencia.)

M 22.11 Ha egy sor konvergenciája hányadoskritériummal eldönthető, akkor gyökkritériummal is. Vannak azonban olyan sorok, amelyek konvergenciája gyökkritériummal eldönthető, de hányadoskritériummal nem. A hányadoskritérium a gyakorlatban többnyire könnyebben kezelhető, mint a gyökkritérium.

T 22.12 Integrálkritérium: Ha az $f(x)$ valós függvény az $[n_0, \infty)$ $(n_0 \in \mathbf{N})$ intervallumon monoton csökkenő és pozitív, akkor a $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ sor és az $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál egyszerre konvergens vagy divergens.

T 22.13 A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p}$ $(p \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{R}^+)$ sor a $p > 1$ esetben konvergens, a $p \leq 1$ esetben pedig divergens. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbf{R}^+)$ sorok konvergensek.

Feladatok

A majoránskritérium (T 22.7), illetve a minoránskritérium (T 22.8) segítségével döntsük el az alábbi sorok konvergenciáját:

39.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$,

40.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$,

41.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3-16}{n^5+n}$,

42.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{2n^2-n}$,

43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos\frac{n}{2}\right)^{4n}}{n^n+1}$,

44. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{n}$,

45. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+4^n}{3^n+5^n}$,

46. $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n^5+1}}$,

47. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^7}}$,

48. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$,

49.▷ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$,

50. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 7n^2 + 12n}$,

51.▷ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$,

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

53. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$,

54. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{a^n}$; $a > 1$, $0 \le a_n \le a$,

55. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$,

56. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 2}$.

A hányadoskritérium (T 22.10) vagy a gyökkritérium (T 22.9) segítségével döntsük el a következő sorok konvergenciáját:

57.• $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$,

58.▷ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$,

59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

60.• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e-1}\right)^n$,

61. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n$,

62.▷ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$,

63.▷ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$,

64. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$,

65.• $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} n\right)^n$,

66.• $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, ahol $a_n = \begin{cases} \frac{1}{a^n}, & \text{ha } n = 2k-1, \\ \frac{1}{b^n}, & \text{ha } n = 2k; \end{cases}$ $1 < a < b$, $k \in \mathbb{N}^+$,

67.• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_1 = 2$ és $a_{n+1} = \frac{1 + \sin n}{n} a_n$,

68. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_1 = \frac{1}{3}$ és $a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+2} a_n$,

69. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = \frac{1 + \ln n}{n} a_n$.

Az alábbi sorok konvergenciáját az integrálkritérium (T 22.12) segítségével vizsgáljuk meg:

70.• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$,

71.• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

72.▷ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

73. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$,

74.* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$; $p \in \mathbb{R}$,

75. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$,

76.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r}$; $r \in \mathbb{R}$.

Leibniz-sorok

D 22.14 Egy váltakozó előjelű valós számsort **Leibniz-sornak** nevezünk, ha tagjai abszolút értékben monoton csökkennek és nullasorozatot alkotnak.

T 22.15 A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, amelyre a $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor Leibniz-sor. Speciálisan, minden Leibniz-sor konvergens.

Feladatok

Döntsük el, hogy az alábbi váltakozó előjelű sorok konvergensek vagy divergensek:

77.* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$,

78.* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{5n-2}$,

79.* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^n}$; $a<-1$,

80. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{a^n}$; $k\in\mathbf{N}$, $a<-1$,

81. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^{100}\cdot 99^n}{100^n}$,

82.▷ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^k}{n!}$; $k\in\mathbf{N}$,

83. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{n+100}$,

84.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n=\begin{cases}\frac{2}{n+3}, & \text{ha } n=2k-1,\\ -\frac{4}{(n+2)^2}, & \text{ha } n=2k,\ k\in\mathbf{N}^+,\end{cases}$

85.* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_n=\begin{cases}\frac{4}{(n+3)^2}, & \text{ha } n=2k-1,\\ -\frac{4}{n^2}, & \text{ha } n=2k,\ k\in\mathbf{N}^+.\end{cases}$

Abszolút és feltételes konvergencia

D 22.16 Egy számsort **abszolút konvergensnek** nevezzük, ha a tagjainak abszolút értékéből alkotott sor konvergens.

T 22.17 Minden abszolút konvergens sor konvergens. (Nyilvánvaló, hogy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha abszolút konvergens.)

D 22.18 Ha egy számsor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor **feltételesen konvergensnek** nevezzük.

T 22.19 Abszolút konvergens sor tagjainak sorrendjét tetszőlegesen megváltoztatva ismét abszolút konvergens sort kapunk, amelynek összege is megegyezik az eredeti sor összegével.

M 22.20 Feltételesen konvergens sor tagjainak sorrendjét megváltoztatva, más szóval a sort átrendezve, a sor összege is megváltozhat, sőt divergens sorrá is változhat.

M 22.21 Egy sor abszolút konvergenciájának vizsgálatához használhatók a nemnegatív tagú sorok konvergenciájára vonatkozó kritériumok (**T 22.7 – 22.12**). A számításainkhoz a kritériumokat elegendő a következő módon megfogalmazni:

T 22.22 Majoránskritérium: Ha az $[a_n]$ komplex (valós) és a $[b_n]$ valós számsorozathoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetben $|a_n| \le b_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

T 22.23 Minoránskritérium: Ha az $[a_n]$ komplex (valós) és a $[b_n]$ valós számsorozathoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetben $0 \le b_n \le |a_n|$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nem abszolút konvergens.

T 22.24 Gyökkritérium: Ha az $[a_n]$ komplex (valós) számsorozathoz van olyan $0 < q < 1$ és olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $\sqrt[n]{|a_n|} \le q$ teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. Speciálisan, ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor a sor abszolút konvergens. (Ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, akkor a sor divergens; $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ esetben a sor lehet abszolút konvergens, feltételesen konvergens, de divergens is.)

T 22.25 Hányadoskritérium: Ha az $[a_n]$ komplex (valós) számsorozathoz van olyan $0 < q < 1$ és olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $|a_n| > 0$ és $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$ teljesül, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens. Speciálisan, ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor a sor abszolút konvergens. (Ha $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, akkor a sor divergens; $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ esetben a sor lehet abszolút konvergens, feltételesen konvergens, de divergens is.)

T 22.26 Integrálkritérium: Ha az $f(x)$ valós függvény az $[n_0, \infty)$ $(n_0 \in \mathbf{N})$ intervallumon monoton csökkenő, pozitív és $f(n) = |a_n|$, akkor a $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha az $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens.

T 22.27 A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^p}$ $(p \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{C})$ sor a $p > 1$ esetben abszolút konvergens, a $p \le 1$ esetben pedig divergens. A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a \in \mathbf{C})$ sorok abszolút konvergensek (l. **T 22.13**).

T 22.28 A $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a, q \in \mathbf{C})$ mértani sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha konvergens (l. **T 22.5**).

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi valós számsorok közül melyek abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek:

86.• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt[3]{n^4}}$, **87.•** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$, **88.•** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$,

89.• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{2n}$, **90.▷** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos n)^n}{n^n+1}$, **91.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{4^n}$,

92. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n(n+1)}$, **93.▷** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$, **94.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}$,

95. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$, **96.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(2n+1)}$,

97. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{2n}$, **98.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{2n+4}\right)^{2n}$,

99.* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n \ln n)(\ln \ln n)^2}$, **100.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$,

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$, **102.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$,

103. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n}$; $p>1,\ q \geq 0$, **104.** $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n-\ln n}$,

105.▷ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+\sin n}{2+\sin n}\right)^{n-\ln n}$,

106.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p}$; $p \in \mathbb{R}$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi komplex számsorok közül melyek abszolút konvergensek, feltételesen konvergensek, illetve divergensek:

107.• $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$, **108.•** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^n$, **109.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-i}{2}\right)^n$,

110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$, **111.•** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$, **112.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$,

113.▷ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$, **114.▷** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$,

115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+(2n-1)i)^2}$, **116.▷** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right)^n$.

Az alábbi feladatokban a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor segítségével bizonyítsuk be, hogy az $[a_n]$ sorozat nullasorozat:

117.* $a_n = \frac{n^k}{a^n}$; $|a| > 1$, $k \in \mathbf{N}$ (l. a 7.74. feladatot),

118. $a_n = \frac{n^k}{n!}$; $k \in \mathbf{N}$ (l. a 7.75 feladatot),

119. $a_n = nq^n$; $|q| < 1$ (l. a 7.76. feladatot),

120. $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$,

121. $a_n = \frac{(a+i)^n}{n^k(a+1)^{n+k}}$; $a \in \mathbf{R}^+$, $k \in \mathbf{Z}$,

122. $a_n = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n$; $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$.

Műveletek sorokkal

T 22.29 A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, illetve abszolút konvergens sorok $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ összegsora és $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ különbségsora is konvergens, illetve abszolút konvergens, mégpedig $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

T 22.30 A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, illetve abszolút konvergens sor c-szerese, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ sor is konvergens, illetve abszolút konvergens, mégpedig $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (c \in \mathbf{C})$.

D 22.31 A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok Cauchy-szorzatának nevezzük azt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sort, amelyre $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ teljesül.

T 22.32 Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok konvergensek, továbbá legalább az egyik sor abszolút konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzatuk is konvergens és

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

T 22.33 Abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzata szintén abszolút konvergens.

Feladatok

123.[P] Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$ sorok összeg- és különbségsora? Ha igen, akkor abszolút vagy feltételesen konvergens?

124.[P] Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sorok különbségsora?

125.[*] Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ sorok Cauchy-szorzata?

126. Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sorok Cauchy-szorzata?

127.[P] Adjuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ sorok Cauchy-szorzatát. Bizonyítsuk be, hogy a szorzat abszolút konvergens.

128.[*] Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\operatorname{sgn} n} \left(\frac{3}{2}\right)^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ sorok divergensek, de Cauchy-szorzatuk konvergens!

129.[*] Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ sor konvergens és önmagával való Cauchy-szorzata (azaz a sor négyzete) divergens!

Vegyes feladatok

Döntsük el, hogy az alábbi sorok abszolút konvergensek, vagy feltételesen konvergensek, vagy divergensek (**130.** – **140.**):

130.[P] $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{a}{n^2}$; $\quad a \in \mathbf{R}$,

131. $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}$,

132. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$,

133. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ahol $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_{n+1} = \frac{n + \ln n}{n+10} a_n$,

134. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$,

135.[*] $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln a)^n}$; $\quad a > 0,\ a \neq 1$,

136.[*] $\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, $\quad$ ahol $[a_n]$ számtani sorozat és $a_n \neq 0 \quad (n \in \mathbf{N})$, 137.[▷] $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n^2+1)\sin\frac{n+1}{n}}{n^3+1}$,

138.[*] $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^r n}$; $p, r \in \mathbf{R}$. (A **72.** – **76.** feladatok általánosítása.)

139. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots$,

140. $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots$,

141.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorokhoz van olyan n_0 valós szám, hogy $n > n_0$ esetén $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

142.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív tagú sor konvergenciája hányadoskritériummal (**T 22.10**) eldönthető, akkor gyökkritériummal (**T 22.9**) is eldönthető.

143.[*] Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sorhoz vannak olyan n_0 és r (> 1) valós számok, hogy minden $n > n_0$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 - \frac{r}{n}$ teljesül, akkor a sor konvergens, ha viszont minden $n > n_0$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 - \frac{1}{n}$ teljesül, akkor a sor divergens. (**Raabe-féle konvergenciakritérium**)

144.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha $r = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$ ($r = \infty$ is lehetséges), akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, ha pedig $r < 1$, akkor a sor divergens. (Alkalmazzuk az előző feladat szerinti Raabe-kritériumot. Az $r = 1$ esetben ezzel a határértékkel nem dönthető el a sor konvergenciája.)

145. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív tagú sor konvergenciája hányadoskritériummal (**T 22.10**) eldönthető, akkor a Raabe-kritériummal (**143.**) is eldönthető.

A **143.** és **144.** feladatokban leírt Raabe-kritérium segítségével döntsük el az alábbi sorok konvergenciáját (**146.** – **147.**):

146. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (l. **T 22.12**),

147. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$; $a \in \mathbf{R}^+$.

148. Bizonyítsuk be az integrálkritériumot (**T 22.12**).

149.[▷] Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sor pedig divergens, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ és a $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)$ sorok divergensek.

Az előző feladat segítségével döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek:

150. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{n}\right)$,

151. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{1+n^2}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$,

152. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$,

153. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln^2 n}-\frac{1}{n^2}\right)$.

154.* Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Leibniz-sor összege s és n-edik részletösszege s_n, akkor $|s-s_n|\le|a_{n+1}|$.

155.* Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ $(a,q\in\mathbf{C}\ a\neq 0)$ konvergens mértani sor összege s és n-edik részletösszege s_n, akkor $|s-s_n|=\left|\frac{aq^{n+1}}{1-q}\right|$.

156.[P] Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegei sorozatának van konvergens részsorozata és $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, akkor a sor konvergens.

157.* Mutassuk meg, hogy abszolút konvergens sort tetszőlegesen átrendezve ismét abszolút konvergens sort kapunk, amelynek összege is megegyezik az eredeti sor összegével (**T 22.19**).

158.[P] Mutassuk meg, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens sorban minden $k\in\mathbf{N}^+$ esetén a_{2k-1}-et és a_{2k}-t felcseréljük, akkor az így kapott $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor összege egyenlő az eredeti sor összegével. Mit mondhatunk abban az esetben, ha a sor divergens?

159.* Mutassuk meg, hogy feltételesen konvergens sor pozitív illetve negatív tagjaiból (bármilyen sorrendben) képezett sorok divergensek.

160.* Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tetszőleges feltételesen konvergens sor. Bizonyítsuk be, hogy bármely s valós számhoz megadható a sornak olyan átrendezése, hogy az átrendezett sor összege éppen s, és megadható olyan átrendezése is, hogy az átrendezett sor divergens.

161.* Legyen $[a_n; n\in\mathbf{N}^+]$ tetszőleges nullasorozat. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum_{j=1}^{\infty}(a_{(j-1)k+1}+a_{(j-1)k+2}+\cdots+a_{jk})$ sor tetszőleges pozitív egész k esetén konvergens és ebben az esetben a két sor összege egyenlő. (Ez azt jelenti, hogy konvergens esetben az utóbbi sorban a zárójelek elhagyhatók, ami nem tehető meg bármely sor esetén.)

162.* Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sort úgy rendezzük át, hogy négy pozitív tagot kövessen egy negatív tag (pozitív illetve negatív tagok egymás közötti sorrendjét nem változtatva), a kapott sor összege az eredeti sor összegének kétszerese, azaz $2\ln 2$ lesz. (Ha felhasználjuk Szász G., Matematika II. tankönyvének 293.oldalán definiált $c = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n)$ Euler-Mascheroni-féle számot, akkor a könyv 311. oldalának 2. példája alapján járhatunk el.)

163.* A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sort rendezzük át úgy, hogy három pozitív tagot kövessen két negatív tag (pozitív illetve negatív tagok egymás közötti sorrendjét nem változtatva). Számítsuk ki az átrendezett sor összegét (l. az előző feladatot!).

164.* A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sort rendezzük át úgy, hogy először egy pozitív tagot kövessen egy negatív tag, majd két pozitív tagot egy negatív, azután mindig eggyel több pozitív tagot egy negatív (pozitív illetve negatív tagok egymás közötti sorrendjét nem változtatva). Mutassuk meg, hogy az így átrendezett sor divergens (l. az 162. feladatot!).

165.$^{\triangleright}$ Legyenek a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok pozitív tagúak. Bizonyítsuk be, hogy ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens; ha pedig $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens.

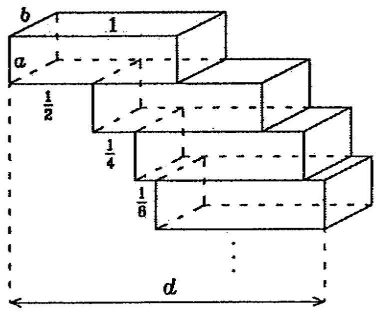
166.$^{\triangleright}$ Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok abszolút konvergensek, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ sor is abszolút konvergens. Igaz-e az állítás megfordítása?

167. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens, akkor minden $k \in \mathbb{N}^+$ esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k$ sor is abszolút konvergens.

168. Egyszerű számítással kimutatható, hogy ha az M_1 tömegpont v_1, tőle s távolságra lévő M_2 tömegpont $v_2 (< v_1)$ nagyságú állandó sebességgel ugyanazon az egyenesvonalú pályán egyirányban mozog, mégpedig M_1 közeledik M_2-höz, akkor M_1 $s\frac{v_1}{v_1 - v_2}$ út megtétele után utoléri M_2-t. Vizsgáljuk meg a tömegpontok mozgását a következő módon: Legyen egy adott pillanatban M_1 az A, az M_2 pedig az M_1-től s távolságban lévő B pontban. Amikor M_1 megérkezik a B pontba, akkor M_2 már a B-től különböző B_1 pontban

van. Amíg M_1 eljut a B_1 pontba, addig M_2 a B_1-től különböző B_2 pontba. Ezt folytatva azt kapjuk, hogy M_1 soha sem éri utol M_2-t. Hol a hiba a gondolatmenetben? (Zénón ókori görög filozófus ezzel a gondolatmenettel "bizonyította", hogy nincs mozgás. A gyors Akhillész sem tudja utolérni a nagyon lassú teknősbékát.)

169.* Mekkora d szélességűre építhető homogén tömegeloszlású egybevágó téglatestekből az ábrán látható alakzat anélkül, hogy összeomlana? Hol van az alakzat tömegközéppontja?



23. fejezet

Függvénysorozatok és sorok

Alapfogalmak

D 23.1 Komplex (valós) változós **függvénysorozatnak**, illetve **függvénysornak** nevezzük az olyan sorozatot (D 7.1 és D 7.3), illetve sort (D 22.1), amelynek elemei, illetve tagjai komplex (valós) függvények.

D 23.2 A komplex (valós) változós $[f_n; n \in \mathbf{N}]$ függvénysorozat, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor D **értelmezési tartományán** értjük azoknak a számoknak a halmazát, amelyek az f_n függvények mindegyikének értelmezési tartományába beletartoznak.

D 23.3 Az értelmezési tartomány olyan elemét, ahol a függvénysorozat (függvénysor) konvergens, illetve divergens, a függvénysorozat (függvénysor) **konvergencia-**, illetve **divergenciapontjának** nevezzük. A konvergenciapontok halmazát a függvénysorozat (függvénysor) **konvergenciatartományának** mondjuk. (Speciálisan, ha a konvergenciapontok halmaza egy intervallum, akkor **konvergenciaintervallumnak**, ha egy kör, akkor pedig **konvergenciakörnek** nevezzük.)

D 23.4 Az $[f_n; n \in \mathbf{N}]$ függvénysorozat, illetve a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor konvergenciatartománya legyen K. Az

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad (z \in K)$$

függvényt az $[f_n; n \in \mathbf{N}]$ függvénysorozat **határfüggvényének (limeszének)**, az

$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad (z \in K)$$

függvényt pedig a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor **összegfüggvényének** nevezzük.

M 23.5 A továbbiakban a fejezetben x mindig valós változót, z pedig komplex változót jelent. Ebben a fejezetben is i mindig a képzetes egységet jelenti.

Feladatok

Határozzuk meg a következő függvénysorozatok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát és f határfüggvényét:

1.• $\left[\dfrac{n^2z+6n}{3n^2+nz};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 2.• $\left[\dfrac{z^n}{3}+\dfrac{z^{n+1}}{4};\ n\in\mathbf{N}\right]$,

3.• $\left[\sqrt{n(x^2-1)}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right);\ n\in\mathbf{N}^+\right]$,

4. $\left[\dfrac{x^{n+2}+1}{x^n};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 5. $\left[\dfrac{x^n}{1+x^{2n}};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$,

6. $\left[\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n;\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 7. $\left[\dfrac{\sin nx}{n};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$,

8. $\left[e^{-nx};\ n\in\mathbf{N}\right]$, 9. $\left[\sin^n x+\cos^n x;\ n\in\mathbf{N}\right]$,

10. $\left[(\ln x)^n;\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 11.• $\left[n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right);\ n\in\mathbf{N}^+\right]$,

12.• $\left[n\sin\dfrac{x}{n};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 13. $\left[(n\ln x)\left(e^{\frac{x}{n}}-1\right);\ n\in\mathbf{N}^+\right]$,

14. $\left[\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n};\ n\in\mathbf{N}^+\right]$, 15.* $\left[nx(1-x)^n;\ n\in\mathbf{N}^+\right]$.

Határozzuk meg ~~az~~ alábbi függvénysorok D értelmezési tartományát, K konvergenciatartományát és s összegfüggvényét:

16.• $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{(1+z)^n}$, 17.• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n$, 18. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^{n+1}}{(x-1)^n}$,

19. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}x$, 20. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\operatorname{tg}^n x$, 21. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2}{(1+z^2)^{2n}}$,

22.• $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a^{-nx};\quad a>0$, 23.▷ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{n(n+1)}$, 24.• $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{e^{-x}}{n^2-1}$,

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$, 26. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x+n)(x+n+1)}$,

27.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{z^n}$, 28.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nz^n$, 29.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^n$,

30.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^2$.

Határozzuk meg a következő függvénysorok D értelmezési tartományát és K konvergenciatartományát. Továbbá döntsük el, hogy a konvergenciatartomány mely pontjaiban abszolút konvergens (D 22.16) a függvénysor:

31.• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4+x^2}$, 32.• $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^n$, 33.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{4x}{1+4x^2}\right)^n$, 34.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{4z}{1+4z^2}\right)^n$,

35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{|x|}{x}\right)^n$, 36. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\mathrm{Ent}\, x}{x}\right)^n$, 37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$,

38.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^{2n}}$, 39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n\sqrt{x+2}}$, 40. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-x}$,

41. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{z^n}$, 42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(z+3)^n}$, 43. $\sum_{n=1}^{\infty} n^x$,

44.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{e^{nx}}$, 45. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$, 46. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{n}$,

47. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{-n\sin x}}$, 48.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n\sqrt{4+nx}}$, 49. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}$,

50. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n-1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$, 51. $\sum_{n=1}^{\infty} (1-x)(1-\sqrt{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})$,

52. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+n}{xn}\right)^n$, 53.* $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$, 54.* $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg}^n\left(x+\frac{1}{n}\right)$,

55.* $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}$, 56. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n^2+e^{2x}}$, 57. $\sum_{n=0}^{\infty} 2n\sin\frac{x}{3^n}$,

58. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\frac{z^n}{z^n+1}$, 59. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{(x+1)(2x+1)\cdots(nx+1)}$,

60. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-\mathrm{Ent}\, x}{x}\right)^n$, 61. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$, 62. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Hatványsorok

D 23.6 A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ függvénysort a z_0 körüli komplex változós hatványsornak nevezzük, ha $a_n, z_0 \in \mathbf{C}$ és z komplex változó. Ha speciálisan $a_n, z_0 \in \mathbf{R}$ és z valós változó, akkor valós változós hatványsorról beszélünk, és ebben az esetben z helyett x-et írunk. (Az egyszerűbb írásmód kedvéért megállapodunk abban, hogy a $z = z_0$ esetben is $(z-z_0)^0 = 1$ legyen.)

T 23.7 Abel-tétel: Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergens a z_1 pontban, akkor abszolút konvergens minden olyan z pontban, amelyre $|z-z_0| < |z_1-z_0|$.

M 23.8 A z_0 körüli bármely hatványsor a z_0 pontban konvergens. Abel tételéből következik, hogy ha a hatványsornak van divergenciapontja, akkor megadható olyan $r(\geq 0)$ valós szám, hogy $|z-z_0| < r$ esetén a hatványsor abszolút konvergens, $|z-z_0| > r$ esetén pedig divergens. A $|z-z_0| = r$ feltételnek eleget tevő pontokban lehet a hatványsor abszolút konvergens, feltételesen konvergens, de divergens is. Az r számot a **hatványsor konvergenciasugarának** nevezzük. A $|z - z_0| < r$ feltételnek eleget tevő pontok (számok) halmaza a komplex számsíkon a z_0 középpontú r sugarú nyílt körlap, a valós számegyenesen a $(z_0 - r, z_0 + r)$ nyílt intervallum. Ha $r = 0$, akkor csak a z_0 pontban konvergens a hatványsor. Ha a sornak nincs divergenciapontja, a konvergenciatartomány a komplex számsík, illetve a valós számegyenes; megállapodunk abban, hogy ekkor $r = \infty$.

T 23.9 A hányados- (**T 22.25**) vagy a gyökkritérium (**T 22.24**) szerint:

$$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{vagy} \quad r = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}},$$

ha a megfelelő határértékek léteznek.

Megjegyezzük, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0\right)$, akkor $r = \infty$, ha pedig $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \infty\right)$, akkor $r = 0$.

T 23.10 Ha a valós változós $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor nyílt intervallumon vagy az egész valós számegyenesen konvergens, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = s(x),$$

akkor a tagonkénti differenciálással, illetve tagonkénti integrálással kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$$

hatványsor is konvergens ezen az intervallumon vagy az egész számegyenesen, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = s'(x), \quad \text{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1} = S(x) - S(x_0),$$

ahol S az s egy primitív függvénye.

M 23.11A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hatványsor konvergenciavizsgálata az $z - z_0 \mapsto z$ transzformációval mindig visszavezethető a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hatványsor konvergenciavizsgálatára.

T 23.12 Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ valós hatványsor konvergenciasugara $0 < r < \infty$, összegfüggvénye $s(x)$, $x \in (-r, r)$ és a konvergenciaintervallum r, illetve $-r$ határpontjában a hatványsor konvergens, akkor

$$\lim_{x\to r-0} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n, \text{illetve} \lim_{x\to -r+0} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-r)^n.$$

(Az összegfüggvény a konvergenciaintervallum jobb (bal) oldali határpontjában balról (jobbról) folytonos, ha a határpont az intervallumhoz tartozik.)

M 23.13 Sokszor hasznos a hatványsor következő "átindexezése":

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n-n_0} z^{n-n_0} \quad (n_0 \in \mathbf{N}^+).$$

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi valós változós hatványsorok r konvergenciasugarát, adjuk meg a K konvergenciaintervallumát, és vizsgáljuk meg a konvergenciaintervallum határpontjaiban a sor konvergenciatulajdonságait:

63.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 \cdot 2^n}$, **64.*** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2} x^n$, **65.*** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n x^n$,

66. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(n-1)}$, **67.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\sqrt{(4n-1)2^n}}$, **68.*** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n(n-1)\sqrt{n-1}}$,

69. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1) x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$, **70.** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{3}$,

71. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} (x+1)^n$, **72.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n}$; $a \neq 0$, **73.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} 5^{\sqrt{n}}}$,

74.* $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n!}$.

Számítsuk ki az alábbi komplex változós hatványsorok r konvergenciasugarát, és adjuk meg a konvergenciakör z_0 középpontját:

75.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$, **76.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$, **77.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n} (z-1)^n$,

78.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+in}$, **79.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{n^2 \cdot 2^n}$, **80.** $\sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n$,

81. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(z+1-i)^n}{n!}$, **82.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} (z-i)^n$; $a \in \mathbf{C}$,

83. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\cdots(1-ni)}$, **84.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

A **T 23.10** tétel alapján határozzuk meg a következő hatványsorok s összegfüggvényét és K konvergenciatartományát:

85.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, **86.*** $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$, **87.*** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$,

88. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{a^{n+1}}$; $a \neq 0$, **89.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{na^{n-1}}$; $a > 0$,

90. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{a^{n+2}} x^n$; $a \neq 0$, **91.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!} (x+4)^n$, 92.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{n+1}}{n(n+1)}$, 93.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, 94.* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^{n+1}}{n+1}$.

Taylor-sorok, Maclaurin-sorok

D 23.14 Az x_0 helyen legalább k-szor differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 helyhez tartozó k-adik **Taylor-polinomján (D 11.5)** a

$$T_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomfüggvényt értjük ($f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ és $f^{(n)}(x_0)$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ az f függvény n-edik deriváltjának értéke az x_0 helyen.)

T 23.15 Ha az egyváltozós valós f függvény x_0 valamely E teljes környezetében legalább $(k+1)$-szer differenciálható, akkor x_0 és $x \in E$ között van olyan ξ_k hely, hogy

$$f(x) = T_k(x) + \frac{f^{(k+1)}(\xi_k)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \quad \text{(Taylor-formula)}$$

(l. **T 11.6**).

D 23.16 Az előbbi tételben szereplő $R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi_k)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}$ függvényt a Taylor-formula k-adik **maradéktagjának** nevezzük. (l. **T 11.6**)

M 23.17 Ha $[x_0-\delta, x_0+\delta] \subseteq E$ $(\delta \in \mathbf{R}^+)$ és M_n az $|f^{(n+1)}(x)|$ függvény szuprémuma a zárt $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ intervallumon (l. **T 8.20** és **T 9.5**), akkor minden $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$ esetén

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \le \frac{M_n \delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ zárt intervallumon az f függvény és a T_n Taylor-polinom eltérése abszolút értékben legfeljebb $H_n(\delta) = \frac{M_n \delta^{n+1}}{(n+1)!}$. Azt is szoktuk mondani, hogy az n-edik Taylor-polinom legfeljebb $H_n(\delta)$ hibával közelíti meg az f függvényt az $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ zárt intervallumon. Sok esetben M_n meghatározása nehézkes, ezért egy könnyebben megadható felső korlátot is elfogadunk a hiba becslésére. Hasonló módon kapható, hogy adott x helyen $|f(x) - T_n(x)| \le M_n \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$, ahol $x_0 < x$ (illetve $x < x_0$) esetén M_n az f függvény szuprémuma a zárt $[x_0, x]$ (illetve $[x, x_0]$) intervallumon; erre a felső korlátra a $h_n(x)$ jelölést vezetjük be. Ha $f(x)$-et $T_n(x)$-szel n tizedesjegyre kerekített értékkel közelítjük, akkor $|R_n(x)| < 0.5 \cdot 10^{-n}$.
(Az olvasó számára ajánljuk a **11.9. – 11.34.** feladatok megoldásának áttekintését!)

D 23.18 Ha az egyváltozós valós f függvény az x_0 hely valamely E teljes környezetében akárhányszor differenciálható, akkor az f függvény x_0 körüli **Taylor-során** a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (x \in E)$$

hatványsort értjük. Ha $x_0 = 0$, akkor a sort az f **Maclaurin-sorának** nevezzük.

T 23.19 Legyen az egyváltozós valós f függvény az x_0 hely valamely E teljes környezetében akárhányszor differenciálható. Minden $x \in E$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

akkor és csak akkor, ha $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. (Ilyenkor azt szokás mondani, hogy az f függvényt x_0 E teljes környezetében előállítja a Taylor-sora, vagy azt, hogy x_0 E teljes környezetében f **(Taylor-)sorba fejthető.**)

T 23.20 Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciaintervalluma K és összegfüggvénye s, akkor $a_n = \dfrac{s^{(n)}(x_0)}{n!}$ $(n \in \mathbf{N})$, azaz a hatványsor a konvergenciaintervallumán egyenlő összegfüggvényének Taylor-sorával.

T 23.21 Néhány elemi függvény Maclaurin-sora:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} \quad (-1 < x \le 1), \quad e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

T 23.22 Ha az f függvény x_0 körüli Taylor-sora Leibniz-sor és az x helyen előállítja a függvényt, akkor

$$|f(x) - T_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(x_0)|}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$$

(l. a **22.154.** feladatot).

T 23.23 Ha az f függvény x_0 körüli Taylor-sora az x helyen előállítja a függvényt, továbbá $|x - x_0| < 1$ és van olyan M_n valós szám, hogy minden $k \ge n+1$ esetén $|f^{(k)}(x_0)| \le M_n$, illetve $\dfrac{|f^{(k)}(x_0)|}{k!} \le M_n$, akkor

$$|f(x) - T_n(x)| \le \frac{M_n}{(n+1)!} \cdot \frac{|x - x_0|^{n+1}}{1 + x_0 - x}, \quad \text{illetve} \quad |f(x) - T_n(x)| \le \frac{M_n|x - x_0|^{n+1}}{1 + x_0 - x}.$$

Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergens az x helyen és összege $s(x)$, továbbá $|x - x_0| < 1$ és van olyan M_n valós szám, hogy minden k-ra $|a_k| \le M_n$, akkor

$$|s(x) - T_n(x)| = |s(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k| \le \frac{M_n|x - x_0|^{n+1}}{1 + x_0 - x}$$

(l. a **22.155.** feladatot).

M 23.24A hatványsorok konvergenciavizsgálatánál sok esetben jól használható a $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ úgynevezett **binomiális sor**, ahol $\alpha \in \mathbf{R}$, $\binom{\alpha}{0} = 1$ és $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, ha $n \in \mathbb{N}^+$. Könnyen belátható, hogy ha $\alpha \in \mathbb{N}$, akkor a sornak csak véges sok tagja nem nulla, mivel ekkor $\alpha < n$ esetén $\binom{\alpha}{n} = 0$. Megmutatható, hogy ha $\alpha \notin \mathbb{N}$, akkor a sor konvergenciasugara 1; az 1 helyen a sor $\alpha > -1$ esetén konvergens, $\alpha \leq -1$ esetén pedig divergens; a -1 helyen $\alpha \geq 0$ esetén konvergens, $\alpha < 0$ esetén pedig divergens. Minden olyan x helyen, ahol a sor konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = (1+x)^\alpha.$$

Feladatok

Határozzuk meg az adott x_0 valamely teljes környezetében az alábbi függvények Taylor-sorát. Adjuk meg a Taylor-sor K konvergenciaintervallumát, és mutassuk meg, hogy K-n a függvényt előállítja a Taylor-sora. Legfeljebb mekkora $H_n(\delta)$, illetve $h_n(x)$ hibával közelíti meg az $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ zárt intervallumon, illetve az x helyen az n-edik Taylor-polinom a függvényt? Adjuk meg $T_n(x)$-et, $H_n(\delta)$-t és $h_n(x)$-et $n = n_1$, $\delta = \delta_1$ és $x = x_1$ esetén!

95. e^x; $x_0 = 2$, $n_1 = 4$, $\delta_1 = 1$, $x_1 = 1$,

96. $\sin x$; $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $n_1 = 5$, $\delta_1 = \frac{\pi}{4}$,

97. $x^4 - 2x^3 + 2$; $\overline{x_0 = 1}$, $n_1 = 2$, $\delta_0 = \frac{1}{10}$,

98. $\operatorname{ch} x$; $x_0 \in \mathbb{R}$, **99.** $\ln x$; $x_0 = 2$, **100.** $\operatorname{sh} x$; $x_0 = 0$.

Írjuk fel a következő függvények Maclaurin-sorát, és állapítsuk meg, hogy ez a hatványsor mely intervallumban állítja elő a függvényt:

101. a^x; $a > 0$, **102.** e^{-x^2}, **103.** $\sin(x+2)$,

104. e^{x^2+1}, **105.** $\operatorname{ch} x$, **106.** $\operatorname{sh} \frac{x}{2}$,

107. $x \ln(x+1)$, **108.** $\ln(x^2+1)$, **109.** $\ln(1-x^2)$,

110. $e^x \operatorname{ch} x$, **111.** $\cos^2 x$, **112.** $\frac{x}{2-x}$,

113. $\frac{1}{1-2x^2}$, **114.** $\frac{3}{(1-x)(1+2x)}$, **115.** $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$,

116. $\operatorname{arctg} x$, **117.** $\ln \frac{1+x}{1-x}$, **118.** $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$.

119. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, **120.** $\frac{1}{x^2-5x+6}$, **121.** $\arcsin x$.

Számítsuk ki a következő függvények $x = a$ helyen, t tizedesjegyre kerekített értékét a függvény Maclaurin-sora vagy alkalmas $x_0 \neq 0$ körüli Taylor-sora segítségével:

122. e^x; $a = 1$, $t = 4$, **123.** $\sin x$; $a = \frac{\pi}{60}$, $t = 5$, 124.* $\sin x$; $a = \frac{23\pi}{45}$, $t = 5$, 125. $\ln x$; $a = 2$, $t = 4$.

Számítsuk ki T 23.10 segítségével a következő határozott integrálokat a megadott h pontossággal:

126.* $\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx$; $h = 10^{-6}$, 127.* $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$; $h = 10^{-4}$,

128.* $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x - 1}{x}\,dx$; $h = 10^{-5}$, 129. $\int_0^1 \cos x^2\,dx$; $h = 10^{-3}$,

130. $\int_0^1 \sin x^2\,dx$; $h = 10^{-4}$, 131. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2}\,dx$; $h = 10^{-5}$,

132. $\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^3}}\,dx$; $h = 10^{-4}$, 133. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$; $h = 10^{-3}$,

134. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$; $h = 10^{-2}$, 135. $\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x\,dx$; $h = 10^{-5}$.

Határozzuk meg az alábbi számsorok összegét alkalmasan választott hatványsorok összegfüggvénye segítségével:

136.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$, 137.* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$, 138.▷ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$,

139. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$, 140. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}$, 141. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$,

142. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$.

Fourier-sorok

D 23.25 A $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos ncx + b_n \sin ncx)$ alakú függvénysort, amelyben c zérustól különböző konstans, **trigonometrikus** sornak nevezzük.

D 23.26 A $2p$ ($p \neq 0$) szerint periodikus (**D 10.11**) valós f függvény ($2p$ szerinti) **Fourier-sorának** nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$$

trigonometrikus sort, ha

$$a_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)\,dx, \qquad b_0 = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos \frac{n\pi x}{p}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin \frac{n\pi x}{p}\,dx \quad (n \in \mathbf{N}^+).$$

Jelölés: $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{p} + b_n \sin \frac{n\pi x}{p}\right)$. Az a_n és b_n $(n \in \mathbf{N})$ együtthatókat f **Fourier-együtthatóinak** nevezzük.

D 23.27 Speciálisan a 2π szerint periodikus valós f függvény (2π szerinti) Fourier-sorának nevezzük a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

trigonometrikus sort, ha

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad b_0 = 0,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \in \mathbf{N}^+).$$

T 23.28 Ha a periodikus valós f függvénynek az x_0 helyen van bal és jobb oldali határértéke (**D 8.9**), továbbá a függvény Fourier-sora ebben a pontban konvergens, akkor az x_0 helyen a függvény Fourier-sorának összege egyenlő a függvény bal és jobb oldali határértékének számtani közepével.
Speciálisan, ha az x_0 helyen az f függvény folytonos, a Fourier-sora pedig konvergens, akkor ezen a helyen a Fourier-sor összege $f(x_0)$.

T 23.29 Ha a $[-p,p]$ intervallumnak van olyan $-p = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = p$ beosztása, hogy az (x_{i-1}, x_i) $(i = 1,2,\ldots n)$ intervallumokon a $2p$ szerint periodikus f függvény monoton, akkor a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens (ha létezik).

T 23.30 Ha az f valós függvény $2p$ szerint periodikus, akkor tetszőleges $a \in \mathbf{R}$ esetén:

$$\int_a^{a+2p} f(x)\,dx = \int_0^{2p} f(x)\,dx.$$

M 23.31 Az előző tétel azt jelenti, hogy a Fourier-együtthatók kiszámításakor az integrálást tetszőleges $2p$ hosszúságú intervallumon végezhetjük.

M 23.32 Páros függvény Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok, páratlan függvény Fourier-sorában pedig csak szinuszos tagok szerepelnek.

M 23.33 A számításoknál jól használható az az észrevétel is, hogy a $[-p,p]$ intervallumon integrálható páratlan függvény integrálja ezen az intervallumon 0, páros függvényre pedig a következő igaz:

$$\int_{-p}^{p} f(x)\,dx = 2\int_0^{p} f(x)\,dx.$$

Ezért $2p$ szerint periodikus páros f függvény a_n Fourier-együtthatói az

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{p} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{p}\int_0^{p} f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx \quad (n \in \mathbf{N}^+)$$

képlettel, $2p$ szerint periodikus páratlan f függvény Fourier-együtthatói pedig a

$$b_0 = 0, \quad b_n = \frac{2}{p}\int_0^{p} f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx \quad (n \in \mathbf{N}^+)$$

képlettel számíthatók.

Feladatok

Írjuk fel a következő feladatokban az $2p$ szerint periodikus f valós függvény Fourier-sorát, és vizsgáljuk meg, hogy mely helyeken állítja elő a sor a függvényt (a függvényt csak a $(-p,p]$ intervallumon adjuk meg):

143.* $f(x)=\pi^2-x^2;\quad -\pi<x\le\pi,$

144.* $f(x)=\sin x;\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},$

145.* $f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{ha } -\pi<x\le 0,\\ 3x, & \text{ha } 0<x\le\pi,\end{cases}$

146. $f(x)=|x|;\quad -\pi<x\le\pi,$

147.* $f(x)=\operatorname{sgn}\cos x;\quad -\pi<x\le\pi,$

148.* $f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{ha } -\pi<x\le 0,\\ 0, & \text{ha } 0<x\le\pi,\end{cases}$

149. $\arcsin(\cos x);\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},$

150. $\cos x;\quad -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},$

151. $f(x)=x\cos x;\quad -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2},$

152.* $f(x)=|x|-1;\quad -1<x\le 1,$

153. $\cos^3 x;\quad -\pi<x\le\pi,$

154. $f(x)=\dfrac{\pi^2-3x^2}{12};\quad -\pi<x\le\pi,$

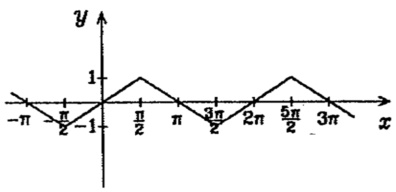
155. $f(x)=\pi+x;\quad -\pi<x\le\pi,$

156.* $f(x)=\begin{cases}-2, & \text{ha } -2<x<-1,\\ x, & \text{ha } -1\le x\le 1,\\ 2, & \text{ha } 1<x<2,\end{cases}$

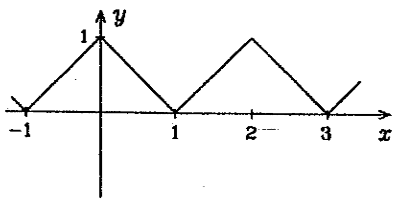
157. $f(x)=e^x;\quad -1<x\le 1.$

Adjuk meg a Fourier-sort, ha összegfüggvényének grafikonja az alábbi:

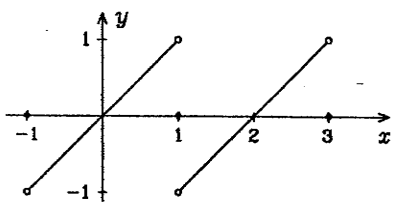
158.*



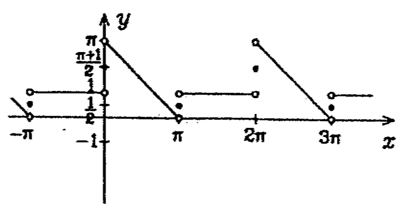
159.



160.



161.



Számítsuk ki az alábbi sorok összegét a $2p$ szerint periodikus f valós függvény Fourier-sora segítségével (a függvényt általában csak a $(-p,p]$ intervallumon adjuk meg):

162. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$; $f(x)=x^2$, $-\pi<x\le\pi$,

163. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$; $f(x)=|x|$, $-\pi<x\le\pi$,

164.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$; $f(x)=\operatorname{sgn}x$, $-\pi<x\le\pi$,

165.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$; $f(x)=|\sin x|$,

166.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{16n^2+16n+3}$; $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $-\pi<x\le\pi$,

167. $\pi^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-6\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; $f(x)=x^4$, $-1<x\le 1$.

Vegyes feladatok

168. Legyenek $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z)$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z)$ komplex változós függvénysorok, valamint z_0 olyan komplex szám, amelyre

$$0<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(z_0)}{g_n(z_0)}\right|<\infty.$$

Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ sor akkor és csak akkor abszolút konvergens, ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z_0)$ sor is abszolút konvergens.

169. Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(z_0)}{g_n(z_0)}\right|=0$ és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z_0)$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ sor is abszolút konvergens. Ha viszont a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ sor nem abszolút konvergens, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z_0)$ sor sem abszolút konvergens (l. az előző feladatot).

170. Mutassuk meg, hogy ha $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(z_0)}{g_n(z_0)}\right|=\infty$ és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_n(z_0)$ sor abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z_0)$ sor is abszolút konvergens. Ha viszont a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(z_0)$

sor nem abszolút konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ sor sem abszolút konvergens (l. a **168.** feladatot).

171. Bizonyítsuk be, hogy ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ komplex változós hatványsor konvergenciasugara r, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{qn}$ $(q \in \mathbf{N}^+)$ hatványsor konvergenciasugara $\sqrt[q]{r}$. Speciálisan, ha az első sor konvergens az egész komplex számsíkon, akkor a második is.

172. Igazoljuk, hogy az $x = 0$ helyen akárhányszor differenciálható bármely páros (páratlan) függvény Maclaurin-sora x-nek csak páros (páratlan) hatványait tartalmazza.

173.* Mutassuk meg, hogy az

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

valós függvény Maclaurin-sora mindenütt konvergens, de csak a 0 helyen állítja elő a függvényt.

174. Határozzuk meg az $f(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(x \sin\alpha)$ $(\alpha \in \mathbf{R})$ függvény Maclaurin-sorát, és bizonyítsuk be, hogy a sor mindenütt előállítja a függvényt.

175.* Határozzuk meg e^x Maclaurin-sorának felhasználásával a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n!}$ sor összegét.

176.* Határozzuk meg a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+3n}$ sor összegét $\dfrac{1}{1+x^3}$ Maclaurin-sorának felhasználásával.

177.* Bizonyítsuk be a **T 23.12** tételt.

178.* A **23.10** tétel alkalmazásával határozzuk meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$ hatványsor összegfüggvényét és konvergenciaintervallumát.

179.* Bizonyítsuk be, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$ függvénysor mindenütt konvergens, és adjuk meg a sor összegfüggvényét.

Számítsuk ki az alábbi valós változós hatványsorok r konvergenciasugarát, adjuk meg a K konvergenciaintervallumát és vizsgáljuk meg a konvergenciaintervallum határpontjaiban a sor konvergenciatulajdonságait:

180.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{a^n + b^n}$; $\quad a, b \in \mathbf{R}^+$,

181. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}\right) x^n$; $\quad a, b \in \mathbf{R}^+$,

182.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x-1)^n \left(\sin\dfrac{1}{n}\right)^p$,

183. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{x}{\sin n}\right)^n$.

184. Bizonyítsuk be a **T 23.23** tételt.

185. Milyen kapcsolat van az f függvény a_n, b_n és a g függvény c_n, d_n Fourier-együtthatói között, ha $f(-x) = g(x)$, illetve $f(-x) = -g(x)$ $(x \in \mathbf{R})$?

186. A 2π szerint periodikus $f(x)$ függvény a_n, b_n Fourier-együtthatóinak ismeretében számítsuk ki az $f(x+h)$ $(h \in \mathbf{R})$ függvény Fourier-sorának együtthatóit.

187. Mutassuk meg, hogy ha az f függvény teljesíti az $f(x+\pi) = -f(x)$ $(x \in \mathbf{R})$ feltételt, akkor 2π szerint periodikus. Bizonyítsuk be, hogy ha a függvény **D** 23.27-ben definiált Fourier-együtthatói léteznek, akkor $a_{2n} = b_{2n} = 0$ $(n \in \mathbf{N})$.

188. Legyen az f függvény π szerint periodikus. Bizonyítsuk be, hogy ha a függvény **D** 23.27-ben definiált Fourier-együtthatói léteznek, akkor $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ $(n \in \mathbf{N})$.

24. fejezet

Komplex függvények

Komplex változós elemi függvények

D 24.1 Egyváltozós **komplex függvénynek** olyan f függvényt nevezünk, amelyre $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbf{C}$ és $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \mathbf{C}$. (Speciálisan, ha $\mathrm{Dom}\, f \subseteq \mathbf{R}$ és $\mathrm{Ran}\, f \subseteq \mathbf{R}$, akkor az egyváltozós valós függvény fogalmához jutunk (**D 8.1**). Ebben a fejezetben **komplex függvényen** mindig egyváltozós komplex függvényt értünk, többváltozós komplex függvényekkel nem foglakozunk.)

M 24.2 A komplex számok $\mathbf{C}$ halmaza metrikus teret alkot a $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ $(z_1, z_2 \in \mathbf{C})$ távolságfüggvénnyel (l. **7.34.** feladatot). Ezért komplex függvényekre a **határérték** és a **folytonosság** fogalmát pontosan úgy definiáljuk, mint egyváltozós valós függvényekre (l. a **8.** fejezetet).

M 24.3 Ha a z változót és a $w = f(z)$ függvényértéket felbontjuk valós és képzetes részre (**D 6.1**), vagyis a $z = x + iy$ és $w = u + iv$ $\quad (x, y, u, v \in \mathbf{R})$ alakban veszük fel, akkor az $u + iv = f(x + iy)$ előállítást kapjuk. Bontsuk fel az egyenlet jobb oldalán lévő kifejezést is valós és képzetes részre:

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ebből látható, hogy az $f(x + iy)$ komplex függvény valós és képzetes része egy-egy kétváltozós valós függvény (**D 8.1**).

J 24.4 Szokás szerint a $z = x + iy$ komplex szám valós részét $\mathrm{Re}\, z$-vel, képzetes részét $\mathrm{Im}\, z$-vel jelöljük, azaz $x = \mathrm{Re}\, z$ és $y = \mathrm{Im}\, z$ (**D 6.1**).

D 24.5 Néhány fontos **komplex változós elemi függvény** definíciója:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z}, \quad \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

T 24.6 Tetszőleges z és w komplex számokra igazak az alábbi összefüggések:

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \textbf{(Euler-formula)},$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \mathrm{ch}\, iz \quad (\cos iz = \mathrm{ch}\, z),$$

$$i\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = \operatorname{sh} iz \quad (\sin iz = i \operatorname{sh} z),$$

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

T 24.7 Az e^z függvény $2\pi i$, a $\sin z$ és a $\cos z$ függvény pedig 2π egész számú többszörösei szerint periodikus, más periódusuk nincs.

D 24.8 A $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban (D 6.12) adott komplex szám az Euler-formula segítségével átírható a $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakba.

D 24.9 A $z \neq 0$ komplex szám e alapú vagy természetes alapú logaritmusán értünk minden olyan w komplex számot, amely kielégíti az $e^w = z$ egyenletet. Jelölése: $w = \ln z$.

T 24.10 Ha a $z \neq 0$ komplex számot a $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakban adjuk meg, akkor $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$ $(k \in \mathbb{Z})$, ahol $\ln r$ az r pozitív valós szám valós logaritmusát jelöli.

D 24.11 Az $\ln z$ főértékének nevezzük az $\ln r + i\varphi$ komplex számot, ha $0 \leq \varphi < 2\pi$ $(k = 0)$.

D 24.12 Tetszőleges w és $z \neq 0$ komplex számokra a z^w hatványt a

$$z^w = e^{w \ln z}$$

képlettel értelmezzük. A z^w hatványnak az $\ln z$ logaritmus főértékével számított értékét a hatvány főértékének mondjuk. Megjegyezzük, hogy a D 24.5-ben definiált e^z komplex változós exponenciális függvény értéke a $z = z_0$ helyen egyenlő az e^{z_0} (komplex) hatvány főértékével.

Feladatok

Adjuk meg azokat az u és v kétváltozós valós függvényeket, amelyekkel az alábbi f komplex függvények $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ alakban írhatók (1. – 11. feladatok):

1.* $f(z) = \dfrac{1}{\overline{z}}$, 2. $f(z) = \overline{z}^2$, 3. $f(z) = z + \overline{z}$,

4. $f(z) = z\overline{z}$, 5. $f(z) = \overline{z} - iz^2$, 6. $f(z) = z^2 + i$,

7. $f(z) = z^2 + \dfrac{1}{z}$, 8. $f(z) = \dfrac{z^3}{|z|^2}$, 9. $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$,

10. $f(z) = 1 + \dfrac{1}{z}$, 11.* $f(z) = e^{-z}$.

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely z_1 és z_2 komplex számra:

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

13. Bizonyítsuk be, hogy bármely z_1 és z_2 komplex számra:

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

14. Mutassuk meg, hogy ha $x, y \in \mathbf{R}$, akkor

$$\sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y,$$

$$\cos(x+iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y.$$

15. Adjuk meg a $\operatorname{sh}\overline{z}$ függvény valós és képzetes részét.
16. Adjuk meg a $\operatorname{ch}(z-i)$ komplex függvény u valós és v képzetes részét.
17. Adjuk meg a $\operatorname{tg} z$ komplex függvény u valós és v képzetes részét.
18. Igazoljuk, hogy $\overline{\sin z} = \sin\overline{z}$ és $\overline{\cos z} = \cos\overline{z}$.
19.▹ Határozzuk meg mindazokat a z komplex számokat, amelyekre $e^{i\overline{z}} = \overline{e^{iz}}$.
20. Adjuk meg mindazokat a z komplex számokat, amelyekre az e^z függvény értéke valós.
21. Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

A következő komplex számokat írjuk fel algebrai alakban (**D 6.1**):

22.• $\cos(-i)$,	23. $\operatorname{tg}\dfrac{i\pi}{2}$,	24. $\sin(3-4i)$,
25. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+i\ln 2\right)$,	26. $\operatorname{sh}\left(1+i\dfrac{\pi}{2}\right)$,	27. $\operatorname{ch}\left(\ln 3+i\dfrac{\pi}{4}\right)$,
28. $\operatorname{th}\left(\ln 2+i\dfrac{\pi}{2}\right)$,	29. $e^{1-i\arcsin\frac{1}{3}}$,	30. $e^{\ln 2+i\arccos\cos 5}$

Számítsuk ki a következő komplex számok komplex logaritmusait. Adjuk meg a logaritmusok főértékeit:

31.• $-5+5i$,	32. 1,	33. i,
34. $-e$.		

A következő komplex hatványokat adjuk meg algebrai alakban, és határozzuk meg főértéküket:

35.• $(1+i)^i$,	36. i^{i+1},	37. e^{5-i},
38. $(1-i)^e$,	39. 2^{5i},	40. $e^{\pi i}$,
41. $(6-3i)^{2i+1}$,	42. 1^{-i},	43. $(-1)^{\sqrt{2}}$,
44. $(-3+4i)^{i+1}$.		

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a z ismeretlenre a komplex számok halmazában:

45.• $e^{-z}+1=0$,	46. $e^z+i=0$,	47. $\sin z = \pi i$,
48. $\cos z = -2$,	49. $\sin z = -2$,	50. $\sin z = 0$,
51. $\cos z = 0$,	52. $\operatorname{tg} z = -1$,	53. $\operatorname{ctg} z = -i$.
54. $\operatorname{ch} z = -2$,	55. $\operatorname{th} z = i$,	56. $\operatorname{th} z = 1$,
57.• $\cos i\overline{z} = \overline{\cos iz}$,	58. $\sin i\overline{z} = \overline{\sin iz}$.	

Az alábbi feladatok mindegyikében határozzuk meg azokat a z komplex számokat, amelyekre az egyenletben szereplő komplex hatvány minden értékére fennáll az egyenlőség:

59.▹ $5^z = 1$,	60. $1^z = 2$,	61. $2^z = -1$,

62. $5^z = 5$, 63.* $z^z = z$.

Az alábbi feladatok mindegyikében határozzuk meg azokat a z komplex számokat, amelyekre az egyenletben szereplő komplex hatvány legalább egy értékére fennáll az egyenlőség:

64. $5^z = 1$, 65. $1^z = 2$, 66. $2^z = -1$,

67. $5^z = 5$.

Számítsuk ki a következő határértékeket:

68. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$, 69. $\lim\limits_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \dfrac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$,

70. $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{z^2 + 1}{z^6 + 1}$, 71. $\lim\limits_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \dfrac{z\left(z - e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}{z^3 + 1}$.

72.* Bizonyítsuk be, hogy az f komplex függvény a z_0 helyen akkor és csak akkor folytonos, ha ezen a helyen a $\operatorname{Re} f$ és $\operatorname{Im} f$ függvények folytonosak.

Igazoljuk, hogy az alábbi komplex függvények a komplex számsík minden pontjában folytonosak (73.– 74.):

73. $|z|$, 74. $az + b$; $a, b \in \mathbf{C}$.

Értelmezzük az $f(0)$ függvényértéket úgy, hogy a következő függvények a $z = 0$ helyen folytonosak legyenek:

75. $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$, 76. $f(z) = \dfrac{z \operatorname{Im}(z^2)}{|z|^2}$,

77. $e^{-\frac{1}{|z|}}$, 78. $f(z) = \dfrac{z}{|z|}$.

79. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$ nem létezik.

80. Legyen $f(z) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{z}{\bar{z}} - \dfrac{\bar{z}}{z}\right)$. Bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nem létezik.

Komplex függvények differenciálása

M 24.13 Egyváltozós komplex függvényekre a differencálhatóság definíciója ugyanaz, mint egyváltozós valós függvényekre. A függvények összegére, különbségére, szorzatára, hányadosára, inverzére és az összetett függvényekre vonatkozó differenciálási szabályok is megegyeznek (I. 9.fejezet).

T 24.14 Ha az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ komplex függvény differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban, akkor

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right)_{(x_0,y_0)} = \left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right)_{(x_0,y_0)},$$

azaz az (x_0, y_0) számpár kielégíti a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert.

M 24.15 Ha az u valós és v képzetes rész differenciálható (például, ha u és v parciális differenciálhányadosai folytonosak (**T 14.9**)), akkor igaz az előbbi tétel megfordítása is:

T 24.16 Ha a komplex $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ függvény u valós és v képzetes része is differenciálható az (x_0, y_0) helyen, továbbá az (x_0, y_0) számpár kielégíti a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenlet-rendszert, akkor f differenciálható a $z_0 = x_0 + iy_0$ pontban.

T 24.17 Ha $z = re^{i\varphi}$ exponencális alakban (**D 24.8**) van adva, azaz $f(z) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi)$, akkor

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right),$$

feltéve, hogy a felírt parciális differenciálhányadosok léteznek. Így a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

D 24.18 A komplex f függvényt a z_0 pontban **regulárisnak** (vagy **holomorfnak**) mondjuk, ha a függvény a z_0 pont valamely teljes környezetében differenciálható. Az f-et a T ponthalmazon regulárisnak nevezzük, ha f a T minden pontjában reguláris. Azon pontok halmazát, amelyekben f reguláris, f **regularitási tartományának** nevezzük.

T 24.19 Ha az f komplex függvény egy összefüggő nyílt T halmazon reguláris, akkor T minden pontjában akárhányszor differenciálható. (A komplex számsík egy T ponthalmazát összefüggőnek nevezzük, ha bármely két pontja összeköthető a T-ben haladó töröttvonallal. A nyílt halmaz definícióját **D 7.12**-ben adtuk meg. Megjegyezzük, hogy összefüggő nyílt halmazon a differenciálhatóság és a regularitás ugyanazt jelenti.)

M 24.20 Az előbbi tételből következik, hogy egy összefüggő nyílt T halmazon reguláris f függvény u valós és v képzetes részének összes parciális differenciálhányadosai léteznek és folytonosak. A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletekből tovább differenciálva kapható, hogy a függvény valós és képzetes része eleget tesz a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Laplace-féle differenciálegyenleteknek, azaz u és v úgynevezett **harmonikus függvények**. Ha f reguláris T-n, akkor úgy is mondjuk, hogy u és v egymás **harmonikus társai**. Kimutatható, hogy egy egyszeresen összefüggő nyílt halmazon bármely harmonikus függvénynek léteznek harmonikus társai, és ezek csak állandóban különböznek egymástól. Ez azt jelenti, hogy egyszeresen összefüggő nyílt halmazon bármely harmonikus függvény tekinthető egy, ezen a halmazon reguláris komplex függvény valós vagy képzetes részének. (**Egyszeresen összefüggőnek** nevezzük a komplex számsík összefüggő nyílt T halmazát, ha bármely önmagát nem metsző T-beli zárt görbe által határolt síkidom is T-ben fekszik.)

Feladatok

Vizsgáljuk meg differenciálhatóság, illetve regularitás szempontjából az alábbi komplex függvényeket:

81.• $y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$; $x, y \in \mathbf{R}$,

82. $\bar{z}$, **83.•** $|z|$, **84.** $\operatorname{Re} z$,

85. $z \operatorname{Im} z$, **86.** $z \operatorname{Re} z$, **87.•** $\cos \bar{z}$,

88. $z - \bar{z}$, **89.** $|z-1|^2$, **90.** $z^2|z|$,

91. $e^x(\cos y - i \sin y)$; $x, y \in \mathbf{R}$,

92. ze^z, **93.•** $|z|\bar{z}$, **94.▷** $|z| \operatorname{Re} z$,

95. e^{z^2}.

Bizonyítsuk be, hogy a következő függvények az értelmezési tartományukon regulárisak. Adjuk meg a függvények deriváltját.

96.• e^{cz}; $c \in \mathbf{R}$, **97.•** $\ln z$, **98.** $\ln z^2$,

99. $\operatorname{sh} z$, **100.** $\operatorname{ch} z$, **101.▷** z^n; $n \in \mathbf{Z}$,

102. $\cos z$, **103.** $\sin z$, **104.** $\sin \dfrac{z}{3}$,

105. $\operatorname{tg} z$, **106.** $\dfrac{\cos z}{\cos z - \sin z}$, **107.** $\dfrac{1}{z}$,

108.▷ $\dfrac{1+z}{1-z}$, **109.** $z \cdot e^{-z}$, **110.** $\dfrac{z \cos z}{1+z^2}$,

111. $\dfrac{e^z+1}{e^z-1}$, **112.** $\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}$, **113.** $\dfrac{e^z}{z}$.

Vizsgáljuk meg, hogy harmonikusak-e az alábbi függvények az értelmezési tartományukon:

114. $u = e^{x^2-y^2}$, **115.** $u = \operatorname{ch} x \cos y$, **116.** $u = x^2 + 2x - y^2$,

117. $u = 2e^x \cos y$, **118.** $u = \left(\operatorname{tg} \dfrac{x}{y}\right)^{-1}$, **119.** $u = \ln(x^2 + y^2)$.

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi kétváltozós valós függvények lehetnek-e valamely f komplex függvény valós vagy valamely g komplex függvény képzetes részei; ha igen, akkor határozzuk meg f, illetve g deriváltját:

120.▷ $u = x^2 - y^2 + 2xy$, **121.** $u = x^2$,

122. $u = \dfrac{y(x^2+1)}{2}$, **123.** $u = 3(x^2 - y^2) + 2y + 1$,

124. $u = \ln(x^2 + y^2)$, **125.** $u = e^{-y} \sin x$,

126. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

Határozzuk meg azt az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ $(z = x + iy)$ komplex függvényt, amely az értelmezési tartományán reguláris, a z_0 pontban a megadott $w_0 = f(z_0)$ értéket veszi fel, és amelynek az u valós vagy a v képzetes része a megadott kétváltozós valós függvény:

127.* $u = e^x \sin y$; $f(0) = i$,

128. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$,

129.* $v = 2y(x+1)$; $f(i) = 2i - 1$,

130. $u = x^2 - y^2 - 5x + y + 2$; $f(1) = -2$,

131. $u = x^3 - 3xy^2$; $f(i+1) = 2i$,

132. $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$; $f(i) = \dfrac{\pi}{2}$,

133. $u = x^2 - y^2 + xy$; $f(-1) = 1$,

134. $v = xy$; $f(i-1) = -i$.

Komplex függvények integrálása

M 24.21 Legyen f a komplex számsík valamely irányított rektifikálható (**D 13.19**) $\mathcal{G}$ görbeívén értelmezett komplex függvény. A vektor-vektorfüggvények skalárértékű görbementi integráljához (**D 18.9**) hasonlóan értelmezzük az f függvény $\mathcal{G}$ görbementi integrálját. (Annyi a különbség, hogy a definícióban vektorok skaláris szorzata helyett komplex számok szorzata szerepel.) A görbementi integrál alaptulajdonságai komplex görbementi integrálokra is érvényesek (l. Szász G., Matematika II., 364. – 367. oldalt). Megállapodunk abban, hogy zárt $\mathcal{G}$ görbe esetén $\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz$ a komplex számsíkon értelmezett pozitív forgási irány szerinti integrált jelentse.

T 24.22 Legyen az f komplex függvény integrálható a $\mathcal{G}$ rektifikálható görbeíven. Ha a $\mathcal{G}$ egyenlete $z = z(t)$ $(t_1 \le t \le t_2,\quad t_1, t, t_2 \in \mathbf{R})$ alakú, mégpedig $z(t_1)$ a görbe kezdőpontja, $z(t_2)$ a görbe végpontja és a z függvény t szerinti deriváltja folytonos a t_1 és t_2 által határolt intervallumon, akkor

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t))z'(t)\,dt.$$

T 24.23 Ha az f komplex függvény valamely T ponthalmazon folytonos, akkor T belsejében fekvő bármely rektifikálható görbeíven integrálható.

T 24.24 Cauchy-féle integráltétel: Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon reguláris (**D 24.18**), akkor T-ben fekvő minden zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus. (Ez azt jelenti, hogy ha A és B a T tetszőleges két pontja, akkor f-nek bármely A kezdőpontú és B végpontú T-ben haladó rektifikálható görbeíven vett integrálja megegyezik.)

T 24.25 Morera-tétele: Ha az f komplex függvény az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon folytonos, és f-nek minden T-ben fekvő zárt rektifikálható görbén vett integrálja zérus, akkor f a T halmazon reguláris. (A **Cauchy-féle integráltétel** megfordítása.)

T 24.26 Legyen az f komplex függvény folytonos az egyszeresen összefüggő nyílt T halmazon. Az f-nek akkor és csak akkor van T-ben primitív függvénye (**D 12.1**), ha f reguláris a T halmazon. Ebben az esetben f-nek egy primitív függvénye megadható $\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw = F(z)$

alakban, ahol z_0 a T tetszőleges rögzített pontja, és az integrálás tetszőleges olyan T-beli rektifikálható görbe mentén történik, amelynek kezdőpontja z_0 és végpontja z.

T 24.27 Ha F a reguláris f komplex függvény primitív függvénye a T összefüggő nyílt halmazon (**T 24.19**), akkor bármely a kezdőpontú és b végpontú T-beli rektifikálható $\mathcal{G}$ görbére:

$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = F(b) - F(a) \quad (\text{ Newton-Leibniz-formula})$$

(I. **T 13.4**).

T 24.28 Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két olyan zárt rektifikálható görbe, hogy a $\mathcal{G}_2$ görbe a $\mathcal{G}_1$ belsejében fekszik. Ha az f komplex függvény a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ által határolt zárt gyűrűtartományt magában foglaló valamely ponthalmazon reguláris, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}_1} f(z)\,dz = \oint_{\mathcal{G}_2} f(z)\,dz.$$

M 24.29 Az előző tétel általánosítható a $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ zárt rektifikálható görbékre, ha a $\mathcal{G}, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ görbék $\mathcal{G}$ belsejében fekszenek, de kölcsönösen egymás külsejében:

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} f(z)\,dz + \oint_{\mathcal{G}_2} f(z)\,dz + \dots + \oint_{\mathcal{G}_n} f(z)\,dz.$$

T 24.30 Cauchy-féle integrálformula: Ha az f komplex függvény differenciálható (reguláris) az összefüggő nyílt T ponthalmazon, akkor T minden z_0 pontjára

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z - z_0)},$$

ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan T-ben haladó, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és z_0 a $\mathcal{G}$ belsejében van.

T 24.31 Cauchy-féle integrálformulák differenciálhányadosokra: Ha az f komplex függvény differenciálható (reguláris) az összefüggő nyílt T ponthalmazon, akkor akárhányszor differenciálható T-ben (**T 24.19**), és T minden z_0 pontjára

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}^+),$$

ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan T-ben haladó, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható görbe, amelynek belseje is T-hez tartozik, és z_0 $\mathcal{G}$ belsejében van. (Megjegyezzük, hogy $n = 0$ esetben az előző tételt kapjuk.)

Feladatok

Számítsuk ki az alábbi f komplex függvények integrálját az adott irányított $\mathcal{G}$ görbe mentén:

135. $f(z) = \operatorname{Re} z$; $\mathcal{G}$ a 0 kezdőpontú, $1 + i$ végpontú szakasz,

136. $f(z) = |z|\bar{z}$; $\mathcal{G}$ a valós tengely feletti 0 középpontú és 1 sugarú félkör pozitív forgásiránnyal,

137. $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$; $\mathcal{G}$ az 1, 2, $2+i$, $1+i$ csúcspontú négyzet pozitív forgásiránnyal, 138.* $f(z) = e^z$; $\mathcal{G}$ a valós tengely alatti 0 középpontú 2 sugarú félkör pozitív forgásiránnyal,

139.* $f(z) = 3z + 1$; $\mathcal{G}$ a 0, 1, $1+i$, i csúcspontú négyzet pozitív körüljárási iránnyal,

140. $f(z) = iz^2 - 2\bar{z}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör azon íve negatív forgásiránnyal, amelyre $\operatorname{Re} z \geq 0$ és $\operatorname{Im} z \geq 0$,

141. $f(z) = \operatorname{Re}(z + z^2)$; $\mathcal{G}$ az $y = 2x^2$ $(0 \leq x \leq 1)$ egyenletű parabola, ahol $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, és az irány x növekedésének iránya,

142. $f(z) = ze^{z^2}$; $\mathcal{G}$ az a körív pozitív forgásiránnyal, amelyre $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$,

143. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$; $\mathcal{G}$ az a körív pozitív forgásiránnyal, amelyre $|z| = 2$, $\operatorname{Im} z \leq 0$,

144. $f(z) = 3z^2 + 2z$; $\mathcal{G}$ az $1-i$, $2-i$, $2+i$ csúcspontú töröttvonal, $1-i$ kezdőponttal és $2+i$ végponttal.

Számítsuk a következő komplex integrálokat a $\mathcal{G}$ zárt görbe mentén a Cauchy-féle integrálformulák (**T 24.30** és **T 24.31**) segítségével:

145.* $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz$; $\mathcal{G}$ az 1 középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú kör,

146.* $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\,dz$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe, amely belsejében tartalmazza a 0 pontot, és önmagát nem metszi át,

147. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z^2+1}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| = 1$ egyenletű kör,

148.* $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4-z^3}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-2| = 3$ egyenletű kör,

149. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{1+z^2}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 2$ egyenletű kör,

150. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z+1| = \frac{3}{4}$ egyenletű kör,

151. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| = \frac{3}{2}$ egyenletű kör,

152. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi i}{2}\right)^3}\,dz$; $\mathcal{G}$ az $|z-1| + |z+1| = 4$ egyenletű ellipszis,

153. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$; $\mathcal{G}$ az $\frac{i-1}{2}$, $-\frac{i+1}{2}$, 2 csúcspontú háromszög,

154. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{sh} z}{z^5-z^4-z+1}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z-i| + |z+i| = 3$ egyenletű ellipszis,

155. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi z}{6}}{z^3-2iz^2-z}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|4z+i| = 6$ egyenletű görbe,

156. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\cos z}{(z^2-z)(z^2-2iz-1)}\,dz$; $\mathcal{G}$ a $|z+1| = \frac{3}{2}$ egyenletű kör.

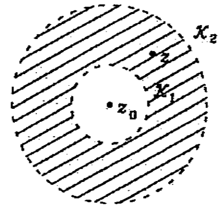
Laurent-sorok

T 24.32 Ha az f komplex függvény reguláris a z_0 pont valamely E teljes környezetében, akkor minden $z \in E$ esetén:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

azaz az f függvény az E teljes környezetben z_0 körül Taylor-sorba (**D 23.18**) fejthető.

D 24.33 Legyen $\mathcal{K}_1$, illetve $\mathcal{K}_2$ a z_0 középpontú r_1, illetve r_2 sugarú kör a komplex számsíkon és $r_1 < r_2$. (Engedjük meg az $r_1 = 0$ és az $r_2 = \infty$ eseteket is. Az előbbi esetben $\mathcal{K}_1$ jelentse a z_0 pontot, az utóbbi esetben pedig $\mathcal{K}_2$ a komplex számsíkot.) A z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-**körgyűrűn** értjük az $r_1 < |z - z_0| < r_2$ feltételt kielégítő z pontok halmazát.



D 24.34 Jelöljük a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{-n-1}$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ sorok összegsorát (**T 22.29**) a következő módon:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad \text{ahol} \quad c_n = \begin{cases} a_{|n|-1}, & \text{ha } n < 0, \\ b_n, & \text{ha } n \geq 0. \end{cases}$$

Az így kapott komplex sort z_0 körüli **Laurent-sornak** nevezzük. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{-n-1}$ sort a Laurent-sor **főrészének**, a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$ sort pedig a Laurent-sor **reguláris részének** nevezzük. (A Laurent-sor fogalma a komplex hatványsor (**D 23.6**) általánosítása. Ha ugyanis minden negatív egész n-re $c_n = 0$, akkor a Laurent-sor speciálisan hatványsor.)

T 24.35 Ha a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ Laurent-sornak van konvergenciapontja (**D 23.3**), akkor van olyan z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrű, amelynek minden pontjában a sor abszolút konvergens és minden külső pontjában (**D 7.12**) a sor divergens. (A tétel lényegében Abel tételének (**T 23.7**) és **M 23.8**-nak az általánosítása.)

T 24.36 Ha az f komplex függvény reguláris a z_0 középpontú $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrűb[illegible] kör[illegible] körgyűrű tetszőleges z pontjában érvényes az

$f(z$[illegible]

úgyneve[illegible]t (z_0 körüli[illegible] k eg[illegible]tth[illegible] toi[illegible]

[illegible] $2\pi i \int_G$ [illegible] (w) [illegible] $- z_0)^{n+1}$ [illegible] képletek szolgáltatják, ahol $\mathcal{G}$ a körgyűrűben haladó tetszőleges, önmagát át nem metsző olyan rektifikálható zárt görbe, amely a z_0 pontot megkerüli. (A sort a függvény z_0 körüli **Laurent-sorának** nevezzük a $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrűben.) A $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$-körgyűrűben konvergens (z_0 körüli) Laurent-sor összegfüggvényének (**D 23.4**) Laurent-sora az eredeti Laurent-sor.

M 24.37 Ha f a $\mathcal{K}_2$ kör belsejében reguláris, akkor ott a Laurent-sora megegyezik a z_0 körüli Taylor-sorával (**D 23.18**).

M 24.38 Komplex hatványsorokra is érvényes a hatványsorok tagonkénti differenciálására, illetve integrálására vonatkozó tétel (**T 23.10**), nyílt intervallum helyett nyílt körlapra, a valós számegyenes helyett a komplex számsíkra.

D 24.39 A z_0 pontot az f komplex függvény **izolált szinguláris helyének** nevezzük, ha f a z_0 pontban nem reguláris, de van z_0-nak olyan környezete, amelyben f reguláris.
A z_0 izolált szinguláris helyet f **megszüntethető szingularitásának** nevezzük, ha z_0 körüli Laurent-sorában minden $n < 0$ esetén $c_n = 0$, és f (**k-adrendű**) **pólusának**, ha z_0 körüli Laurent sorában $c_{-k} \neq 0$ $(k \in \mathbb{N}^+)$, de minden $n > k$ esetén $c_{-n} = 0$. Ha z_0 izolált szinguláris helye f-nek, de nem megszüntethető szingularitása és nem pólusa, akkor z_0-t f **lényeges szingularitásának** hívjuk.

T 24.40 Az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor megszüntethető szingularitása f-nek, ha $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ létezik.

T 24.41 Az f komplex függvény z_0 izolált szinguláris helye akkor és csak akkor k-adrendű pólusa f-nek, ha van olyan g komplex függvény, amely z_0 valamely teljes környezetében reguláris, $g(z_0) \neq 0$ és $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z - z_0)^k}$, azaz ha z_0 az $\dfrac{1}{f}$ függvénynek k-szoros zérushelye (ennek definíciója **T 10.4**-ben található).

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények z_0 körüli Taylor-sorát. Adjuk meg z_0-nak azt a környezetét, ahol a Taylor-sor még előállítja a függvényt (a feladatokban logaritmuson a komplex logaritmus főértéke (D 24.11) értendő).

157.* $\ln(1+z)$; $z_0 = 0$, **158.** $\ln \dfrac{1+z}{1-z}$; $z_0 = 0$,

159. $\sin z$; $z_0 = \frac{\pi}{4}$, **160.*** $\dfrac{1}{1+z}$; $z_0 = 1$.

Állapítsuk meg az alábbi függvények izolált szinguláris helyeit és azok típusát:

161. $\dfrac{e^z - 1}{z}$, **162.** $e^{\frac{1}{z}}$, **163.** $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$,

164. $\dfrac{1}{z(z-1)^3}$, **165.** $\dfrac{1}{(2\sin z - 1)^2}$, **166.** $\dfrac{z}{e^{\frac{1}{z}} - 1}$,

167. $\cos \dfrac{1}{z + 2i}$, **168.** $\dfrac{\operatorname{tg}(z-1)}{z-1}$, **169.** $\dfrac{\sin z}{z^5}$.

Határozzuk meg az alábbi függvények izolált szinguláris helyeit és azok körüli Laurent-sorát. Adjuk meg a Laurent-sor K konvergenciatartományát.

170.* $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, 171. $\dfrac{e^{z^2}}{z^3}$, 172. $(z-3)\cos\dfrac{1}{z+2}$,

173. $\dfrac{1}{z}\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$, 174. $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$, 175. $\dfrac{1-\cos z}{z}$,

176.* $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, 177.* $\dfrac{z}{(z+1)^3}$, 178.* $\dfrac{1}{z(1-z)}$,

179.* $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$.

A következő feladatokban határozzuk meg a függvény képlete után megadott körgyűrűk (D 24.33) mindegyike esetén az f komplex függvény z_0 körüli Laurent-sorát:

180.* $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$; $1<|z|<3$, $3<|z|(<\infty)$,
$0<|z+1|<2$, $(0<)|z|<1$,

181. $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$; $|z|<3$, $|z|>3$,

182. $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$; $|z|<1$, $1<|z|<2$, $2<|z|$, $1<|z-1|$,
$0<|z-2|<1$,

183.* $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$; $|z|<1$, $|z|\geq 1$, $|z-3|<\sqrt{10}$, $|z-3|>\sqrt{10}$,

184. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^2}$; $|z|<2$, $|z|>2$,

Reziduum-tétel

D 24.42 Ha az f komplex függvény z_0 körüli Laurent-sora létezik (**T 24.35**), akkor a sor c_{-1} együtthatóját az f függvény z_0-hoz tartozó **reziduumának** nevezzük. Jelölése: $c_{-1}=\operatorname{Res}(z_0)$. Ha z_0 az f reguláris pontja, akkor $\operatorname{Res}(z_0)=0$.

T 24.43 Reziduum-tétel: Ha az f komplex függvény reguláris az önmagát át nem metsző, rektifikálható zárt $\mathcal{G}$ görbén és, véges sok $z_1,z_2,\ldots,z_k$ izolált szinguláris pont kivételével, a $\mathcal{G}$ belsejében is, akkor

$$\oint_{\mathcal{G}} f(z)\,dz=2\pi i\left(\operatorname{Res}(z_1)+\operatorname{Res}(z_2)+\cdots+\operatorname{Res}(z_k)\right).$$

(Megjegyezzük, hogy a reziduum-tétel a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) általánosítása. Ha ugyanis az f komplex függvény reguláris a $\mathcal{G}$ görbén és a $\mathcal{G}$ belsejében is, akkor a reziduum-tételből is következik, hogy az integrál értéke 0.)

T 24.44 Ha az f komplex függvénynek a z_0 helyen elsőrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname{Res}(z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

Speciálisan, ha a g és h komplex függvények regulárisak z_0 valamely E teljes környezetében, továbbá $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ és $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ $(z \in E)$, akkor

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

T 24.45 Ha az f komplex függvénynek a z_0 helyen k-adrendű pólusa van, akkor

$$\operatorname{Res}(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^k f(z)\right)^{(k-1)}.$$

Feladatok

Számítsuk ki a következő függvények izolált szinguláris helyeihez tartozó reziduumokat:

185.* $\dfrac{e^z - 1}{z^3}$, **186.** $e^{\frac{1}{z}}$, **187.** $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^4}$,

188.* $\dfrac{e^{iz}}{z^2+9}$, **189.** $\dfrac{\cos 2z}{(z-1)^3}$, **190.*** $\dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1}$,

191. $\dfrac{e^z}{z^3(z-1)}$, **192.** $\cos\dfrac{1}{z} + z^3$, **193.** $z^2 \sin\dfrac{1}{z}$.

Számítsuk ki a következő függvények komplex integráljait a $\mathcal{G}$ zárt görbe mentén a reziduum-tétel (**T 24.43**) segítségével:

194.* $\dfrac{e^z}{z^2-1}$; $\mathcal{G}$ a $|z-\sqrt{3}|+|z+\sqrt{3}| = 4$ egyenletű ellipszis pozitív forgásiránnyal,

195. $\dfrac{z+1}{\sin iz}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 7$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

196. $\dfrac{1}{z^4+1}$; $\mathcal{G}$ a $|z-1| = 1$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

197. $\dfrac{\sin z}{z^2+9}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 4$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

198. $\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = r(>1)$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

199. $\dfrac{\operatorname{ch} z}{z^5}$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe pozitív forgásiránnyal, amely belsejében tartalmazza a 0 pontot, és önmagát nem metszi át (l. a **146.** feladatot!),

200. $\dfrac{e^{2z}}{z^3-1}$; $\mathcal{G}$ az $\frac{i-1}{2}$, $-\frac{i+1}{2}$, 2 csúcspontú háromszög pozitív forgásiránnyal (l. a **153.** feladatot),

201. $\sin\frac{1}{z}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = r(>0)$ egyenletű kör negatív forgásiránnyal,

202. $e^{-\frac{1}{z}}\sin\frac{1}{z}$; $\mathcal{G}$ a $|z| = 1$ egyenletű kör pozitív forgásiránnyal,

203. $(z-3)\cos\dfrac{1}{z+2}$; $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan zárt rektifikálható görbe negatív forgásiránnyal, amely belsejében tartalmazza a -2 pontot és önmagát nem metszi át.

Valós integrálok kiszámítása komplex integrálokkal

M 24.46 Valós integrálok kiszámítására gyakran jól használhatók komplex integrálok. Ebben a részben erre mutatunk néhány módszert. Például a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) és a reziduum-tétel (**T 24.43**) bizonyos valós integrálok kiszámítására is alkalmazható. Improprius integrálok (**D 13.6**) kiszámításához felhasználjuk a következő egyenlőtlenséget is:

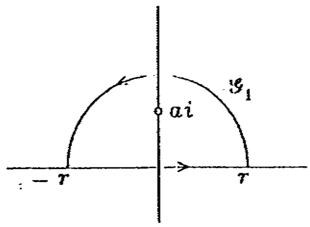
T 24.47 Ha a komplex f függvény a h hosszúságú $\mathcal{G}$ görbeíven integrálható, és a $\mathcal{G}$ minden pontjában $|f(z)| \le m$, akkor $\left|\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz\right| \le mh$.

M 24.48 Az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\,dx$ típusú improprius integrálok kiszámítását bizonyos esetekben komplex integrál kiszámítására vezethetjük vissza. Tegyük fel, hogy a $g(z)$ ($z = x+iy$, $x, y \in \mathbf{R}$) komplex változós függvény olyan, hogy ha $z = x$ $(y = 0)$, akkor $\operatorname{Re} g(x) = f(x)$ vagy $\operatorname{Im} g(x) = f(x)$. A valós tengely $-r$ és r közé eső szakaszát egészítsük ki a komplex számsíkon egy alkalmas $\mathcal{G}_1$ görbeívvel zárt $\mathcal{G}$ görbévé (pozitív forgásiránnyal) olyan módon, hogy a $g(z)$ függvénynek a $\mathcal{G}_1$ kiegészítő görbeíven vett integrálját, vagy ennek határértékét $r \longrightarrow \infty$ esetben meg tudjuk adni. Ha a $\mathcal{G}$ zárt görbe és belseje $g(z)$ regularitási tartományában (**D 24.18**) van, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} g(x)\,dx = -\lim_{r\to\infty}\int_{\mathcal{G}_1} g(z)\,dz,$$

amiből $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$ vagy $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$. Ha az $g(z)$ függvénynek izolált szinguláris helyei is vannak $\mathcal{G}$ belsejében, akkor a reziduum-tételt (**T 24.43**) alkalmazzuk. (Bizonyos $\displaystyle\int_{-\infty}^{r} f(x)\,dx$ és $\displaystyle\int_{r}^{\infty} f(x)\,dx$ típusú improprius integrálok hasonlóan számíthatók ki.) Ez a módszer elég sokszor jól alkalmazható például a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos ax\,dx$ és $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin ax\,dx$ $(a \in \mathbf{R})$ típusú integrálok kiszámítására, ahol $R(x)$ racionális törtfüggvény (**D 10.1**). Természetesen nem minden ilyen típusú függvény improprius integrálja számítható ki ezzel a módszerrel, vagy csak célszerűen választott görbék mentén integrálva jutunk célhoz (l. például a **209.** feladat megoldását!).

P 24.49 Az előző megjegyzés elején mondottak alapján számítsuk ki a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$ $(a > 0)$ improprius integrált! Ehhez vegyük segítségül a $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+a^2}$ függvényt. A $\mathcal{G}$ legyen a $[-r, r]$ intervallumból és a 0 középpontú r sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörből álló zárt görbe pozitív irányí-



tással. Ha $a < r$, akkor a $\mathcal{G}$ belsejébe esik a függvény ai elsőrendű pólusa, így a reziduum-tételt (T 24.43) alkalmazva:

$$\int_{-r}^{r} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = \oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(ai) - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{x^2+a^2}\,dz$$

$(z = x + iy)$. A T 24.44 tétel szerint:

$$\mathrm{Res}(ai) = \lim_{z\to ai} \frac{e^{iz}}{z+ai} = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Mivel valós x-re $\left|e^{ix}\right| = 1$, ezért

$$\left|e^{i(x+iy)}\right| = \left|e^{ix}\right|\left|e^{-y}\right| = e^{-y},$$

és így az $|z| = r\ (> 0)$ $(y = \operatorname{Im} z \geq 0)$ egyenletű félkör pontjaiban

$$\left|\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\right| = \frac{1}{|z|^2}\left|\frac{1}{e^y\left(1+\left(\frac{a}{z}\right)^2\right)}\right| \leq \frac{1}{r^2}\cdot\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right|.$$

A félkör pontjaira a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ trigonometrikus alakot (D 6.12) használva:

$$\lim_{r\to\infty}\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right| = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{a(\cos\varphi - i\sin\varphi)}{r}\right)^2}\right) = 1$$

(minden φ értékre). Ez azt jelenti, hogy bármely $c > 1$ valós számhoz van olyan $r_0 > 0$, hogy ha $r > r_0$, akkor az $\frac{1}{r^2}\left|\frac{1}{1+\left(\frac{a}{z}\right)^2}\right| < \frac{c}{r^2}$ egyenlőtlenség teljesül (D 8.5), ezért T 24.47-et is felhasználva:

$$\left|\int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz\right| \leq \frac{c}{r^2} r\pi = \frac{c\pi}{r}.$$

Ebből következik, hogy $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\,dz = 0$, ami az jelenti, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi i\cdot\frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi}{ae^a},$$

azaz $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{ae^a}$. (Természetesen az is adódik, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 0$, ami azonban számítás nélkül is nyilvánvaló, mivel a $\frac{\sin x}{x^2+a^2}$ függvény páratlan.)

M 24.50 Az $\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\,dx$ alakú integrálok (ahol $R(\sin x, \cos x)$ "szinuszok és koszinuszok" racionális törtfüggvénye, I. T 12.13) kiszámítására gyakran jól alkalmazható a $z = e^{ix}$ helyettesítés. Ebben az esetben $\frac{dz}{dx} = ie^{ix} = iz$, és az Euler-formula alapján (T 24.6):

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{z^2-1}{2iz}.$$

Ha $0 \le x \le 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}_0$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)\, dx = \oint_{\mathcal{G}_0} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}.$$

P 24.51 Az előző megjegyzés segítségével számítsuk ki az

$$I(p) = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2}, \quad |p| \ne 1$$

úgynevezett **Poisson-integrált!**

$$I(p) = \oint_{\mathcal{G}_0} \frac{dz}{iz\left(1 - p\frac{z^2+1}{z} + p^2\right)} = \frac{i}{p}\oint_{\mathcal{G}_0} \frac{dz}{(z-p)\left(z - \frac{1}{p}\right)}.$$

Tehát p és $\frac{1}{p}$ az integrálandó függvény elsőrendű pólusai. Ha $|p| < 1$, akkor csak p van a $\mathcal{G}_0$ belsejében. A reziduum-tételt (**T 24.43**) és **T 24.44**-et alkalmazva:

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p}\operatorname{Res}(p) = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

A $|p| > 1$ esetben hasonló számítással kapjuk, hogy

$$I(p) = \frac{2\pi i^2}{p}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{2\pi}{p^2-1}.$$

T 24.52 Legyen a $2p$ $(p > 0)$ szerint periodikus egyváltozós valós f függvény Fourier-sora $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p})$. Ha $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ és $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$ jelöléseket bevezetjük, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p}) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}$$

és $c_n = \dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p} f(x) e^{-\frac{in\pi x}{p}}\, dx \quad (n \in \mathbf{Z})$.

D 24.53 Az előző tételben szereplő $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{p}}$ függvénysort a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{p} + b_n \sin\frac{n\pi x}{p})$ **Fourier-sor komplex alakjának** vagy egyszerűen az f függvény **komplex Fourier-sorának** nevezzük. (Könnyen belátható, hogy $a_n = c_n + c_{-n}$, $b_n = i(c_n - c_{-n})$ $(n \in \mathbf{N}^+)$.)

Feladatok

Számítsuk ki komplex integrálok segítségével a következő improprius integrálokat:

204.* $\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$, 205. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$,

206. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx$, 207. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin \pi x}{x^2+2x+5}\,dx$,

208.$^\triangleright$ $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}$; $a>0$, 209.* $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

A **209.** feladat eredményének felhasználásával számítsuk ki a következő improprius integrálokat:

210. $\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx$, 211. $\int_0^\infty \frac{\sin 2x \sin 3x}{x^2}\,dx$,

212. $\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx$; $a \geq b > 0$.

Számítsuk ki komplex integrálok segítségével a következő határozott integrálokat:

213.* $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3-2\cos x+\sin x}$, 214. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos 3x}{5-4\cos x}\,dx$,

215. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(5-3\sin x)^2}$, 216. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin x}$; $a > |b| \geq 0$,

217. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$; $a > |b| > 0$.

Írjuk fel a következő feladatokban a $2p$ szerint periodikus egyváltozós valós f függvény Fourier-sorának komplex alakját, és vizsgáljuk meg, hogy mely helyeken állítja elő a sor a függvényt (a függvényt csak a $(-p, p]$ intervallumon adjuk meg):

218.* $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } -\pi < x < 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < x < \pi, \end{cases}$

219.$^\triangleright$ $f(x) = \sin x$; $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$ (l. a **23.144** feladatot),

220. e^x; $-1 < x \leq 1$ (l. a **23.157** feladatot).

Vegyes feladatok

221. Bizonyítsuk be, hogy ha $p, q \in \mathbf{N}^+$, akkor $z^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{z})^p$.

222. Bizonyítsuk be, hogy bármely x és y valós szám esetén $|\sin(x+iy)| = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$ és $|\cos(x+iy)| = \sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y}$.

223.* Bizonyítsuk be, hogy bármely z komplex számra $|\sin z|^2 + |\cos z|^2 \geq 1$; egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha z valós szám.

224. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x+iy) = \frac{1}{2}(\sin x + i\cos x) \quad (x, y \in \mathbf{R})$.

225. Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{y\to\infty} \operatorname{tg}(x+iy) = i \quad (x, y \in \mathbf{R})$.

226. Határozzuk meg a $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1}$ határértéket, ha $\sqrt{z^2+3}$ azon értékeit tekintjük, amelyre $\lim\limits_{z\to 1}\sqrt{z^2+3} = 2$. Létezik-e a határérték, ha $\sqrt{z^2+3}$ azon értékeit tekintjük, amelyre $\lim\limits_{z\to 1}\sqrt{z^2+3} = -2$?

227. Bizonyítsuk be, hogy ha $a \neq 0$, akkor az $u = a(x^2+y^2)+bx+cy+d$ kétváltozós valós függvény nem lehet egyetlen reguláris komplex függvény valós, illetve képzetes része sem.

228. Bizonyítsuk be, hogy ha $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris függvény, akkor a $g(z) = -v(x,y) + iu(x,y)$ függvény is reguláris.

229.* Legyenek az $u(x)$ és $v(y)$ egyváltozós valós függvények differenciálhatók a D_1, illetve a D_2 halmazon. Mutassuk meg, hogy az $u(x) + iv(y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható a $D = \{x+iy;\ x \in D_1,\ y \in D_2\}$ halmazon, ha $u(x) = ax + b$ és $v(y) = ay + c \quad (a, b, c \in \mathbf{R})$.

230. Bizonyítsuk be, hogy ha az $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ és az $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ komplex függvények regulárisak egy összefüggő nyílt halmazon, akkor ezen a halmazon $f(z)$ konstans.

231. Mutassuk meg, hogy az

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & \text{ha } z \in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{ha } z \in \mathbf{C} - \mathbf{R} \end{cases}$$

komplex függvény differenciálható a 0 pontban.

232. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő nyílt halmazon az f komplex függvény reguláris, f' pedig azonosan 0, akkor ezen a halmazon a függvény konstans.

233.* Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő nyílt halmazon $f(z)$ reguláris és $|f(z)|$ konstansfüggvény, akkor ezen a halmazon $f(z)$ is konstans.

234. Mutassuk meg, hogy ha az $f = u + iv$ komplex függvény reguláris egy összefüggő nyílt halmazon, továbbá u vagy v konstansfüggvény, akkor f is konstans ezen a halmazon.

235. Bizonyítsuk be, hogy

$$\oint_{\mathcal{G}} (z-z_0)^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \neq -1, \\ 2\pi i, & \text{ha } n = -1 \end{cases}$$

($n \in \mathbf{Z}$), ahol $\mathcal{G}$ tetszőleges olyan, önmagát át nem metsző zárt rektifikálható görbe, amelynek belsejében van a z_0 pont.

236. Legyen $z = e^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$. Ismeretes, hogy $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+k\pi)}$, ahol $k = 0$ vagy $k = 1$ (**T 6.16**). Jelöljük az egyszerűség kedvéért szintén $\sqrt{z}$-vel a $\sqrt{r}e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$ komplex függvényt (z négyzetgyökének $k = 1$ esetben kiszámított értékét). Számítsuk ki a $\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{\sqrt{z}}$ integrált, ahol $\mathcal{G}$ a $|z| = 1$ egyenletű kör valós tengely feletti része pozitív forgásiránnyal.

237. Jelölje $\ln z$ a z komplex logaritmusának főértékét (**D 24.11**). Számítsuk ki az $\frac{\ln^3 z}{z}$ függvény integrálját a $z(t) = \cos t + i \sin t$ $(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$ egyenletű $\mathcal{G}$ görbe mentén a t paraméter növekedésének irányában.

238.* Legyen z_0 a T összefüggő nyílt halmaz valamely pontja. Bizonyítsuk be, hogy ha az f komplex függvény z_0 kivételével reguláris a T minden pontjában és f korlátos a z_0 pont valamely E környezetében, akkor $\int_{\mathcal{G}} f(z)\,dz = 0$ minden T-beli, önmagát át nem metsző, zárt rektifikálható $\mathcal{G}$ esetén.

239.* Az előző feladat segítségével bizonyítsuk be a Cauchy-féle integrálformulát (**T 24.30**).

240. Bizonyítsuk be, a reziduum-tételt (**T 24.43**).

241. Bizonyítsuk be a **T 24.52** tételt.

242. Legyen az $f(z)$ komplex függvény az $1 - \epsilon < |z| < 1 + \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ feltétellel megadott körgyűrűben reguláris. Mutassuk meg, hogy $f(z)$ (0 körüli) Laurent sora a $|z| = 1$ egyenletű kör pontjaiban megegyezik a (2π szerint periodikus) $f(e^{iz})$ $(z = e^{iz})$ függvény komplex alakban felírt Fourier-sorával.

25. fejezet

Laplace-transzformáció

A Laplace-transzformáció fogalma és alaptulajdonságai

D 25.1 A $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvény Laplace-transzformáltjának nevezzük és $\mathcal{L}\{f\}$-fel jelöljük azt a komplex függvényt (**D 24.1**), amely

a) valamely p helyen akkor és csak akkor van értelmezve, ha az

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

improprius integrál létezik, és

b) minden ilyen p helyen függvényértékként éppen az előbbi improprius integrál értékét veszi fel.

Az $\mathcal{L}\{f\}$ függvény p helyen felvett értékét $\mathcal{L}\{f;p\}$-vel jelöljük. (Szokásos az $F = \mathcal{L}\{f\}$, $F(p) = \mathcal{L}\{f;p\}$ és $f(t) \to F(p)$ rövid írásmód is.)

M 25.2 Bevezetjük az $1(t)$ egységfüggvényt a következő definícióval: $1(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$

Megjegyezzük, hogy bármely f függvényre $f(t)\cdot 1(t) = \begin{cases} f(t), & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \end{cases}$ és $\mathcal{L}\{f(t)\cdot 1(t);p\} = \mathcal{L}\{f(t);p\}$, ha létezik. Az $f(t)\cdot 1(t)$ jelölést akkor használjuk, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy a $t \le 0$ helyeken az f értéke nulla.

T 25.3 Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, akkor bármely konstansszorosának is van, mégpedig

$$\mathcal{L}\{kf\} = k\mathcal{L}\{f\}$$

bármely komplex k esetén.

T 25.4 Ha az f és g függvénynek van Laplace-transzformáltja, akkor az $f+g$ függvénynek is van, mégpedig

$$\mathcal{L}\{f+g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}.$$

T 25.5 Legyen f a $(0,\infty)$ intervallum bármely véges részintervallumán integrálható komplex értékű függvény. Ha megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy a $(0,\infty)$ intervallum minden t elemére

$$|f(t)| \le Ke^{Ct},$$

akkor az f függvény Laplace-transzformáltjára érvényesek a következők:

1. Az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált a kompex számsík

$$\{p;\ \operatorname{Re} p > C\}$$

félsíkján létezik és abszolút konvergens;

2. $$\lim_{\operatorname{Re} p \to \infty} \mathcal{L}\{f;p\} = 0.$$

A tételbeli feltételek (tehát elegendők, de) nem szükségesek ahhoz, hogy az f Laplace-transzformáltja létezzék. Mégis, mivel a gyakorlatban többnyire a feltételeknek eleget tevő függvények Laplace-transzformáltjait kell kiszámítani, a rövid megfogalmazás kedvéért bevezetjük a következő elnevezést:

D 25.6 A $(0,\infty)$ intervallumon vagy annak valamely valódi részhalmazán értelmezett, komplex értékű f függvényt **Laplace-transzformálhatónak** mondjuk, ha f-re teljesül a következő két feltétel:

1. Ha az f értelmezését a teljes $(0,\infty)$ intervallumra kiterjesztjük azzal a megállapodással, hogy értéke 0 legyen ennek az intervallumnak minden olyan pontjában, ahol eredetileg nem volt értelmezve, akkor az így adódó függvény a $(0,\infty)$ intervallum minden véges részintervallumán integrálható.
2. Megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy a $(0,\infty)$ intervallum minden t elemére $|f(t)| \le Ke^{Ct}$.

A legfontosabb elemi függvények Laplace-transzformáltjait tartalmazza az alábbi táblázat.

	$f(t)\ (t \ge 0)$	$F(p)$		$f(t)\quad (t \ge 0)$	$F(p)$
I	1	$\frac{1}{p}$	VIII	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
II	$\frac{t^n}{n!}\ (n \in \mathbf{N})$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	IX	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
III	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	X	$\frac{t^n}{n!}e^{at}\quad (n \in \mathbf{N})$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$
IV	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$	XI	$t\cos bt$	$\frac{p^2-b^2}{(p^2+b^2)^2}$
V	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$	XII	$t\sin bt$	$\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}$
VI	$\operatorname{ch} bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$	XIII	$t\operatorname{ch} bt$	$\frac{p^2+b^2}{(p^2-b^2)^2}$
VII	$\operatorname{sh} bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$	XIV	$t\operatorname{sh} bt$	$\frac{2pb}{(p^2-b^2)^2}$
			XV	$t^v\quad (v>-1)$	$\frac{\Gamma(v+1)}{p^{v+1}}$
				$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

(Az I-VIII. és XV. képletekre nézve l. Szász G., Matematika III., 385. – 389. oldal; a VIII-XIV. képleteket alább, az 1. és a 6. feladatban igazoljuk. XI-XIV egyszerűbb bizonyítására nézve l. a 64. feladatot.)

A táblázatban szereplő Γ függvény Szász G., Matematika I. c. könyvében a 394. – 395. oldal 5. példájában bevezetett Euler-féle gammafüggvény. Emlékeztetünk ennek arra az alaptulajdonságára, hogy

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

valamint arra, hogy

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Feladatok

1.ᐅ A Laplace-transzformált definíciója alapján igazoljuk, hogy

a) $\mathcal{L}\{te^{at}; p\} = \dfrac{1}{(p-a)^2}$, ha $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$.

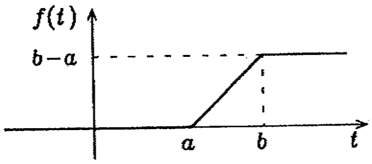
b) $\mathcal{L}\{t^n e^{at}; p\} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$, ha $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, a$, $(n \in \mathbf{N})$, (ez a X. képlet).

A Laplace-transzformált **D 25.1** definíciója alapján számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

2. $f(t) := \begin{cases} \gamma, & \text{ha } \alpha < t \le \beta, \\ 0, & \text{ha } t \le \alpha, \text{ vagy } t > \beta, \end{cases}$ ahol α, β, γ pozitív konstansok, $\alpha < \beta$.

3. $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t > a, \end{cases}$; $a, b > 0$.

4. A függvényt grafikonjával adjuk meg.



5.• $f(t) := \begin{cases} (t-3)^2, & \text{ha } t > 3, \\ 0, & \text{ha } t \le 3. \end{cases}$

6.• A táblázat I-VII. és XV. képleteinek, valamint a Laplace-transzformált **T 25.3** és **T 25.4** alaptulajdonságainak felhasználásával igazoljuk a táblázat VIII-IX. és XI-XIV. képleteit!

Ábrázoljuk a következő függvényeket:

7. $1(t)$, 8. $1(t-2)$,

9. $1(t-2) \cdot 1(t-3)$.

10.• Ábrázoljuk az $f(t) = 1(t) + 1(t-1) + 1(t-2)$ függvényt, és számítsuk ki Laplace-transzformáltját.

A Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait:

11.• $t^{\frac{3}{2}}$, 12.• $\cos^2 t$, 13.ᐅ $\sin t \cdot \cos t$,

14.* $\sin^3 t$, 15.* $\cos^2(t-a)$, 16. $\dfrac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$; $a \ne b$.

17. $\sin bt + bt \cos bt$, 18. $\dfrac{1}{3}e^{-t} + \dfrac{2}{3}e^{\frac{t}{2}} \cos \dfrac{\sqrt{3}}{2}t$, 19. $e^t \,\mathrm{ch}\, t$,

20. $\operatorname{sh}(3t-5)$, 21.* $t(e^t + \operatorname{ch} t)$, 22. $(t+1)\sin 2t$,

23. $\operatorname{ch}\frac{t}{\sqrt{2}}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}$, 24. $\operatorname{sh}\frac{t}{\sqrt{2}}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}$, 25. $\operatorname{sh} at \cdot \operatorname{ch} at$,

26.▷ $\operatorname{ch} 3t \cdot \sin^2 t$.

Jelöljön f_1 és f_2 tetszőleges Laplace-transzformálható függvényeket, a tetszőleges komplex számot. Igazoljuk, hogy az alábbi függvények szintén Laplace-transzformálhatóak:

27.▷ $a \cdot f_1(t)$, 28. $f_1(t) \cdot f_2(t)$, 29. $f_1(t) + f_2(t)$.

30.* Igazoljuk, hogy az $\frac{1}{\sqrt{t}}$ függvény (bár létezik Laplace-transzformáltja, de) nem Laplace-transzformálható a **D 25.6** értelemben.

Igazoljuk, hogy az alábbi függvények Laplace-transzformálhatóak, és adjunk meg a **D 25.6** definíciónak megfelelő K és C számokat:

31.* e^{3t+2}, 32. e^{-t}, 33.▷ $\ln(t+1)$,

34.* $t \cdot \sin\frac{1}{t}$.

A konvolúciótétel és következményei

D 25.7 A $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett, valós értékű f és g függvények **konvolúciójának** nevezzük és $f*g$-vel jelöljük azt a függvényt, amely minden egyes nemnegatív valós t számhoz az

$$(f*g)(t) := \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds$$

értéket rendeli hozzá, feltéve, hogy ez az integrál létezik. (Az f és g konvolúciójának a t helyen felvett értékét tehát $(f*g)(t)$-vel jelöljük.)

T 25.8 A konvolúcióképzés kommutatív művelet, azaz

$$f*g = g*f$$

minden olyan f és g függvényre, amelynek a konvolúciója létezik.

T 25.9 A konvolúció rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal is.
Ha az $f*g$ és $f*h$ konvolúciók léteznek, akkor érvényes a disztributív tulajdonság:

$$f*(g+h) = f*g + f*h$$

továbbá tetszőleges k valós konstanssal

$$f*(kg) = k\cdot(f*g)\,.$$

T 25.10 Konvolúciótétel. Legyen f és g Laplace-transzformálható függvény, mégpedig

$$|f(t)| \le K_1 e^{C_1 t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \le K_2 e^{C_2 t},$$

ha $t \in (0,\infty)$, ahol K_1, K_2, C_1 és C_2 nemnegatív valós konstansok. Ekkor a két függvény konvolúciójának Laplace-transzformáltja a $\{p;\ \operatorname{Re} p > \sup\{C_1, C_2\}\}$ félsíkon létezik, és egyenlő a két függvény Laplace-transzformáltjának szorzatával:

$$\mathcal{L}\{f*g\} = \mathcal{L}\{f\}\cdot\mathcal{L}\{g\}.$$

T 25.11 Az eredeti függvény integrálja Laplace-transzformáltjának tétele. Ha az f függvény Laplace-transzformálható, akkor bármely $[0,t]$ intervallumon vett integrálja is Laplace-transzformálható, mégpedig

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(s)\,ds;\ p\right\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f;p\}.$$

T 25.12 Az eredeti függvény deriváltja Laplace-transzformáltjának tétele. Ha az egyváltozós valós f függvénynek a $(0,\infty)$ intervallumon korlátos és folytonos deriváltja van, akkor f és f' Laplace-transzformálhatók, és Laplace-transzformáltjaik között az

$$\mathcal{L}\{f';p\} = p\mathcal{L}\{f;p\} - \lim_{t\to+0} f(t)$$

összefüggés áll fenn.

1. Megjegyzés. Ha f a 0 helyen folytonos is, akkor

$$\mathcal{L}\{f';p\} = p\mathcal{L}\{f;p\} - f(0).$$

2. Megjegyzés. Általánosabban a következő is igaz:

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)};p\right\} = p^n\mathcal{L}\{f;p\} - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

feltéve, hogy az összes itt fellépő derivált folytonos és korlátos a $[0,\infty)$ intervallumon.

Feladatok

35. Igazoljuk a T 25.9 tételt.

36. A konvolúcióképzés kommutativitását kihasználva igazoljuk, hogy a konvolúcióképzés asszociatív is, tehát

$$f*(g*h) = (f*g)*h,$$

amennyiben a megfelelő konvolúciók léteznek.

Számítsuk ki a következő konvolúciókat a D 25.7 alapján:

37. $e^t * e^t$, **38.** $t^2 * t^3$, **39.** $(\cos t) * t$,
40. $(\operatorname{sh} t) * t$, **41.** $\sin t * \cos t$, **42.** $\cos t * \cos t$,
43. $\sin t * \sin t$, **44.** $\sin t * (\cos t * t)$. **45.** $\operatorname{sh} t * \sin t$,
46. $2\operatorname{sh} t * \operatorname{ch} t$.

A konvolúcióképzés T 25.8-ban és T 25.9-ben említett tulajdonságait használva számítsuk ki a következő kifejezéseket:

47. $(\cos^2 t) * t + t * (\sin^2 t)$,

48. $(1-\sqrt{t}) * \sin t + (1+\sqrt{t}) * \cos t + (1-\sqrt{t}) * \cos t + (1+\sqrt{t}) * \sin t$.

Számítsuk ki az alábbi függvények konvolúciójának Laplace-transzformáltját:

49. e^t és e^t, **50.** t^2 és t^3.

Határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltjait:

51.* $\int_0^t \sin s \cdot e^{t-s}\,ds$, 52. $\int_0^t \operatorname{ch} s \cdot (t-s)^2\,ds$, 53. $\int_0^t s^2 e^{2(t-\tau)}\,d\tau$,

54.ᵇ $\cos t \int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds + \sin t \int_0^t \frac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds$, 55.* $\sin t \int_0^t \frac{\cos s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds - \cos t \int_0^t \frac{\sin s}{\sqrt{2\pi s}}\,ds$.

Határozzuk meg a következő f függvények Laplace-transzformáltját az integrál kiszámítása nélkül (azaz, az eredeti függvény integrálja Laplace-transzformáltjának T 25.11 tétele és a Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával):

56.* $f(t) := \int_0^t e^s\,ds$, 57. $f(t) := \int_0^t \sin s\,ds$,

58. $f(t) := \int_0^t s\cos s\,ds$, 59. $f(t) := \int_0^t s^2 e^{-s}\,ds$.

60. Számítsuk ki az $e^{-t} \cdot (t^2 * e^t)$ függvény Laplace-transzformáltját.

Határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltját a Laplace-transzformáltak táblázata és az eredeti függvény deriváltja Laplace-transzformáltjának T 25.12 tétele alapján:

61.ᵇ $f(t) = \cos^2 t$, 62. $f(t) = \sin^2 t$.

63.* Fejezzük ki az $f''(t) - f'(t) - f(t)$ függvény Laplace-transzformáltját az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjával, feltéve, hogy $f(0) = f'(0) = 0$, és a megfelelő transzformáltak mind léteznek.

64. Fejezzük ki az $f^{(4)}(t) - 5f^{(3)}(t) - 4f''(t) + 2f'(t) - f(t) + 8$ függvény Laplace-transzformáltját az $f(t)$ függvény Laplace-transzformáltjával, ha a megfelelő transzformáltak léteznek és $f(0) = 5$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$.

A Laplace-transzformált differenciálása és integrálása

T 25.13 (A Laplace-transzformált differenciálási tétele). Ha az f függvénynek van Laplace-transzformáltja, és ez a Laplace-transzformált a p változónak reguláris függvénye, akkor

$$\mathcal{L}\{t^n f\} = (-1)^n \frac{d^n \mathcal{L}\{f\}}{dp^n}.$$

T 25.14 (A Laplace-transzformált integrálási tétele.) Legyen f a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett, komplex értékű függvény, amelyre a következő három feltétel teljesül:

1. Van olyan pozitív c szám, hogy a komplex számsík $S := \{p \in \mathbf{C};\ \operatorname{Re} p > c\}$ félsíkján az $\mathcal{L}\{f\}$ Laplace-transzformált létezik és reguláris;
2. Az $\frac{1}{t}f(t)$ függvény Laplace-transzformálható;
3. Az $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t); p\right\}$ függvény a saját értelmezési tartományában mindenütt reguláris.

Továbbá, definíció szerint legyen

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}\,dq := \lim_{\operatorname{Re} z \to \infty} \int_p^z \mathcal{L}\{f;q\}\,dq,$$

ahol z az S félsíkban fekvő, p-ből kiinduló görbén fut végig. Ekkor

$$\int_p^\infty \mathcal{L}\{f;q\}\,dq = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t);p\right\},$$

feltéve, hogy a bal oldalon álló improprius integrál létezik.

Feladatok

65.$^\triangleright$ A Laplace-transzformáltak táblázatának XI-XIV képleteit vezessük le a IV-VII képletekből a **T 25.13** tétel segítségével.

Számítsuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját a **T 25.13** tétel alkalmazásával:

66.$^\bullet$ $t^2\cos t$, 67.$^\triangleright$ $bt\sin bt - b^2t^2\cos bt$; $b \in \mathbf{C}$,

68. $(t-1)^2\cos t$, 69.* $t\,\mathrm{sh}\,t\sin t$.

70.$^\triangleright$ Tegyük fel, hogy egy $y(t)$ függvényre teljesülnek a $ty''(t)-2y'(t)=0$, $y(0)=1$ feltételek, és jelölje $y(t)$ Laplace-transzformáltját $Y(p)$. Döntsük el, hogy az $Y_1(p) = \dfrac{1}{p}$ és $Y_2(p) = \dfrac{p^3+1}{p^4}$ közül melyik lehet az $y(t)$ függvény Laplace-transzformáltja. (A vizsgálat során fellépő transzformáltak létezésével ne foglalkozzunk.)

71. Határozzuk meg, hogy az $aty'' + (bt+3a)y' + 3by = 0$, $y(0)=0$ $(a, b \in \mathbf{C})$ összefüggéseket kielégítő $y(t)$ függvény $Y(p)$ Laplace-transzformáltja milyen egyenletnek tesz eleget, feltéve, hogy a megfelelő Laplace-transzformáltak léteznek.

72.* Legyen f olyan, a $(0,\infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:
1. Az $\mathcal{L}\{f;p\}$ Laplace-transzformált a p változó reguláris függvénye (l. **D 24.18.**);
2. Az f akárhányszor deriválható, és mindegyik deriváltjának létezik Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}[t^m f(t)]\right\} = (-1)^m p^n \frac{d^m}{dp^m}\mathcal{L}\{f(t)\}, \quad (m \geq n).$$

A **T 25.14** tétel segítségével határozzuk meg az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait (a, b, α, β tetszőleges komplex konstansok):

73.$^\bullet$ $\dfrac{e^{-t}\sin t}{t}$, 74.$^\triangleright$ $\dfrac{1-e^{at}}{te^t}$, 75. $\dfrac{\cos bt - \cos at}{t}$,

76. $\dfrac{\mathrm{sh}^2\,t}{t}$, 77.$^\triangleright$ $\displaystyle\int_0^t \frac{\mathrm{sh}^2\,s}{s}\,ds$, 78. $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{\alpha s}-e^{\beta s}}{s}\,ds$,

79.* $\displaystyle\int_0^t e^{-s}\frac{1-\cos s}{s}\,ds$.

Hasonlósági és eltolási tételek

T 25.15 Hasonlósági tétel. Ha a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvénynek Laplace-transzformáltja a F függvény, k pedig pozitív konstans, akkor

$$\mathcal{L}\{f(kt); p\} = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right).$$

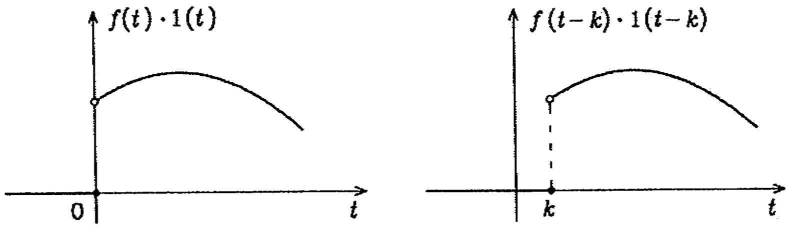
T 25.16 Az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel. Ha a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű f függvénynek van Laplace-transzformáltja, és k pozitív konstans, akkor a

$$g(t) := f(t-k) \cdot 1(t-k) = \begin{cases} f(t-k), & \text{ha } t > k, \\ 0, & \text{ha } t \leq k \end{cases}$$

képlettel megadott g függvénynek is van Laplace-transzformáltja, mégpedig

$$\mathcal{L}\{g(t); p\} = \mathcal{L}\{f(t-k) \cdot 1(t-k); p\} = e^{-kp} \mathcal{L}\{f(t); p\}.$$

(A tétel függvényeit az alábbi ábrán szemléltetjük:



Megállapíthatjuk, hogy az eredeti függvény grafikonja k-val történő jobbra tolásának a Laplace-transzformált e^{-kp}-val szorzása felel meg.)

T 25.17 Periodikus függvény Laplace-transzformáltjának tétele. Legyen f a $(0, \infty)$ intervallumon értelmezett komplex értékű függvény. Ha f ezen az intervallumon periodikus h szerint ($f(x+h) = f(x)$ tetszőleges $x > 0$-ra), akkor

$$\mathcal{L}\{f; p\} = \frac{1}{1-e^{-hp}} \int_0^h e^{-pt} f(t)\, dt, \tag{1}$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál létezik. A **D 25.1** értelmében a jobb oldalon álló integrál annak az f_0 függvénynek a Laplace-transzformáltja, amelyet az

$$f_0(t) := \begin{cases} f(t), & \text{ha } 0 < t \leq h, \\ 0, & \text{ha } t \leq 0, \text{ vagy } t > h \end{cases}$$

képlet definiál (vagyis f_0 az f függvénynek a $(0, h]$ intervallumra való „leszűkítése"). Ezzel a jelöléssel az (1) képlet így írható:

$$\mathcal{L}\{f; p\} = \frac{1}{1-e^{-hp}} \mathcal{L}\{f_0; p\}. \tag{2}$$

Az f_0 függvény pedig kifejezhető a következőképpen is:

$$f_0(t) = f(t) \cdot 1(t) - f(t-h) \cdot 1(t-h).$$

T 25.18 Transzformáltakra vonatkozó eltolási tétel. Tetszőleges valós k-ra

$$\mathcal{L}\{e^{-kt} f(t); p\} = \mathcal{L}\{f(t); p+k\},$$

feltéve, hogy ezek a Laplace-transzformáltak léteznek.

Feladatok

Határozzuk meg a **T 25.15** hasonlósági tétel és a feladatok utáni szögletes zárójelben megadott összefüggés felhasználásával az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait.

80.• $e^{-at} - 1 + at;\quad \left[\mathcal{L}\{e^{-t} - 1 + t; p\} = \dfrac{1}{p^2(p+1)}\right],$

81. $\dfrac{1 - \operatorname{ch} at}{t};\quad \left[\mathcal{L}\left\{\dfrac{1 - \operatorname{ch} t}{t}\right\} = \dfrac{1}{2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{p^2}\right)\right],$

82. $\operatorname{sh} bt;\quad \left[i \operatorname{sh} bt = \sin ibt,\ \ \mathcal{L}\{\sin t\} = \dfrac{1}{p^2+1}\right].$

83.• Definiáljuk az általánosított egységfüggvényt a következőképpen:

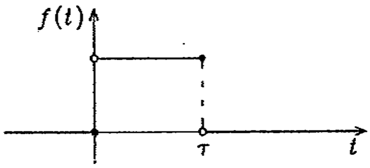
$$1_{t_0}(t) = 1(t - t_0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t > t_0, \\ 0, & \text{ha } t \le t_0. \end{cases}$$

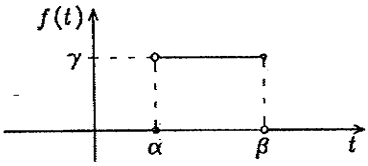
A **T 25.16** tétel segítségével igazoljuk, hogy $\mathcal{L}\{1_{t_0}(t); p\} = \dfrac{1}{p} e^{-t_0 p}$.

Az eredeti függvény **T 25.16** eltolási tétele segítségével határozzuk meg a következő függvények Laplace-transzformáltját. (Útmutatás: fejezzük ki a függvényeket $1(t - t_0)$ segítségével, majd alakítsuk $h(t - t_0) \cdot 1(t - t_0)$ alakú kifejezések összegére.)

84.▷ $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t \le \tau, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > \tau; \end{cases}$

τ: pozitív konstans (l. a bal oldali ábra),





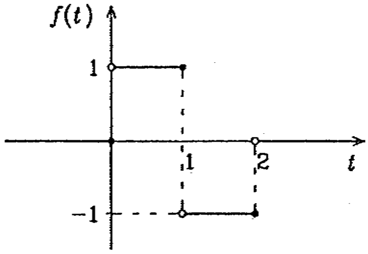
85. $f(t) := \begin{cases} \gamma, & \text{ha } \alpha < t \le \beta, \\ 0, & \text{ha } t \le \alpha, \text{ vagy } t > \beta; \end{cases}$

α, β, γ pozitív konstansok, $\alpha < \beta$. (l. előző jobboldali ábra),

86.• $f(t) := \begin{cases} t, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 2a - t, & \text{ha } a < t \le 2a, \\ 0, & \text{ha } 0 \le t, \text{ vagy } t > 2a; \end{cases}$

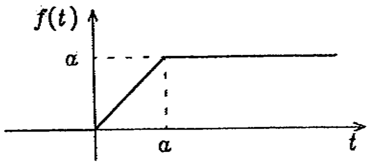
a pozitív konstans,

87.

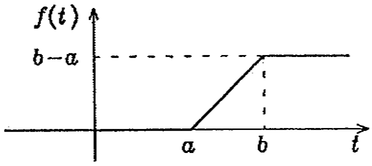


88. $g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ e^{-b(t-a)}, & \text{ha } t > a; \end{cases} \quad a, b > 0.$

89.▷



90.▷



91.* $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ n+1, & \text{ha } n < t \le n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$

92. $g(t) := \begin{cases} (t-3)^2, & \text{ha } t > 3, \\ 0, & \text{ha } t \le 3. \end{cases}$

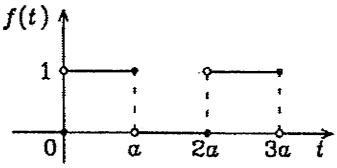
93.• Tegyük fel, hogy $\mathcal{L}\{f(t); p\} = F(p)$ létezik és $g(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le \frac{b}{a}, \\ f(at-b), & \text{ha } t > \frac{b}{a}, \end{cases}$
ahol a és b pozitív állandók. Fejezzük ki $\mathcal{L}\{g(t); p\}$-t F-fel.

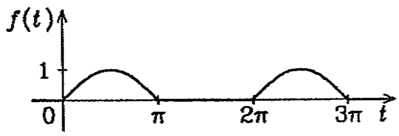
Határozzuk meg a $(0, \infty)$ intervallumon periodikus következő függvények Laplace-transzformáltját:

94.▷ $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 2na < t \le (2n+1)a, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)a < t \le 2na, \text{ vagy } t < 0, \end{cases}$

$(a \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N})$.

Lásd baloldali ábra:

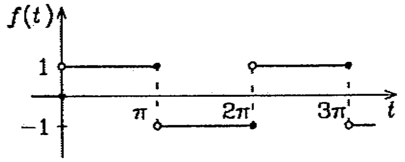


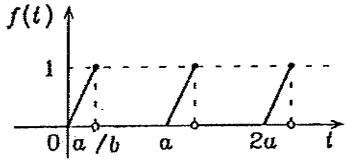


95.• $f(t) := \begin{cases} \sin t, & \text{ha } 2n\pi < t \le (2n+1)\pi, \\ 0, & \text{ha } (2n+1)\pi < t \le (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$ Lásd előző jobboldali ábra.

96. $f(t) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 2n\pi < t \le (2n+1)\pi, \\ -1, & \text{ha } (2n+1)\pi < t \le (2n+2)\pi, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Lásd baloldali ábra:





97. $f(t) := \begin{cases} \dfrac{b}{a}t - bn, & \text{ha } na < t \le \left(n + \frac{1}{b}\right)a, \\ 0, & \text{ha } \left(n + \frac{1}{b}\right)a < t \le (n+1)a, \\ 0, & \text{ha } t < 0, \end{cases}$ $(a, b \in \mathbf{R}^+,\ n \in \mathbf{N})$.

Lásd az előző jobboldali ábrát.

98.$^\triangleright$ Legyen $g(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ |\sin t|, & \text{ha } t > 0. \end{cases}$

A **T 25.18** alkalmazásával és a Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával állítsuk elő a következő függvények Laplace-transzformáltját $(a, b \in \mathbf{C})$:

99.$^\bullet$ $e^{-at} \operatorname{sh} bt$, 100.$^\triangleright$ $\dfrac{t^n}{n!} \operatorname{sh} bt$, 101. $\dfrac{t^n}{n!} e^{at} \operatorname{sh} bt$,

102. $\dfrac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}}$.

Az inverz Laplace-transzformáció

T 25.19 Ha f Laplace-transzformálható függvény, mégpedig

$$|f(t)| \le K e^{Ct} \quad (K, C: \text{ nemnegatív valós konstansok})$$

a $(0, \infty)$ intervallum minden t elemére, F pedig az f Laplace-transzformáltja, akkor a $(0, \infty)$ intervallum minden olyan t pontjában, ahol f folytonos, az f függvény értékére az

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{v \to \infty} \int_{u-vi}^{u+vi} e^{pt} F(p)\, dp$$

egyenlőség érvényes, amelyben az u szám a C-nél nagyobb valós számok közül tetszőlegesen választható. (A tétel következményeként minden Laplace-transzformálható függvényt – szakadási helyeitől eltekintve – Laplace-transzformáltja egyértelműen meghatároz.)

D 25.20 A komplex F függvény **inverz Laplace-transzformáltjának** nevezzük és $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$-fel jelöljük az olyan Laplace-traszformálható f függvényt, amelyre $\mathcal{L}\{f\} = F$. Az $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ inverz Laplace-transzformáltnak a t helyen felvett értékét $\mathcal{L}^{-1}\{F; t\}$-vel jelöljük.

A Laplace-transzformált inverzével a **T 25.10** konvolúciótétel az alábbiak szerint fogalmazható át:

T 25.21 (Konvolúciótétel.) Ha f és g Laplace-transzformálható függvények, akkor

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\cdot G(p);t\} = (f*g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds,$$

ahol $\mathcal{L}^{-1}\{F(p);t\} = f(t)$ és $\mathcal{L}^{-1}\{G(p);t\} = g(t)$.

Az $F(p) = \mathcal{L}\{f(t);p\}$ jelölés helyett az $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p);t\}$ jelölést bevezetve és feltéve, hogy a **T 25.19** egyértelműségi tétel feltételei is teljesülnek, a **T 25.11-18** tételeinket az inverz transzformáltakra vonatkozó alábbi formába írhatjuk át.

T 25.22 (Az eredeti függvény integrálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \int_0^t f(s)\,ds.$$

T 25.23 (Az eredeti függvény differenciálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{pF(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\Big\{\mathcal{L}\{f';p\} + f(0)\Big\}$$

T 25.24 (A transzformált differenciálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F'(p)\} = -t\cdot f(t).$$

T 25.25 (A transzformált integrálási tétele.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\,dq\right\} = \frac{f(t)}{t}.$$

T 25.26 (Hasonlósági tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(kp)\} = \frac{1}{k}f\left(\frac{t}{k}\right), \quad (k \in \mathbf{C} - \{0\}).$$

T 25.27 (Az eredeti függvényre vonatkozó eltolási tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-kp}\cdot F(p)\right\} = f(t-k)\cdot 1(t-k) = \begin{cases} f(t-k), & \text{ha } t > k, \\ 0, & \text{ha } t \le k. \end{cases}$$

T 25.28 (Periodikus függvény transzformáltjának tétele.) Ha az $f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_0(p)\}$ függvényre és $h > 0$ számra teljesül, hogy $f_0(t) = 0$, ha $t \le 0$, vagy $t > h$, akkor

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_0(p)}{1-e^{-hp}}\right\} = f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } t \le h, \\ f(t-h), & \text{ha } t > h; \end{cases}$$

az $f(t)$ tehát a $(0,\infty)$ intervallumon h periódusú függvény.

T 25.29 (Transzformáltakra vonatkozó eltolási tétel.)

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p+k)\} = e^{-kt}\cdot f(t)$$

P 25.30 Racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltjának meghatározásához a törtfüggvényt általában elemi törtekre bontjuk. Ehhez egyes esetekben jól használható az alábbi egyszerű összefüggés:

$$\frac{1}{(x-\alpha)\cdot(x-\beta)} = \frac{1}{\alpha-\beta}\cdot\left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta}\right); \quad \alpha \ne \beta,\ x \text{ tetszőleges.}$$

Valós együtthatós törtfüggvény inverz Lapace-transzformáltjának előállítására vonatkozik az alábbi két tétel.

T 25.31 (A kifejtési tétel általános alakja.) Legyen

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{F_1(p)}{(p-p_1)^{m_1}\cdot(p-p_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_s)^{m_s}},$$

ahol F_2 fokszáma nagyobb, mint F_1 fokszáma. Ekkor

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\}=\sum_{k=1}^{s}\frac{1}{(m_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left((p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{pt}\right)^{(m_k-1)},$$

ahol a differenciálás p szerint végzendő.

T 25.32 (A kifejtési tétel speciális alakja.) Legyen az előző tétellel egyezően

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{F_1(p)}{(p-p_1)^{m_1}\cdot(p-p_2)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(p-p_s)^{m_s}},$$

ahol F_2 fokszáma nagyobb, mint F_1 fokszáma. Ekkor

$$f(t)=\sum_{k=1}^{s}\left(A_{k,1}\cdot\frac{t^{m_k-1}}{(m_k-1)!}+A_{k,2}\cdot\frac{t^{m_k-2}}{(m_k-2)!}+\ldots+A_{k,m_k}\right)e^{p_kt},$$

ahol

$$A_{k,1}=\frac{1}{0!}\lim_{p\to p_k}\left\{(p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\},$$

$$A_{k,2}=\frac{1}{1!}\lim_{p\to p_k}\frac{d}{dp}\left\{(p-p_k)^{m_k}\cdot\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\},\quad \text{stb.}$$

$$\vdots=\vdots$$

Feladatok

Határozzuk meg a következő konvolúciókat a konvolúciós integrál kiszámítása nélkül:

103.* $\sin t*\cos t$, **104.** e^t*e^t. **105.*** $\operatorname{sh}t*\operatorname{sh}t$.

Határozzuk meg az alábbi racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltját az elemi törtekre bontás módszerével, vagy a **T 25.31** – **T 25.32** kifejtési tételekre támaszkodva:

106.* $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$, **107.*** $\dfrac{2p+1}{p^2-2p+5}$, **108.*** $\dfrac{p}{(p-1)^3}$,

109.* $\dfrac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}$, **110.** $\dfrac{2p^2-3p-2}{p^3+p^2-2p}$, **111.** $\dfrac{1}{(p^2+1)(p+1)}$,

112. $\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p-1)}$, **113.** $\dfrac{-5p}{(p^2+4)(p^2-1)}$, **114.** $\dfrac{7p+1}{(p-1)(p^2+2p+5)}$,

115.* $\dfrac{1}{p^3-8}$, **116.** $\dfrac{p^2}{(p-1)^3}$, **117.** $\dfrac{p}{(p-1)^3}$,

118. $\dfrac{p}{p^4-1}$, 119. $\dfrac{p^3}{p^4-1}$, 120.* $\dfrac{1}{(p-1)^2\cdot(p-2)^3}$.

Számítsuk ki az alábbi racionális törtfüggvények inverz Laplace-transzformáltját az **T 25.21**, illetve a zárójelben megjelölt tétel segítségével.

121.▷ $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$, 122.▷ $\dfrac{1}{(p^2+1)^3}$, 123.▷ $\dfrac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$,

124.• $\dfrac{1}{(p+1)(p+2)^2}$, 125. $\dfrac{1}{(p-1)\cdot(p^2+1)}$, 126.▷ $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+1)}$,

127. $\dfrac{p}{p^4-1}$, 128.* $\dfrac{1}{p(p^4-1)}$,

129.• $\dfrac{p}{(p-1)^3}$; (**T 25.23**), 130. $\dfrac{p^2}{(p-1)^3}$; (**T 25.23**),

131.• $\dfrac{2}{p(p^2+4)}$; (**T 25.22**), 132. $\dfrac{2b}{(p^2+b^2)^2}$; (**T 25.22**).

Határozzuk meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját. (Útmutatás: Alkalmazzuk a zárójelben megjelölt tételt. A két utolsó feladatban ábrázoljuk is az inverzet!)

133.• $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{p}$; (**T 25.25**), 134.▷ $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{p^2}\right)$; (**T 25.25**),

135. $\ln\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{p}$; (**T 25.25**), 136.• $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$; (**T 25.27**),

137.▷ $\dfrac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{p(p^2+4)}$; (**T 25.27**), 138.▷ $\dfrac{p}{p^2+4}-\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{e^{-2p}}{p^2-1}$; (**T 25.27**),

139.• $\dfrac{1}{p(1+e^{-ap})}$; (**T 25.28**, **T 25.27**), 140.* $\dfrac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$; (**T 25.28**, **T 25.27**).

Állítsuk elő az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltjait hatványsor-alakban.

141.• $\dfrac{p^5}{p^6-1}$, 142. $\frac{1}{p}e^{\frac{1}{p^2}}$, 143. $\dfrac{1}{p}\cos\dfrac{1}{p}$.

Vegyes feladatok

A Laplace-transzformáltak táblázatának felhasználásával számítsuk ki az alábbi függvények Laplace-transzformáltjait:

144. $\dfrac{1}{2}(\operatorname{ch} at\sin at+\operatorname{sh} at\cos at)$, 145. $\cos^4 t$,

146. $\sin^2 t\cdot\cos^2 t$.

147.▷ Igazoljuk, hogy az e^{t^2} függvény nem Laplace-transzformálható **D 25.6** értelmében.

148.* Vezessük be a $\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau$ jelölést. ($\Phi(t)$ ún. valószínűségi integrál, amelyre Szász G., Matematika III., 245. oldalának 33.8.3., illetve 247. oldalának 33.8.4. definíciói szerint $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t) = 1$ teljesül.) A **D 25.1** alapján igazoljuk, hogy

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}}; p\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{p^2}{2}} \left(1 - \Phi(p)\right).$$

149. Az előző feladat eredményére támaszkodva számítsuk ki $\Phi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds$ Laplace-transzformáltját.

150.* Igazoljuk, hogy Laplace-transzformálható függvények konvolúciója is Laplace-transzformálható.

Számítsuk ki a következő konvolúciók Laplace-transzformáltját:

151. $f(t) * \int_0^t g(s)h(t-s)\, ds,$

152. $\int_0^t f_1(s)g_1(t-s)\, ds * \int_0^t f_2(s)g_2(t-s)\, ds.$

153. Legyen $[f_n(t);\ n \in \mathbf{N}^+]$ olyan függvénysorozat, amelyben minden elemnek van Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy ha

$$\mathcal{L}\{f_n(t); p\} = \frac{n!}{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)^n,$$

akkor $\int_0^t f_n(s)f_n(t-s)\, ds = \frac{(n!)^2}{(2n!)} \int_0^t f_{2n}(\tau)\, d\tau.$

154.* Bizonyítsuk be, hogy ha f Laplace-transzformálható függvény, akkor

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(s)\, ds^{n+1} = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n f(s)\, ds \quad (n = 0, 1, \dots).$$

(Cauchy-formula; a ds^{n+1} azt jelenti, hogy $(n+1)$-szer kell integrálni s szerint.)

155.* Határozzuk meg az $f(t) = \int_0^t \frac{\sin 7s \cdot \sin 3s}{s}\, ds$ Laplace-transzformáltját.

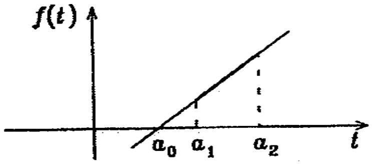
156.* Tegyük fel, hogy egy f függvényre teljesülnek az alábbi feltételek:
1. $\mathcal{L}\{f; p\}$ a p változó reguláris függvénye;
2. f akárhányszor differenciálható, és mindegyik deriváltjának létezik Laplace-transzformáltja. Igazoljuk, hogy

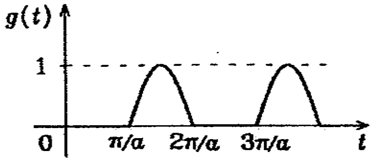
$$\mathcal{L}\left\{t^m \cdot \frac{d^n}{dt^m} f(t); p\right\} = (-1)^m \frac{d^m}{dp^m}\left(p^n \mathcal{L}\{f\}\right) \quad (m \geq n).$$

157.* Legyen

$$f(t) = \begin{cases} m(t - a_0), & \text{ha } a_1 < t \leq a_2;\ m \in \mathbf{R}, \\ 0, & \text{ha } t \leq a_1, \text{ vagy } t > a_2, \end{cases} \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}^+,\ a_1 < a_2.$$

Határozzuk meg az $f(t)$ Laplace-transzformáltját, f görbéje a következő baloldali ábrán látható.





158.* A **95.** feladat eredményére támaszkodva állítsuk elő az alábbi függvény Laplace-transzformáltját.

$$g(t)=\begin{cases}0, & \text{ha } \dfrac{2n\pi}{a}<t\le\dfrac{(2n+1)\pi}{a},\\ -\sin at, & \text{ha } \dfrac{(2n+1)\pi}{a}<t\le\dfrac{(2n+2)\pi}{a},\\ 0, & \text{ha } t\le 0, \quad a \text{ pozitív konstans, } n\in\mathbb{N}^+.\end{cases}$$

Lásd az előző jobboldali ábra.

159.• Határozzuk meg az $\operatorname{sh} t\cos 2t\sin 3t$ függvény Laplace-transzformáltját.

160. Határozzuk meg $\dfrac{-5p}{(p^2+4)\cdot(p^2-1)}$ inverz Laplace-transzformáltját a konvolúciótétel alkalmazásával.

161.• A konvolúciós integrál(ok) kiszámítása nélkül lássuk be, hogy

$$(\operatorname{ch} t)*(\sin t)=(\operatorname{sh} t)*(\cos t).$$

Határozzuk meg az alábbi függvények inverz Laplace-transzformáltját:

162. $\dfrac{2p}{(p^2+1)^2}$, **163.•** $\dfrac{2}{(p-3)^3\cdot(p+4)}$, **164.•** $\dfrac{p}{p^4-5p^2+4}$,

165.* $\dfrac{1}{(p^4-1)^2}$, **166.** $\dfrac{p^3}{(p^4-1)^2}$, **167.▷** $\dfrac{1}{p^3\cdot(p+1)^3}$,

168.• $F(p)=\dfrac{Q'(p)}{Q(p)}$, ahol $Q(p)=(p-p_1)((p-p_2)\dots(p-p_n)$, és az összes p_i páronként különbözik,

169. $\dfrac{p^2}{(p^2-1)^3}$, (Útmutatás: Alkalmazzuk a **T 25.31** vagy **T 25.32** kifejtési tételt.)

170.▷ $\dfrac{e^{-\frac{p}{2}}}{p(p+1)(p^2+4)}$, **171.** $\dfrac{1}{p-1}e^{-\frac{1}{p-1}}$.

172. Igazoljuk, hogy $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\}=\dfrac{1}{2}e^{-t}\cdot\displaystyle\int_0^t e^s\cdot\sin 2s\,ds.$

173.• Feltéve, hogy $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$, tehát az $F(p)$ függvény inverz Laplace-transzformáltja, létezik, fejezzük ki f-fel az $\mathcal{L}^{-1}\{F(ap+b)\}$ inverz Laplace-transzformáltat, ($a>0$ konstans).

26. fejezet

Egyismeretlenes egyenletek közelítő megoldása

Ebben a fejezetben néhány olyan eljárást ismertetünk, amelyeknél egy egyenlet valamelyik gyökének egy vagy két közelítő értékéből kiindulva olyan számsorozatot állítunk elő, amely az egyenlet gyökéhez konvergál. A gyakorlati életben gyakran előfordul, hogy nem érdekel minket az egyenlet minden gyöke, csak egy bizonyos intervallumba esők. A számítástechnika mai fejlettségi szintjén egyszerű és célszerű a függvényt és esetleg a deriváltját is az adott intervallumon kirajzoltatni, és így tájékozódni tulajdonságaikról.
(Megjegyezzük, hogy ebben a fejezetben csak néhány alapesettel foglalkozunk. A módszerek továbbfejlesztéseinek részletesebb tárgyalása a **Numerikus módszerek** c. tantárgy feladatkörébe tartozik.)
A továbbiakban, ha nem mondunk mást, az egyenletet $f(x) = 0$ alakúnak tekintjük, és a gyököt x^*-gal jelöljük.
Egy eljárást akkor hagyunk abba, ha a meghatározandó sorozat esetén

a) vagy a kiszámított utolsó elemnél az f függvény helyettesítési értéke olyan kicsi, hogy azt zérusnak tekinthetjük;
b) vagy a kiszámított két utolsó elem távolsága olyan kicsi, hogy az újabb lépés felesleges. Ez utóbbi esetben már f helyettesítési értéke is meglehetősen kicsi.
c) Legtöbbször az a) és b) feltételek mindegyikét megköveteljük, mert ha pl. az a) esetben a derivált abszolút értéke a gyök közelében kicsi, akkor ott a helyettesítési érték alig változik, és nem biztos, hogy a tényleges gyökhöz közel vagyunk, míg pl. a b) esetben, ha a derivált nagy, akkor a gyors változás miatt egy kicsi intervallumon is sokat változik a függvény.

Intervallumfelezési eljárás

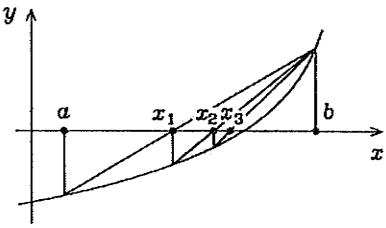
Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos az $[a;b]$ intervallumon, és $f(a)f(b) < 0$. Ekkor a függvénynek van legalább egy zérushelye az intervallumban (**T 8.22, Bolzano tétel**). A módszer első lépéseként legyen $x_1 = \frac{a+b}{2}$, és számítsuk $f(x_1)$ értékét. Jelölje $[a_1;b_1]$ az $[a;\frac{a+b}{2}]$ és $[\frac{a+b}{2};b]$ intervallumok közül azt, amelyik végpontjaiban f különböző előjelű. Ezután legyen $x_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$, stb.

Nyilvánvaló, hogy az x_k sorozat mindig konvergens, és az egyenlet egyik gyökéhez konvergál. Mivel az intervallumot minden lépésnél felezzük, könnyű előre kiszámítani, hogy az utolsó két közelítés távolsága mikor lesz elég kicsi.
A módszer természetesen az $[a;b]$ intervallumból egy gyököt szolgáltat. Ötletességünkön múlik, megtaláljuk-e a többit is, ha vannak.

Húrmódszer

Tegyük fel, hogy f folytonos $[a;b]$-n és $f(a)f(b) < 0$. Az $f(x) = 0$ egyenlet egyik $[a;b]$-beli gyökének x_1 közelítése az $(a; f(a))$ és $(b; f(b))$ pontokat összekötő húr és az x tengely metszéspontjának abszcisszája, azaz

$$x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a) \quad .$$

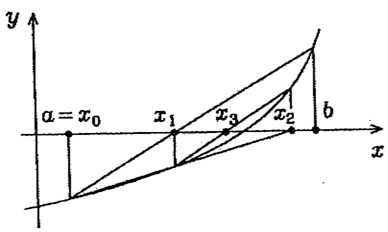


Jelölje $[a_1;b_1]$ az $[a;x_1]$ ill. $[x_1,b]$ intervallumok közül azt, amelyik végpontjaiban f helyettesítési értéke különböző előjelű. Legyen $x_2 = a_1 - \frac{b_1-a_1}{f(b_1)-f(a_1)} f(a_1)$, stb.
Az x_k sorozat nyilvánvalóan konvergens. (Ha a számítás során az $[a_k,b_k]$ intervallum már nagyon kicsi, akkor $f(b_k) - f(a_k)$ is az, de $|\frac{f(a_k)}{f(b_k)-f(a_k)}| < 1$ mindenképpen, hiszen $f(a_k)$ és $f(b_k)$ különböző előjelű). Ez az eljárás legtöbbször gyorsabb, mint az intervallumfelezés.
A konvergencia gyorsasága: jelölje x_k a fenti sorozat k-adik elemét, és legyen $\varepsilon_k = |x_k - x^*|$. Tegyük fel, hogy $x \in [a,b]$ esetén f'' létezik, és $0 < m \le |f'(x)|$, $|f''(x)| \le M$. Legyen $K = \frac{M}{2m}$ és $d_k = K\varepsilon_k$. Ha $d = \max\{d_0; d_1\} < 1$, akkor $d_{k+1} \le d^{k+1}$.

Szelőmódszer

A szelőmódszer a húrmódszer olyan módosítása, ahol nem vizsgáljuk az $f(a_k)f(b_k) < 0$ feltételt, hanem az x_{k+1}-et mindig x_k-val és x_{k-1}-gyel számítjuk, azaz

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad .$$

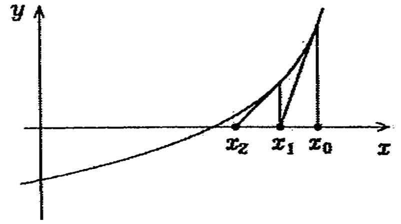


Az x_k sorozat nem mindig konvergens, hiszen ha az $(x_{k-1}; f(x_{k-1}))$ és $(x_k; f(x_k))$ pontokat összekötő egyenes túl "lapos", x_{k+1} akár f értelmezési tartományán kívül is eshet. De ha $0 < m \le |f'(x)|$, $|f''(x)| \le M$, $K = \frac{M}{2m}$, $d_k = K\varepsilon_k$, és a kezdeti közelítések olyan jók, hogy $d = \max\{d_0; d_1\} < 1$, akkor az eljárás konvergens, és a konvergencia jóval gyorsabb, mint a húrmódszer esetében.

Newton-módszer

Az előző eljárások elindításához a gyök két "elég jó" közelítésére (a-ra és b-re) is szükségünk volt. Ennél a módszernél csak egy közelítés szükséges. Itt az újabb közelítést az előző pontbeli érintő és az x tengely metszéspontja adja. Tehát:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad .$$



Az $[x_k]$ sorozat nem mindig konvergens. Elégséges, de nem szükséges feltételei a konvergenciának például,
1) hogy x_0 és x^* között f' és f'' létezik, és egyik sem válik zérussá, és $f(x_0)f''(x_0) > 0$;
vagy
2) ha az x^* és az x_k értékeket tartalmazó intervallumban $0 < m \leq |f'(x)|$ $|f''(x)| \leq M$, és ha $K = \frac{M}{2m}$, akkor $d_0 = K\varepsilon_0 < 1$.
Ez utóbbi esetben a konvergencia minden előbb tárgyalt módszernél gyorsabb.

A fokozatos közelítés módszere

D 26.1 Az M metrikus tér pontjaiból álló $[P_n]$ sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden pozitív ε-hoz megadható egy olyan valós n_0 szám, hogy minden $n, m > n_0$ esetén $d(P_n; P_m) < \varepsilon$.

D 26.2 Az olyan metrikus teret, amelyben minden Cauchy-sorozat konvergens, **teljes metrikus térnek** nevezzük. (Pl. ilyen a valós számok halmaza, a komplex számok halmaza, minden $[a; b]$ zárt intervallum, stb. De nem teljes metrikus tér pl. a $(0,1)$ nyílt intervallum, mert az $[\frac{1}{n}; n \in \mathrm{N}^+]$ sorozat Cauchy-sorozat, de a határértéke nincs az intervallumban).

T 26.3 Legyen M teljes metrikus tér, g olyan függvény, hogy Dom $g \subset M$, Ran $g \subset M$ és Dom g-nek van olyan $D'(g)$ részhalmaza, amelyre fennáll:
i) $x \in D'(g)$ esetén $g(x) \in D'(g)$,
ii) $x, y \in D'(g)$ esetén van olyan q, $1 > q > 0$, hogy $q \cdot d(x; y) \geq d(g(x), g(y))$.
Ekkor van egy és csakis egy olyan $x^* \in D'(g)$, amelyre $g(x^*) = x^*$, és $x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$, ahol $x_0 \in D'(g)$ tetszőleges, és $x_{k+1} = g(x_k)$.

Megjegyzés: mivel $d(x_{k+1}; x_k) \leq q^n d(x_0; x_1)$, a tételből következik, hogy két egymás utáni pont távolságát $d(x_0; x_1)$-gyel és q megfelelő hatványával becsülhetjük.

T 26.4 Ha a g valós változós függvény differenciálható az $(a; b)$ intervallumon, és $|g'(x)| \leq q < 1$ $(x \in (a; b))$ akkor $q \cdot d(x_1; x_2) \geq d(g(x_1); g(x_2))$ minden $x_1, x_2 \in (a; b)$ valós számpárra.

Legyen az egyenlet $g(x) = x$ alakú, ahol g eleget tesz a **T 26.2** tétel követelményeinek. Ekkor tetszőleges $x_0 \in D'(g)$ elemből indulva képezzük az $x_{k+1} = g(x_k)$ sorozatot. Ez a sorozat a $g(x) = x$ egyenlet $D'(g)$-beli egyetlen megoldásához konvergál.

Ha ezzel a módszerrel akarunk megoldani egy $f(x) = 0$ alakú egyenletet, amelynek gyöke az $[a;b]$ intervallumban van, akkor írjuk át $g(x) = \lambda f(x) + x = x$ alakúra, ahol λ alkalmasan választott konstans. Ha $\lambda \neq 0$, ennek egy x^* akkor és csak akkor megoldása, ha $f(x^*) = 0$. Az eljárás akkor működik, ha λ értékét sikerül úgy választani, hogy $x \in [a;b]$ esetén $|g'(x)| \leq q < 1$ és $g(x) \in [a;b]$ legyen. (Vegyük észre, hogy a gyök közelében $\lambda = -\frac{1}{f'(x^*)}$ lenne az ideális, mert ekkor q egészen kicsi, feltéve, hogy f' itt nem sokat változik. A **Newton-módszer** a gyök közelében ennek felel meg, minden lépésnél új $\lambda_k = -\frac{1}{f'(x_k)}$ választással).

Módszerek keverése, több gyök meghatározása

Gyakran alkalmazzuk azt az ötletet, hogy egy feltételekhez nem kötött, de lassabban konvergáló eljárással úgy megközelítünk egy gyököt, hogy abban a környezetben már a "kényesebb", de gyorsabban konvergáló eljárást is alkalmazhassuk.

Polinomok esetén általában alacsonyabb fokszámúval könnyebben boldogulunk. Ezért, ha ismerjük egyik gyökét, a gyöktényezővel célszerű leosztani (**Horner eljárás, P 10.7**). Nem szabad azonban figyelmen kívül hagyni, hogy mivel nem a pontos gyökkel, hanem annak csak egy közelítő értékével számoltunk, az új, immár csak "közelítő" polinom közelítő gyöke esetleg az eredetitől a kelleténél jobban eltér, ezért célszerű a végén az eredeti polinommal is egy-két iterációs lépést csinálni.

Feladatok

1.* Tekintsük a $4x^3 - 17.2x^2 + 24x - 10.8 + 3\sin 5x = 0$ egyenletet. Keressük az egyenlet összes gyökét a [0;2.5] intervallumon legalább négy tizedes pontossággal. Határozzunk meg egy-egy gyököt
a) intervallumfelezéssel;
b) húrmódszerrel;
c) Newton-módszerrel;
d) módszerek keverésével!

2.* Oldjuk meg a $\cos x - x = 0$ egyenletet fokozatos közelítés módszerével!

3.* Oldjuk meg az $e^x + 2x^3 = 0$ egyenletet a fokozatos közelítés módszerével!

4. Határozzuk meg az $e^x + 2x^3 = 0$ egyenlet gyökét Newton-módszerrel a $[-1;0]$ intervallumon 10^{-4} pontossággal!

5. Határozzuk meg az $x^3 - 3x^2 - x + 9$ egyenlet összes gyökét 10^{-4} pontossággal!

6. Határozzuk meg az $x^5 - x + 0.46$ polinom összes zérushelyét 10^{-4} pontossággal!

7. Határozzuk meg az $e^x + x^3 + 2x^2 + x = 0$ egyenlet összes gyökét 10^{-4} pontossággal!

27. fejezet

Differenciálegyenletek

A differenciálegyenlet fogalma, típusa

D 27.1 **Differenciálegyenleten** olyan egyenletet értünk, amelyben a meghatározandó ismeretlen egy függvény, és az egyenletben az ismeretlen függvény különböző rendű deriváltjai, valamint (egy- vagy többváltozós) adott függvények szerepelnek.

D 27.2 **Közönséges differenciálegyenleten** olyan differenciálegyenletet értünk, amelyben az ismeretlen függvény egyváltozós, **parciális differenciálegyenleten** pedig olyant, amelyben az ismeretlen függvény többváltozós.

D 27.3 Egy differenciálegyenletet **n-edrendűnek** nevezünk, ha a benne szereplő legmagasabb rendű derivált n-edrendű. Ha a közönséges differenciálegyenlet olyan alakú, hogy egyik oldalán csak az egyenletben előforduló legmagasabb rendű derivált áll, a másik oldalon viszont ez a derivált nem lép fel, akkor a differenciálegyenletet **explicitnek**, minden más esetben **implicitnek** nevezzük. Az implicit differenciálegyenletet gyakran 0-ra redukált alakban írjuk fel, vagyis úgy, hogy az egyenlet egyik oldalán 0 legyen.

D 27.4 Ha az $m+r$ számú $u_1, u_2, \ldots, u_m; x_1, x_2, \ldots, x_r$ változótól függő F függvény véges számú

(1) $$a(u_1, u_2, \ldots, u_m)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_r^{n_r} \qquad (n_1, n_2, \ldots, n_r \in \mathbf{N})$$

alakú függvény összege, ahol a az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ változók tetszőleges valós függvénye, akkor azt mondjuk, hogy F **polinomfüggvény az $x_1, x_2, \ldots, x_r$ változókra nézve.** Az (1) tagnak az **$x_1, x_2, \ldots, x_r$ változók rendszerére vonatkozó fokszámán** az $n_1+n_2+\ldots+n_r$ összeget, az F függvénynek az $x_1, x_2, \ldots, x_r$ változók rendszerére vonatkozó fokszámán a tagok fokszámának maximumát értjük. Az a-kat az F **együtthatófüggvényeinek** (röviden **együtthatóinak**) nevezzük.

D 27.5 Ha egy differenciálegyenlet 0-ra redukált alakjában a nemzérus oldalon olyan függvény áll, amely az ismeretlen függvényre és annak deriváltjaira nézve k-adfokú polinomfüggvény, akkor a differenciálegyenletet **k-adfokúnak** nevezzük; mégpedig, ha az ilyen differenciálegyenletben minden nemzérus tagnak ugyanaz a fokszáma, akkor a differenciálegyenletet **homogénnek**, az ellenkező esetben **inhomogénnek** mondjuk. Más alakú differenciálegyenletről pedig azt mondjuk, hogy **nincs fokszáma.**

D 27.6 Egy y függvényről akkor mondjuk, hogy egy adott közönséges **differenciálegyenletnek megoldása** a valós számok valamely H halmazán, ha az $y = y(x)$ helyettesítést elvégezve a differenciálegyenlet a H halmazon azonossággá válik. Az y megoldás grafikonját a differenciálegyenlet (egyik) **integrálgörbéjének** mondjuk. (Ha a H halmaz az $\mathbf{R}$, akkor ezt többnyire nem említjük meg.)

M 27.7 A gyakorlatban egy differenciálegyenletnek többnyire nem az összes megoldását keressük, hanem egy olyan megoldást, amely és amelynek bizonyos deriváltjai adott ξ helyen megadott értékeket vesznek fel. Képletszerűen kifejezve, többnyire olyan y megoldást keresünk, amely eleget tesz valamely

$$y(\xi) = \eta_0,\ y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(r)}(\xi) = \eta_r$$

feltételnek is, ahol $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_r$ előre megadott valós számok. Az ilyen típusú feltételeket (Taylor-típusú) **kezdeti feltételeknek** nevezzük.

D 27.8 Legyen f valós $(n+1)$-változós függvény,

$$P = (\xi, \eta_0, \eta_1, \ldots \eta_{n-1})$$

pedig az $(n+1)$-dimenziós $\mathbf{R}^{n+1}$ tér valamely rögzített pontja. Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

differenciálegyenlethez és a P ponthoz tartozó **kezdetiérték-problémán** olyan egyváltozós valós y függvény meghatározását értjük, amely
1. egyrészt kielégíti a differenciálegyenletet a ξ valamely teljes környezetében,
2. másrészt eleget tesz az

$$y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$$

kezdeti feltételnek. Ha van ilyen függvény, akkor azt mondjuk, hogy a **kezdetiérték-probléma megoldható**, és ha pontosan egy ilyen függvény van, akkor azt mondjuk, hogy a **kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható**.

T 27.9 (Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel) Ha az $(n+1)$-változós valós f függvény az $(n+1)$-dimenziós R^{n+1} tér valamely korlátos zárt D halmazán folytonos, akkor az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

differenciálegyenlethez és a D halmaz tetszőleges belső pontjához tartozó kezdetiértékprobléma megoldható.

D 27.10 Legyen D az r-változós valós f függvény értelmezési tartományának valamely részhalmaza. Az f függvényről akkor mondjuk, hogy a D halmazon az i-edik változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, ha megadható olyan N_i pozitív valós szám, hogy a D halmaz bármely két

$$P^* = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i^*, p_{i+1}, \ldots, p_r)$$

és

$$P^{**} = (p_1, \ldots, p_{i-1}, p_i^{**}, p_{i+1}, \ldots, p_r)$$

pontjára az

$$| f(P^*) - f(P^{**}) | \leq N_i \, | p_i^* - p_i^{**} |$$

egyenlőség érvényes.

T 27.11 Ha az r-változós valós f függvénynek valamely konvex D halmazon az i-edik változó szerinti parciális deriváltja létezik és korlátos, akkor a D belsejében az f függvény az i-edik változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek.

T 27.12 (Picard-Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel) Ha az $(n+1)$-változós valós f függvény az $(n+1)$-dimenziós R^{n+1} tér valamely korlátos zárt D részhalmazán folytonos, és ezen a részhalmazon legfeljebb az első változó kivételével minden változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

differenciálegyenlethez és a D tetszőleges belső pontjához tartozó kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek típusát (explicit-e vagy implicit; rendszám; fokszám, mégpedig homogén-e vagy inhomogén):

1. $y' = \operatorname{ch} x - 3xy$,
2. $3y''' - (\operatorname{tg} x)y' + \operatorname{ch} x = 0$,
3. $y'''\sqrt{1+x^2} - y \ln x = \operatorname{cth} x$,
4. $y'' = y'^2 \cos x$,
5. $y'' - xy' + (\cos x)y = \operatorname{tg} x$,
6. $y^{(5)} = (\operatorname{th} x)y''' - e^{3x}y$,
7. $y'' = e^y \ln x$,
8. $y''' \cos y + (\sin x)y' = \operatorname{tg} x$,
9. $y'' \cos x - y' \operatorname{ch} x = y \operatorname{th} x$,
10. $y'' - y\sqrt{1+y'^2} = \sin x$,
11. $y^{(5)} = \frac{3}{x^3}y'' + \frac{4}{x^4}y'$,
12. $y^{(4)} - y'' = x^3 y''' + xy$,
13. $y'(x+y) = y(x+1)$,
14. $y''\sqrt{1-x^2} + y' = y\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
15. $y''y' = y^2 \cos^2 x$,
16. $y'(x^2+2y) = y^2 - 2x$.

Állapítsuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenletekre az $\mathbf{R}^2$, illetve az $\mathbf{R}^3$ tér mely résztartományain teljesülnek a Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel és a Picard-Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel feltételei. Ahol kezdeti feltétel is szerepel, ott azt vizsgáljuk meg, hogy van-e az adott kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás:

17.▷ $y'' = 2x + 4y - 3y'$,
18.▷ $y' = \frac{x-1}{y}$,
19.▷ $y'' = x - \sin y + \cos y'$,
20. $y' = x^2 + y^2$,
21.▷ $y' = y \operatorname{tg} x; \quad y(0) = 0$,
22.▷ $y' = x \ln y; \quad y(0) = 0$,
23. $y' = \ln x + \cos y; \quad y(1) = 0$,
24.▷ $y' = 2\sqrt{|y|}; \quad y(1) = 0$.

Görbesereg és differenciálegyenlet

D 27.13 Síkbeli n-**paraméteres görbeseregen** olyan síkgörbék összességét értjük, amelyek a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben valamely közös

$$(1) \qquad g(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0; \quad c_1, c_2, \dots, c_n: \quad \text{valós paraméterek}$$

egyenlettel írhatók le, miközben minden egyes c_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ paraméter a valós számok halmazát vagy annak valamely valódi részhalmazát futja be.

D 27.14 Bármely n-edrendű differenciálegyenlethez tartozik olyan n-paraméteres görbesereg, amelynek minden eleme a differenciálegyenletnek egy-egy integrálgörbéje (a differenciálegyenletnek azonban lehetnek olyan integrálgörbéi is, amelyek nem tartoznak ilyen görbesereghez). Az n-edrendű közönséges differenciálegyenlethez ily módon hozzárendelhető görbesereg (1) egyenletéből adódó n-paraméteres $y = y(x, c_1, \dots, c_n)$ kifejezést a differenciálegyenlet **általános megoldásának**, az ezen kívül esetleg létező további megoldásokat **szinguláris megoldásoknak** nevezzük. Ha az általános megoldásból bizonyos feltételek (többnyire a kezdeti feltételek) alapján egy konkrét megoldást kiválasztunk, akkor azt a differenciálegyenlet **partikuláris megoldásának** mondjuk.

D 27.15 Legyen megadva egy síkbeli n-paraméteres görbesereg a

$$(2) \qquad g(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$$

vagy (ha ebből y kifejezhető) az

$$(3) \qquad y = f(x, c_1, \dots, c_n)$$

egyenlettel. Mivel y az x függvénye, ezért g is az x függvénye. Ha az (2)-beli g, illetve a (3)-beli f függvény (x szerint) legalább n-szer differenciálható, akkor az n szerinti differenciálást végrehajtva a $c_1, c_2, \dots c_n$ paraméterekre n számú egyenletből álló egyenletrendszert kapunk. Ebből az egyenletrendszerből (kedvező esetben) a paraméterek az x-szel, y-nal és y első n deriváltjával kifejezhetők; az így kifejezett értéküket az (2)-be, illetve a (3)-ba behelyettesítve, n-edrendű, paramétermentes differenciálegyenletet kapunk. (Megtörténhet, hogy a paraméterek már a differenciálások során kiesnek.) Az így adódó differenciálegyenletet a **görbesereg differenciálegyenletének** nevezzük.

Feladatok

Írjuk fel az alábbi paraméteres egyenletükkel megadott síkbeli görbeseregek differenciálegyenletét (az egyenletekben szereplő a, b, c, c_1, c_2, u, v, illetve r paramétereket jelölnek):

25.• $y = cx^2$,

26.▷ $x^2 + y^2 = cx$,

27. $x^2 + y^2 = r^2$,

28.▷ $y = ae^{\frac{x}{a}}; \quad a \neq 0$,

29.▷ $(x-a)^2 + y^2 = 1$,

30. $(x-c)^2 + y^2 = c^2$,

31.▷ $(x-u)^2 + (y-v)^2 = 2$,

32.▷ $y = c_1x^2 + c_2e^{2x}$,

33.* $y = \mathrm{tg}(ax + b)$,

34. $y = c_1 x + c_2 \ln x$,

35. $y = a\cos x + b\sin x$,

36. $y = c_1 \operatorname{ch} x + c_2 \operatorname{sh} x$,

37. $y = c_1 \cos(x - c_2)$,

38.* $y = e^x(c_1 x + c_2)$,

39. $y = ax^2 + bx + c$,

40. $ax + by + c = 0; \quad b \neq 0$,

41. $ax + by^2 + c = 0; \quad b \neq 0$,

42. $y = \mathrm{tg}(x + c)$,

43. $y = \operatorname{ch}(ax + b)$,

44. $y = ae^{bx}$.

45. Határozzuk meg azoknak az xy síkban fekvő köröknek a differenciálegyenletét, amely körök az x-tengelyt az origóban érintik.

46. Határozzuk meg azoknak az xy-síkbeli köröknek a differenciálegyenletét, melyek az y-tengelyt az origóban érintik.

47. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő köröknek a differenciálegyenletét, melyek érintik az $y = x$ és az $y = -x$ egyeneseket, és középpontjaik az x-tengelyen vannak.

48. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő adott sugarú köröknek a differenciálegyenletét, melyek érintik az x-tengelyt.

49. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő adott sugarú köröknek a differenciálegyenletét, melyek érintik az y-tengelyt.

50. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek tengelyei párhuzamosak az y-tengellyel, és átmennek az origón, valamint a $P(a, 0)$ ponton.

51. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek tengelyei az x-tengellyel párhuzamosak, és átmennek az origón, valamint a $P(0, a)$ ponton.

52. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek tengelyei az y-tengellyel párhuzamosak, csúcspontjaik pedig az $y = x$ egyenletű egyenesen fekszenek.

53. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő paraboláknak a differenciálegyenletét, melyeknek tengelye az x-tengellyel párhuzamos, csúcspontjai pedig az $y = x$ egyenesen fekszenek.

54. Határozzuk meg azoknak az xy-síkban fekvő ellipsziseknek a differenciálegyenletét, melyeknek középpontjai az origóban vannak, tengelyei pedig a koordinátengelyek.

28. fejezet

Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

D 28.1 Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletet **szétválasztható változójúnak** (röviden **szétválaszthatónak** vagy **szeparálhatónak**) nevezzük, ha ekvivalens átalakításokkal $y' = f(x)g(y)$ alakra hozható.

T 28.2 Ha az egyváltozós valós f függvény az $[a,b]$ zárt intervallumon, az egyváltozós valós g függvény pedig a $[c,d]$ zárt intervallumon folytonos, akkor a

$$D = \{(x,y): \ x \in (a,b), \ y \in (c,d)\}$$

nyílt téglalap minden pontján áthalad az

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

differenciálegyenletnek legalább egy integrálgörbéje. Ha még az is teljesül, hogy a g függvény a $[c,d]$ intervallumban sehol sem veszi fel a 0 értéket, akkor a differenciálegyenletnek a D minden pontján át egyetlen integrálgörbéje halad.

M 28.3 Ha y_0 olyan valós szám, hogy $g(y_0) = 0$, akkor az $y = y_0$ képlettel definiált konstansfüggvény nyilvánvalóan megoldása az (1)-nek.

M 28.4 Az (1) differenciálegyenlet megoldási menete formálisan a következő. Az y' helyébe $\frac{dy}{dx}$-et írunk:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Ezután a dx-et a jobb oldalra, a $g(y)$-t a bal oldalra visszük át (egyelőre feltételezve, hogy $g(y) \neq 0$), majd kitesszük a határozatlan integrál jelét:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx. \tag{2}$$

Az integrálásokat elvégezve, a **T 28.2** feltételeinek teljesülése esetén az (1) általános megoldását kapjuk. Ezután megvizsgáljuk, hogy a $g(y) = 0$ egyenletből adódnak-e új (esetleg szinguláris) megoldások. Azt az eljárást, amellyel az (1)-ből a (2)-be jutunk, a **változók szétválasztásának** nevezzük.

M 28.5 A szétválasztható változójú differenciálegyenletek közé tartozik minden elsőrendű homogén lineáris, vagyis

$$y' = p(x)y \tag{3}$$

alakú differenciálegyenlet. Vagy szétválasztható, vagy alkalmas helyettesítéssel szétválaszthatóvá tehető minden olyan

$$(4)\qquad y' = f(x,y)$$

differenciálegyenlet is, amelynek jobb oldala tetszőleges nemzérus k valós számmal eleget tesz az

$$(5)\qquad f(kx,ky) = f(x,y)$$

feltételnek. Az $y = xu$ helyettesítéssel ugyanis

$$y' = u + x\frac{du}{dx},$$

illetve (az $x = 0$ hely kivételével)

$$f(x,y) = f(x,xu) = f(1,u)$$

adódik, és így a (4) egyenletből átrendezés után

$$x\frac{du}{dx} = f(1,u) - u$$

lesz; a legutóbbi egyenletben pedig a változók szétválaszthatók. Egyelőre feltételezve, hogy $f(1,u) \neq u$, azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{dx}{x}; \qquad x \neq 0.$$

Az $f(1,u) = u$ esetet külön meg kell nézni; ez szinguláris megoldást is adhat.

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú, vagy ilyenre visszavezethető elsőrendű differenciálegyenleteket:

1.• $(2x+1)y' - 3y = 0$,
2.▷ $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$,
3. $(x^2 - 2x)y' = 2(x-1)(y+1)$,
4. $(x^2y + 6y)y' + (xy^2 - x) = 0$,
5. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy = 0$,
6. $\sqrt{1+x^2}\,y' - \sqrt{1-y^2} = 0$,
7. $(1+x^2)y' + (1+y^2) = 0$,
8. $2y^2 + 3y = 3xy'$,
9. $(x + xy^2)y' = 3$,
10. $(1-x^2)y' = \sqrt{1-y^2}$,
11. $(1+x^2)y' + x(1+y^2) = 0$,
12. $xyy' + y^2 - 1 = 0$,
13. $(x\cos y)y' + \sin y = 0$.
14. $y'\sin y\cos x + \cos y \sin x = 0$,
15.* $y' = (\sin\ln x + \cos\ln x + a)y$; a: állandó,
16.▷ $(y-x)y' + y + x = 0$,
17. $xy' = y + \sqrt{x^2+y^2}$,
18. $xy^2y' = x^3 + y^3$,
19. $2xyy' = 2y^2 - x^2$,
20. $2xyy' = x^2 + y^2$,
21. $(x\cos\frac{y}{x})y' = y\cos\frac{y}{x} - x$,
22. $(xy\sin\frac{y}{x})y' = xy\cos\frac{y}{x} + (y^2 - x^2)\sin\frac{y}{x}$,
23. $xy' + x + y = 0$,
24. $xy' = y - x\cos^2\frac{y}{x}$,

25. $(xy - x\sqrt{y^2 - x^2})y' = y^2$, **26.** $x^2y' = xy + y^2e^{-\frac{x}{y}}$,

27.* $(2ye^{\frac{y}{x}} - x)y' + 2x + y = 0$, **28.** $(x^2 + y^2)y' = xy$,

29.* $(x + 2y)e^{-\frac{x}{y}}y' = 2x + ye^{-\frac{x}{y}}$, **30.**▸ $(y^2 + x^2e^{\frac{x}{y}})y' = (y^2 + xy)e^{\frac{x}{y}}$,

31. $x(\ln\frac{x}{y} - 1)y' + x + y = 0$,

32. $(y^2 - x^2\cos\frac{x}{y})y' + y(y\sin\frac{x}{y} + x\cos\frac{x}{y}) = 0$,

33. $(y\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{y} - x\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{y})y' + y(1 + \mathrm{sh}\,\frac{x}{y}) = 0$,

34. $(y^2 - x^2\sin\frac{x}{y})y' = y^2\cos\frac{x}{y} - xy\sin\frac{x}{y}$.

Oldjuk meg az alábbi (35.-38.) feladatokban szereplő szétválasztható változójú differenciálegyenleteket, amelyekben az ismeretlen r függvény a ϕ polárszög függvénye:

35.▸ $r'\cos\phi = -2r\sin\phi$, **36.** $r'\cos\phi = r\sin\phi$,

37.* $2rr'\cos\phi = \mathrm{tg}\,\phi$, **38.*** $ar' = r\sqrt{r^2 - a^2}$; a pozitív.

Határozzuk meg az alábbi szétválasztható változójú, vagy ilyenre visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletek általános megoldását, valamint az illető feladatban megadott kezdeti feltételnek megfelelő partikuláris megoldást:

39.• $xy' + y = y^2$; $y(2) = -3$, **40.** $yy' + x = 0$; $y(-2) = 4$,

41. $xy' + y = 0$; $y(2) = 6$, **42.** $y' + 1 - e^{-y} = 0$; $y(0) = \ln 2$,

43. $\frac{y}{x+1}y' - \frac{x}{y+1} = 0$; $y(1) = 1$, **44.** $(x\cos y)y' + \sin y = 0$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$,

45. $y' - xe^x - xe^{x-y} = 0$; $y(1) = 0$, **46.** $xy' = y\ln y$; $y(1) = e$,

47. $y'\sin x = y\ln y$; $y(\frac{\pi}{2}) = e$, **48.** $2xyy' = y^2 - x^2$; $y(2) = 0$,

49. $(2x^3 + 3xy^2)y' = x^2y + 2y^3$; $y(1) = \sqrt{3}$,

50. $2x^2y' = x^2 + 2xy - y^2$; $y(1) = 2$,

51. $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$; $y(1) = 0$,

52. $y\sqrt{1 - x^2}y' + x\sqrt{1 - y^2} = 0$; $y(0) = 1$,

53.▸ $(e^x + 1)yy' = e^x$; $y(1) = 1$,

54. $(x^2 + 2xy)y' = 3y^2 + 2xy$; $y(1) = 1$,

55. $(y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y})y' + y\cos\frac{x}{y} = 0$; $y(\pi) = 2$,

56. $x^2e^{\frac{x}{y}}y' = y(y + xe^{\frac{x}{y}})$; $y(1) = 1$,

57. $(xy\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{y} - (x^2 + y^2)\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{y})y' + xy\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{y} = 0$; $y(0) = 1$.

Jelölje G azt az xy-síkbeli görbesereget, amelybe egy g görbe akkor és csak akkor tartozik bele, ha g bármely pontbeli érintője létezik, és a g görbe az alábbi feladatok valamelyikében leírt tulajdonságú. Határozzuk meg a G görbesereg egyenletét:

58.• A g görbe bármely pontbeli érintőjének a pont és az y-tengely közötti darabját felezi az érintőnek az x-tengelyen lévő pontja.

59. A g görbe bármely pontjában húzott érintőjének a meredeksége egyenesen arányos az érintési pont abszcisszájával.

60. A g görbe bármely pontbeli érintőjének a koordinátatengelyek közé eső darabját felezi az érintési pont.

61. A g görbe bármely pontbeli főnormálisa, az érintési pontot az origóval összekötő egyenes, valamint az x-tengely olyan egyenlőszárú háromszöget határoznak meg, amelynek az alapja az x-tengelyen van.

62. A g görbe bármely P pontbeli érintőjének a P pont és az y-tengely közötti szakasza egyenlő a pontnak az origótól mért távolságával.

63.$^{\triangleright}$ A g görbe bármely P pontbeli érintőjének az y-tengellyel való metszéspontját Q-val jelölve, $OP = OQ$ (ahol O az origó).

64.$^{\triangleright}$ A g görbe bármely P pontbeli érintőjének az y-tengellyel való metszéspontját Q-val jelölve, $QO = QP$ (O az origó).

65.$^{\triangleright}$ A g görbe bármely P pontbeli főnormálisának az x- és az y-tengellyel való metszéspontját M-mel, illetve N-nel jelölve, az N pont felezi a PM szakaszt.

66.$^{\triangleright}$ A g görbe bármely P pontbeli főnormálisa, az y-tengely és az érintési ponton átmenő, x-tengellyel párhuzamos egyenes által bezárt háromszög területe állandó; továbbá a görbe átmegy a $P_1(0,0)$, $P_2(2,8)$ pontokon.

67.$^{\triangleright}$ Az origóból induló és az első síknegyedben haladó g görbe bármely P pontján keresztül húzott, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesek a koordináta-tengelyekkel együtt olyan téglalapot alkotnak, amelynek területét a g görbe $1:2$ arányban osztja, mégpedig úgy, hogy a téglalapnak
a) a görbe alatti,
b) a görbe feletti
része a kisebb.

68. Oldjuk meg az előző feladatot abban az esetben is, amikor a területek aránya $1:3$.

69.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg annak a síkbeli görbeseregnek a polárkoordinátás egyenletét, amelybe egy g görbe akkor és csak akkor tartozik bele, ha a g tetszőleges P pontját véve, a görbe pontbeli érintője létezik, mégpedig az OP egyenes (O a pólus) és az érintő által bezárt irányított ω szög egyenlő a P pont ϕ polárszögével.

70.$^{\triangleright}$ Oldjuk meg az előző feladatot abban az esetben is, ha az ω szög a ϕ szög kétszerese.

71.$^{\triangleright}$ Határozzuk meg azt a tükörfelületet, amelyik egy fix pontból kiinduló fénysugarakat egy adott egyenessel párhuzamosan ver vissza.

Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

D 28.6 Az explicit elsőrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$y' = p(x)y + q(x);$$

ezt homogénnak nevezzük, ha $q(x)$ azonosan 0, inhomogénnak, ha $q(x)$ nem azonosan 0.

D 28.7 Ha az inhomogén lineáris

(1) $$y' = p(x)y + q(x), \quad q(x) \not\equiv 0$$

differenciálegyenlet változói nem választhatók szét, akkor az egyenlet megoldásához segítségül vesszük a

$$(2) \qquad Y' = p(x)Y$$

homogén lineáris (szátválasztható változójú) differenciálegyenletet; ez utóbbit az (1) **inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenletnek** nevezzük. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor p és q a vizsgált intervallumon folytonosak. Ekkor a (2) általános megoldása:

$$Y = ce^{P(x)} \; (c \in \mathbb{R}; \; P'(x) = p(x)).$$

Keressük (1) megoldását a következő alakban:

$$(3) \qquad y = c(x)e^{P(x)},$$

vagyis az (1)-hez tartozó homogén egyenlet általános megoldásában fellépő c konstans helyébe írjuk x-nek egy – egyelőre ismeretlen – $c(x)$ függvényét. Innen ered a módszer neve: a **konstans variálása**. Helyettesítsük (1)-ben az y helyébe a (3) szerinti kifejezést, és ennek megfelelően az y' helyébe az $y' = c'(x)e^{P(x)} + c(x)p(x)e^{P(x)}$ kifejezést:

$$c'(x)e^{P(x)} + c(x)p(x)e^{(x)} = p(x)c(x)e^{P(x)} + q(x);$$

összevonás után a

$$c'(x)e^{P(x)} = q(x)$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ezért

$$c(x) = \int \frac{q(x)}{e^{P(x)}} dx.$$

Ezt a $c(x)$-et (3) jobb oldalába visszahelyettesítve megkapjuk az (1) egyenlet általános megoldását.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását, illetőleg a feladatokban megadott kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldását.

72.° $y' - \frac{2}{x}y = x^2 + 1$,

73. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$,

74. $y' - \frac{1}{x}y = x^2$,

75. $y' - xy = x^3$,

76. $y' - (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)y = -4\sin^2 x$,

77. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$,

78. $y' + y = e^{-x}$,

79. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$,

80. $xy' - (x+1)y = x^2 - x^3$,

81. $y' + y \operatorname{th} x = 1$,

82. $xy' + 2y = x^4$,

83. $y' + \frac{1}{x}y + e^x = 0$,

84. $xy' - y = x^3 + 1; \quad y(2) = 5$,

85. $xy' - y = x^3 + 1; \quad y(0) = 2$,

86. $y' + y\cos x = \sin x \cos x; \quad y(0) = 1$,

87. $y' \cos x + y \sin x = 1; \quad y(\frac{\pi}{2}) = -1$,

88. $(1+x^2)y' + xy = 3x^3$; $y(1) = 0$, 89. $y' - y = x - 2\sin x$; $y(0) = 1$.
90. $(1+x^2)y' + 2xy = \operatorname{tg} x$; $y(0) = 2$,
91. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$; $y(\frac{\pi}{3}) = 1$,
92. $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x$; $y(\frac{\pi}{6}) = e^{\frac{\pi}{6}}$.
93. $y' + y = \cos x$; $y(0) = 1$, 94. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; $y(0) = 1$,
95. $y' - y \operatorname{th} x = x \operatorname{sh} 2x$; $y(0) = 2$, 96. $y' - 5y = 2xe^{5x}$; $y(1) = 0$.

Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

D 28.8 Ha az explicit másodrendű

$$y'' = f(x, y, y')$$

differenciálegyenletből x és y közül legalább az egyik hiányzik, akkor a differenciálegyenletet **hiányos másodrendű differenciálegyenletnek** nevezzük. Ha a fenti egyenletből y vagy x hiányzik, akkor a differenciálegyenlet megoldása könnyen visszavezethető elsőrendű differenciálegyenletek megoldására.
1. eset: $y' = f(x, y')$ (tehát az y hiányzik). Ez az egyenlet az y'-re nézve elsőrendű differenciálegyenlet; megoldása (ha van)

$$y' = F(x, c_1); \quad c_1 : \text{paraméter}$$

alakú. Ebből

$$y = \int F(x, c_1)dx.$$

A jobb oldalon az integrálás tényleges elvégzésekor újabb paraméter lép be, tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását kapjuk.
2. eset: $y'' = f(y, y')$ (tehát az x hiányzik). Ekkor az $y' = p = p(y)$ helyettesítést alkalmazzuk; ennek megfelelően $y'' = \frac{dp}{dy}p$. A fenti kifejezéseket az eredeti differenciálegyenletbe helyettesítve a

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

differenciálegyenlethez jutunk, amely $p(y)$-ra nézve elsőrendű. Ennek megoldása (ha van)

$$p = G(y, c_1); \quad c_1 : \text{paraméter}$$

alakú lesz. Ebből pedig, a p helyébe az $y' = \frac{dy}{dx}$-et visszaírva, a szétválasztható változójú

$$\frac{dy}{dx} = G(y, c_1)$$

differenciálegyenlet adódik. Ez utóbbinak a megoldásával megkapjuk az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását.

M 28.9 Ha a feladat során kezdeti feltételek is adottak, akkor a kezdeti feltételeket már az elsőrendű differenciálegyenletre történt redukálás után is figyelembe vehetjük.

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenleteket:

97.▷ $y'' = 6x + \sin x$,

98. $y''\sqrt{1-x^2} = 1$,

99. $y''(1+\sin x)^2 + \cos x = 0$,

100. $y''x^2 + \ln x - 1 = 0$,

101. $y'' = xe^x$,

102.• $y''y^3 = 1$,

103.* $y'' = e^y$,

104.▷ $y''(1+y^2) = yy'^2$,

105. $2yy'' = y'^2$,

106. $y''(y-1) = 2y'^2$,

107. $yy'' + y'^2 + 1 = 0$,

108.• $y'' - \frac{x}{x^2-1}y' = 0$; $x > 1$,

109. $(x\ln x)y'' - y' = x\ln^2 x$,

110.▷ $y''^2 - y' = 0$,

111. $2y'' + y'^3 = 0$,

112. $y'' = (1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$,

113. $y'' + y'^2 = 1$,

114. $y'' - y'^2 + 1 = 0$.

Határozzuk meg az alábbi hiányos másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását, valamint az illető feladatban megadott kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldást:

115. $y'' = x^2e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$,

116. $y'' = x\cos x + 2\sin x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$,

117. $y'' = \frac{6x+4}{x^2+2} + 2\ln(x^2+2)$; $y(0) = 3\ln 2$, $y'(0) = 1$,

118. $y(1-\ln y)y'' + (1+\ln y)y'^2 = 0$; $y(0) = e^2$, $y'(0) = e^2$,

119. $xy'' - y' = x^2\sin x$; $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$, $y'(\frac{\pi}{2}) = \pi$,

120.▷ $y'' = \sqrt{y'^2 - 4}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

121. $y'' = \sqrt{4 - y'^2}$; $y(\frac{\pi}{3}) = 0$, $y'(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$,

122. $y''^2 - 12y' = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$,

123.▷ $4yy'^2 = 1$; $y(\frac{1}{3}) = 4$, $y'(\frac{1}{3}) = -2$,

124.▷ $yy'' = 1 + y'^2$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

125.▷ $y''(y-1) = 2y'^2$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

126.▷ $y'' = 2yy'$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Alkalmazások

127.▷ Tegyük fel, hogy a lakosság száma és szaporodási sebessége egyenesen arányos. határozzuk meg a lakosság A számának és a t időnek az összefüggését, ha tudjuk, hogy valamely, általunk kezdetinek vett időpontban a lakosság száma A_0 volt, és ez egy év alatt a százalékkal nőtt. Ennek alapján határozzuk meg Magyarország lakosságának 1996 *I*. 1-ére és 2001. *I*. 1-re feltételezhető számát, ha feltétellezzük, hogy 1991. *I*. 1-én a lakosság száma 10^7 volt, az évi szaporulat pedig 1990 óta $1,5\%$.

128.▷ A rádium bomlási sebessége minden időpillanatban egyenesen arányos a rádium akkori tömegével. Határozzuk meg, hogy m_0 tömegű rádiumnak hány százalékkal bomlik el 200 év alatt, ha tudjuk, hogy a rádium felezési ideje (az az időszak, amely alatt a rádium fele elbomlik) 1590 év.

129.▷ Egy motorcsónak sebessége állóvízben $v_0 = 20$ (km/h). Teljes sebességgel halad, majd a motor leáll, és ezután 40 s alatt a csónak sebessége $v_1 = 8$ (km/h)-re csökken. A víz ellenállása arányos a csónak sebességével. Mekkora a csónak sebessége 2 perccel a motor kikapcsolása után?

130.▷ Valemilyen magasságból függőlegesen lefelé dobunk egy m tömegű testet. Határozzuk meg a test v sebességének változását, ha arra a nehézségi erő és a levegőnek a test sebességével egyenesen arányos (az arányossági tényező k) fékező ereje hat.

131.▷ Egy testet függőlegesen felfelé hajítunk v_0 kezdősebességgel. Határozzuk meg a mozgás út-idő függvényét a kezdeti pillanatban elfoglalt helyétől számítva, ha a test csak a nehézségi erő hatására mozog.

132.▷ Az OA egyenesen egy m tömegű anyagi pont olyan taszító erő hatására mozog, amely fordítottan arányos a rögzített O középponttól mért $x = OM$ távolság harmadik hatványával. Határozzuk meg az anyagi pont mozgását leíró függvényt.

133.▷ Határozzuk meg, hogy milyen alakot vesz fel saját súlyának hatására a C és D végein felfüggesztett hajlékony, súlyos fonal.

134.▷ Egy gerenda az x-tengely mentén a $(0,0)$ és az $(l,0)$ pontok között helyezkedik el. Kihajlása az x pontban egyenlő y-nal, és kielégíti az $y^{(4)} = af(x)$ differenciálegyenletet, ahol $f(x)$ a megterhelés, a pedig a gerenda anyagától és a keresztmetszet alakjától függő együttható. Határozzuk meg a gerenda alakját $f(x) = 1$ esetén, ha a gerenda végei be vannak fogva.

135.▷ Ha R az ellenállás, L az önindukció együttható és V a feszültség, akkor az I áramerősség kielégíti az

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V$$

differenciálegyenletet. Határozzuk meg az áramerősséget t másodperccel a bekapcsolás után, ha

a) V állandó és $t = 0$ esetén az áramerősség I_0,

b) $V = V_0 \sin 2\pi n t$ és $I_0 = \frac{-2\pi n V_0 L}{R^2+4\pi^2 n^2 L^2}$.

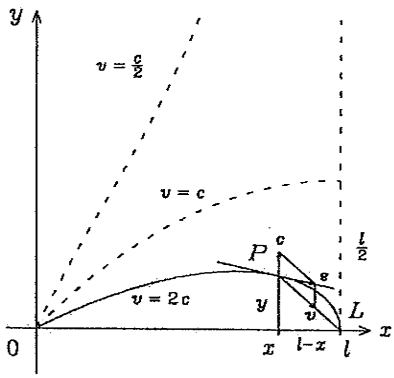
136.* Egy l szélességű folyón, melynek sebessége c, egy robotvezérlésű motorcsónak megy keresztül a bal part O pontjából (l az ábrát). A csónak v sebességvektora minden pillanatban a túloldali L pontba mutat. Határozzuk meg a motorcsónak útjának görbéjét; mi lesz a görbe egyenlete:

a) $v = c$,

b) $v = 2c$,

c) $v = \frac{1}{2}c$

esetén?



Egzakt differenciálegyenletek, multiplikátorok

D 28.10 Az elsőrendű

(1) $$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

differenciálegyenletet **egzakt**nak nevezzük, ha megadható x-nek és y-nak olyan u függvénye, hogy

(2) $$P = u'_x \text{ és } Q = u'_y.$$

Ha a (2) feltétel teljesül, akkor az (1) differenciálegyenlet általános megoldása $u(x,y) = c$ (c: paraméter).

T 28.11 Legyenek P és Q az xy-sík valamely egyszeresen összefüggő D ponthalmazán folytonos függvények; a P'_y és Q'_x parciális deriváltak is létezzenek, és legyenek folytonosak a D ponthalmazon. A felsorolt feltételek teljesülése esetén a

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

differenciálegyenlet akkor és csak akkor egzakt, ha

$$P'_y(x_0,y_0) = Q'_x(x_0,y_0)$$

a D minden egyes (x_0,y_0) pontjában.

M 28.12 Ha az (1) differenciálegyenletre a tételbeli feltételek nem teljesülnek, többnyire akkor is lehet olyan $M(x,y)$ függvényt találni, mellyel az (1) differenciálegyenletet megszorozva az egzakttá válik.

D 28.13 A kétváltozós valós M függvényt az (1) differenciálegyenlet **multiplikátor**ának (vagy **integráló tényezőjének**) nevezzük, ha az (1) egyenletet az M-mel megszorozva egzakt differenciálegyenletet kapunk.

M 28.14 Itt a csak x-től függő $M_1(x)$ és a csak y-tól függő $M_2(y)$ multiplikátorral foglalkozunk. Egyszerűen megmutatható, ha ilyenek léteznek, akkor

$$\ln|M_1(x)| = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx, \quad \text{illetve} \quad \ln|M_2(y)| = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy.$$

Feladatok

Az alábbi feladatokban felírt differenciálegyenletekről állapítsuk meg, hogy az illető differenciálegyenlet egzakt-e, vagy – ha nem – egyváltozós multiplikátorral egzakttá tehető-e; az egzaktakat, vagy az említett módon egzakttá tehetőket oldjuk is meg:

137.* $2x + 2\sin y + (2x\cos y - \sin y)y' = 0$,

138. $2xe^{x^2} + y\,\mathrm{sh}\,x + (\mathrm{ch}\,x - 2\,\mathrm{ch}\,2y)y' = 0$,

139. $\ln y + ye^x + 2 + (\frac{x}{y} + e^x - \mathrm{ch}\,y)y' = 0$,

140. $x^3 - 3xy^2 + (y^2 - 3x^2y)y' = 0$,

141. $3x^2 + 6xy^2 + (6x^2y + 4y^3)y' = 0$,

142. $\frac{1}{x} + \frac{y^2}{(x+y)^2} + (\frac{x^2}{(x+y)^2} - \frac{1}{y})y' = 0$,

143.* $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$,

144.* $(2xy\cos y + y\ln y + y\cos x) + (x - x^2y\sin y - y\,\mathrm{sh}\,y)y' = 0$,

145. $\frac{y\sin x - 1}{\cos x} + y' = 0$,

146. $(y + 2e^{2x}\mathrm{ch}^2\,x) + (\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x - 6y\,\mathrm{ch}^2\,x)y' = 0$,

147. $(2xy - x^2) + (x^2 - y^2)y' = 0$,

148. $2x - 2x^2e^{-y} + 2x^2y' = 0$,

149. $\cos x - e^{-x}\sin y + (e^{-x}\cos y)y' = 0$,

150. $(y\ln y + y\,\mathrm{sh}\,x) + (x + ye^y)y' = 0$,

151. $2 + 4ye^{xy} + (3 + 4xe^{xy})y' = 0$,

152. $\ln(y^2 + 1) + \frac{2y(x-1)}{y^2+1}y' = 0$,

153. $y + (ye^x - 1)y' = 0$,

154. $\frac{x+y}{y} + \frac{2x+3y^2}{2y}y' = 0$,

155. $2x - y\cos y + (x\sin y)y' = 0$,

156. $e^y + (xe^y - 2y)y' = 0$,

157. $y^2 + 1 + (xy + 1)y' = 0$,

158. $x^3 + y^4 + 8xy^3y' = 0$,

159. $e^{-y} + (xe^{-y} - 2ye^{-2y})y' = 0$,

160. $y\,\mathrm{tg}\,x + \cos x - y' = 0$,

161. $x(y^2 + 1) + y(1 - x^2)y' = 0$,

162. $xe^y + (x^2e^y + 2ye^{-y})y' = 0$,

163. $y^3 + 6xy + 3x^2y + (3x^2 + 3y^2)y' = 0$,

164. $y + \frac{1}{x^2+1} + (2x + \frac{1}{y}\,\mathrm{arctg}\,x)y' = 0$,

165. $(e^x\sin y - e^y\sin x) + (e^x\cos y + e^y\cos x)y' = 0$,

166. $(x\sin y + y\cos y) + (x\cos y - y\sin y)y' = 0$.

Határozzuk meg az alábbi egzakt differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az illető feladatban megadott kezdeti feltételnek.

167. $2x + \cos y - (x\sin y)y' = 0$; $\quad y(1) = 0$,

168. $3x^2 + 2y\,\mathrm{sh}\,x + (2\,\mathrm{ch}\,x)y' = 0$; $\quad y(0) = 2$,

169. $\mathrm{tg}\,y - \frac{y}{\cos^2 x} + (\frac{x}{\cos^2 y} - \mathrm{tg}\,x)y' = 0$; $\quad y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{3}$,

170. $y\,\mathrm{ch}\,x + (\mathrm{sh}\,x - 2y)y' = 0$; $\quad y(0) = 1$,

171. $2x\ln y + e^x y + (\frac{x^2}{y} + e^x)y' = 0;\qquad y(0) = 2,$

172. $3x^2y^2 - 2xy + (2x^3y - x^2)y' = 0;\qquad y(1) = 2,$

173. $y^2\sin x\cos x + y\cos x + (\sin x - y\cos^2 x)y' = 0;\qquad y(\frac{\pi}{2}) = -2,$

174. $2xy - y^2\sin x + (2y\cos x + x^2)y' = 0;\qquad y(0) = 2,$

175. $y^2\operatorname{ch} x + 2x\operatorname{ch} y + (2y\operatorname{sh} x + x^2\operatorname{sh} y)y' = 0;\qquad y(2) = 0,$

176. $\frac{1}{x} + y + (\frac{1}{y} + x)y' = 0;\qquad y(\frac{1}{2}) = 2.$

Izogonális és ortogonális trajektóriák

D 28.15 Legyen $f(x,y,c_1) = 0$ és $g(x,y,c_2) = 0$ két egyparameteres görbesereg egyenlete. Ha a második görbesereg mindegyik görbéje ugyanakkora ω irányított szögben metszi az első görbesereg valamennyi görbéjét – vagyis ha az első görbesereg bármely G_1 és a második görbesereg bármely G_2 görbéjére az irányított $(G_1, G_2)_{\angle} = \omega$ (ω állandó, $-\frac{\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2}$) – akkor azt mondjuk, hogy a második görbesereg görbéi az elsőnek **izogonális trajektóriái**. Speciálisan, ha $\omega = \frac{\pi}{2}$ (azaz a két görbesereg görbéi egymást derékszögben metszik), akkor az ilyen trajektóriákat **ortogonális trajektóriáknak** nevezzük.

M 28.16 Ha az $f(x,y,c) = 0$ görbesereg görbéit ω szögben metsző izogonális trajektóriák egyenletét keressük, akkor először a c paraméter kiküszöbölésével felírjuk az adott görbesereg $F(x,y,y') = 0$ differenciálegyenletét. Ezután az izogonális trajektóriák differenciálegyenletéhez úgy jutunk, hogy az y' helyére $\omega \ne \frac{\pi}{2}$ esetén (az $\alpha + \beta$ tangensére vonatkozó képlet szerint) az

$$\frac{y' + \operatorname{tg}\omega}{1 - y'\operatorname{tg}\omega}$$

kifejezést, $\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén pedig a $-\frac{1}{y'}$ kifejezést írjuk. Tehát az $F(x,y,y') = 0$ differenciálegyenletű görbesereg izogonális trajektóriáiból álló görbesereg differenciálegyenlete

$$F(x,y,\frac{y' + \operatorname{tg}\omega}{1 - y'\operatorname{tg}\omega}) = 0,\quad \text{ha } \omega \ne \frac{\pi}{2},$$

illetve

$$F(x,y,-\frac{1}{y'}) = 0,\quad \text{ha } \omega = \frac{\pi}{2}.$$

Ha a görbesereg egyenlete polárkoordinátásan $f(r,\phi,c) = 0$, és az ehhez tartozó differenciálegyenlet $F(r,\phi,r') = 0$ ($r' = \frac{dr}{d\phi}$ jelöléssel), akkor a trajektóriák differenciálegyenlete

$$F(r,\phi,r\frac{r' - r\operatorname{tg}\omega}{r + r'\operatorname{tg}\omega}) = 0,\quad \text{ha}\quad \omega \ne \frac{\pi}{2},$$

illetve

$$F(r,\phi,-\frac{r^2}{r'}) = 0,\quad \text{ha}\quad \omega = \frac{\pi}{2}.$$

E differenciálegyenletek megoldása szolgáltatja az adott görbesereg izogonális (speciálisan ortogonális) trajektóriáinak egyenletét.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyparaméteres görbeseregek egyes görbéit a megadott ω szögben metsző izogonális (illetve ortogonális) trajektóriák egyenletét (az egyenletekben előforduló a és c valós paraméterek, n pedig rögzített pozitív egész).

177.▷ $x^2 + y^2 - 2cx = 0$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, **178.**• $x^2 - y^2 = c$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$,

179. $x^2 + cy^2 = 1$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, **180.** $y = ax$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$,

181. $y = ax^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, **182.** $xy = c$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$,

183. $y = \sqrt{2x} + c$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, **184.** $y = cx^3$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$,

185. $y = cx^n$; $n \in N^+$, $\omega = \frac{\pi}{2}$, **186.** $x^2 - cy^2 = 1$; $\omega = \frac{\pi}{2}$,

187. $y = c \ln x$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, **188.** $y = c \,\mathrm{sh}\, x$; $\omega = \frac{\pi}{2}$,

189. $x^2 + y^2 = a^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, **190.*** $x^2 = c(c + 2y)$; $\omega = \frac{\pi}{2}$,

191.▷ $xy = c(x^2 + y^2)^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$,

Az alábbi feladatokban r és ϕ polárkoordinátákat jelölnek.

192.• $r^2 = c \cos 2\phi$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$,

193.▷ $r = c(1 + \cos\phi)$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$,

194.▷ $r = c \sin\phi$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{3}$, $\omega = \frac{\pi}{4}$, **195.** $r = \mathrm{tg}(\phi + c)$; $\omega = \frac{\pi}{2}$,

196. $r = c(1 + 2\cos\phi)$; $\omega = \frac{\pi}{2}$, **197.** $r = c\cos\phi$; $\omega = \frac{\phi}{2}$.

Elsőrendű differenciálegyenletek közelítő megoldása

D 28.17 (Szukcesszív approximáció)
Keressük az

(1) $$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek olyan közelítő megoldását, amely adott (ξ, η) értékpárra eleget tesz az

(2) $$y(\xi) = \eta$$

kezdeti feltételnek. Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor az f függvény az xy-sík valamely, a (ξ, η) pontot tartalmazó korlátos zárt ponthalmazán folytonos, és a második változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek. Ilyen feltételek mellett az (1) egyenletnek egyetlen olyan megoldása van, amelyik eleget tesz a (2) feltételnek. Kimutatható, hogy az (1) egyenlet és a (2) kezdeti feltétel együtt ekvivalens az

$$y = \eta + \int_{\xi}^{x} f(t, y)dt$$

egyenlettel.
Ennek alapján képezzük az egyváltozós valós $[y_n; n \in N]$ függvénysorozatot a következőképpen: Legyen

$$y_0(x) = \eta$$

és

$$y_n(x) = \eta + \int_\xi^x f(t, y_{n-1})dt; \quad n > 0.$$

Az y_n függvények mindegyike eleget tesz a (2) kezdeti feltételnek. Bebizonyítható, hogy az említett feltételek teljesülése esetén az így definiált függvénysorozat a ξ valamely teljes környezetében konvergens, és a

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

határfüggvény az (1) differenciálegyenletnek az a (pontos) megoldása, amely a (2) kezdeti feltételnek is eleget tesz.
Konkrét feladatok megoldásánál nem mindig lehetséges a $\lim_{n\to\infty} y_n(x)$ határfüggvény magállapítása. Ilyenkor úgy járunk el, hogy az előírt pontosság szerinti n-ekhez tartozó y_n függvények valamelyikét (rendszerint a szóban forgó n-ek közül a legkisebbhez tartozót) fogadjuk el közelítő megoldásként.

D 28.18 (Euler-módszer) Keressük az elsőrendű explicit

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletnek azt a közelítő megoldását, amely eleget tesz valamely $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételnek. A módszer alapgondolata az, hogy egy-egy rövid szakaszon a megoldást ábrázoló integrálgörbét valamelyik pontjához tartozó érintőjével helyettesítjük. Rögzítünk egy $h \neq 0$ konstans értéket, és felvesszük az x-tengelyen az $[x_k; k \in \mathbf{N}]$ pontsorozatot úgy, hogy

$$x_k = x_0 + kh; \quad k \in \mathbf{N}.$$

Az x_k és x_{k+1} $(k \in \mathbf{N})$ pontok által határolt szakaszon az (x_k, y_k) ponton átmenő integrálgörbét helyettesítjük az (x_k, y_k) ponton átmenő érintőjével, ahol y_k jelöli az x_{k-1} és x_k pontok által határolt szakaszhoz az előbbi értelemben hozzárendelt érintőegyenes x_k abszcisszájú pontjának ordinátáját. Egyszerű számítással igazolható, hogy

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}); \quad k \in \mathbf{N}^+,$$

figyelembe véve, hogy $y'(x_{k-1}) = f(x_{k-1}, y_{k-1})$. Az eljárás adatait célszerű táblázatos formában is felírni (a táblázatban $f(x_k, y_k)$ helyett röviden csak f_k-t írtunk):

0	1	2	...	k	...
x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	...	$x_k = x_0 + kh$	...
y_0	$y_1 = y_0 + hf_0$	$y_2 = y_1 + hf_1$	...	$y_k = y_{k-1} + hf_{k-1}$	...
hf_0	hf_1	hf_2	...	hf_k	...

D 28.19 (Runge – Kutta-módszer) Keressük ismét az elsőrendű explicit

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet közelítő megoldását az

$$y(x_0) = y_0$$

kezdeti feltétellel. Képezzük az $[x_k; k \in \mathbf{N}]$ sorozatot (mint az Euler-módszernél) úgy, hogy

$$x_k = x_0 + kh; \quad h \neq 0 \text{ konstans}, \; k \in \mathbf{N},$$

az y_k képzésekor azonban az $f(x, y(x))$-nek nem az x_{k-1} helyen, hanem az (x_{k-1}, x_k) intervallum felezőpontjában felvett értékét vesszük figyelembe. Ennél a módszernél a közelítő megoldást ábrázoló töröttvonal k-adik csúcsának koordinátái tehát:

$$x_k = x_0 + kh,$$

$$y_k = y_{k-1} + hf(a_k, b_k),$$

ahol

$$a_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}h; \quad b_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k \in \mathbf{N}^+.$$

Feladatok

Szukcesszív approximáció segítségével közelítőleg határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az illető feladatban megadott kezdeti feltételeknek. (A közelítő sorozat elemeit a megadott n indexig bezárólag adjuk meg.)

198.▷ $y' = x + y; \quad y(0) = 1, \quad n = 4,$

199.• $y' = y^2 - (x+1)y + 1; \quad y(0) = 1, \quad n = 2,$

200. $y' = x - y^2; \quad y(0) = 0, \quad n = 3,$

201. $y' = x^2 - y; \quad y(0) = 0, \quad n = 4,$

202. $y' = x^2 + y^2; \quad y(0) = 0, \quad n = 3.$

Határozzuk meg Euler-módszerrel az alábbi differenciálegyenleteknek azt a közelítő megoldását, amely az illető feladatban megadott kezdeti feltételt kielégíti (mindegyik feladatban válasszuk a h értékét először 0.1-nek, majd −0.1-nek).

203.[k] $y' = x + y; \quad y(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

204.[k] $y' = y - x^2; \quad y(0) = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3,$

205.[k] $y' = 1 + y^2; \quad y(1) = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3,$

206.[k] $y' = 1 + xy; \quad y(1) = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3,$

207.[k] $y' = x^2 + y^2; \quad y(1) = 1, \quad k = 0, 1, 2, 3,$

Runge – Kutta-módszer segítségével határozzuk meg (közelítőleg) az alábbi differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, amely eleget tesz az illető feladatban megadott kezdeti feltételnek (válasszuk h-t 0.2-nek, illetve −0.2-nek, k pedig legyen rendre $0, 1, 2, 3$).

208.[k] $y' = y; \quad y(0) = 1,$

209.[k] $y' = y + x; \quad y(0) = 1.$

Iránymező

D 28.20 Ha az egyváltozós y függvény az x_0 helyen differenciálható, akkor grafikonjának x_0 abszcisszájú pontjában van érintője, és ennek az érintőnek m_0 iránytangensét a függvénynek ebben a pontban vett differenciálhányadosa adja meg: $m_0 = y'(x_0)$. Tehát az $y = y(x)$ egyenletű görbe az $y' = f(x, y)$ elsőrendű explicit differenciálegyenletnek a $P_0(x_0, y_0)$ ponton átmenő integrálgörbéje, akkor a differenciálegyenlet alapján $m_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Rajzoljuk meg az (x_0, y_0) ponton átmenő, m_0 iránytangensű félegyenesnek a pont valamely teljes környezetébe eső darabját. Ily módon az (x_0, y_0) ponthoz egy irányt rendelünk. Terjesszük ki ezt a hozzárendelést az $y' = f(x, y)$ függvény egész értelmezési tartományára; így a differenciálegyenlet az f értelmezési tartományának minden pontjához hozzárendel egy irányt. Az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet által az f értelmezési tartományának pontjaihoz ily módon hozzárendelt irányok összességét **iránymezőnek** nevezzük. Ha az iránymezőt elég sűrűn kitöltjük, akkor az integrálgörbéket kielégítő pontossággal berajzolhatjuk. Az iránymező megrajzolását megkönnyíti, ha ismerjük az $f(x, y) = c$ (c : konstans) egyenletű görbéket; ezeket a differenciálegyenlet **izoklín vonalainak** nevezzük.

Feladatok

Írjuk fel az alábbi elsőrendű differenciálegyenletek izoklín vonalainak egyenletét, és segítségükkel vázoljuk a differenciálegyenleteknek azokat az integrálgörbéit, amelyek átmennek az adott P_0, illetve Q_0 ponton.

210. $y' = -2x$; $P_0(0,2)$, $Q_0(1,0)$, **211.** $y' = -y$; $P_0(0,1)$, $Q_0(1,-1)$,

212. $y' = xy$; $P_0(0,1)$, $Q_0(2,-1)$, **213.** $y' = 1 + y^2$; $P_0(0,0)$, $Q_0(\frac{\pi}{2},1)$,

214. $y' = (x+y)^2$; $P_0(0,0)$, $Q_0(1,-1)$, **215.** $y' = -\frac{x}{y}$; $P_0(0,1)$, $Q_0(2,0)$,

216. $y' = x^2 - 1$; $P_0(0,0)$, $Q_0(-2,0)$,

217. $y' = y + x$; $P_0(0,0)$, $Q_0(0,-3)$,

218. $y' = y - x$; $P_0(0,0)$, $Q_0(0,2)$, **219.** $y' = \frac{2y}{x}$; $P_0(1,1)$, $Q_0(2,-1)$.

29. fejezet

Lineáris közönséges differenciálegyenletek

Homogén lineáris differenciálegyenletek

D 29.1 A homogén lineáris n-edrendű közönséges differenciálegyenlet általános alakja

$$(1) \qquad a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0,$$

ahol $a_0(x)$ nem az azonosan nulla függvény; az $a_0, a_1, \ldots a_n$ valós függvényeket a differenciálegyenlet **együtthatófüggvényeinek** nevezzük. Ha az együtthatófüggvények mindegyike konstansfüggvény, akkor az (1) differenciálegyenletet **állandó együtthatós** differenciálegyenletnek nevezzük.

M 29.2 Nyilvánvaló, hogy minden homogén lineáris differenciálegyenletet kielégít az azonosan nulla függvény; ezt a függvényt az (1) **triviális megoldásának** nevezzük.
Az általános megoldásról szóló tétel megfogalmazásához szükségesek az alábbi fogalmak.

D 29.3 Valamely I intervallumon értelmezett komplex (vagy valós) értékű $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények rendszerét az I intervallumon **lineárisan függetlennek** nevezzük, ha a

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_r f_r(x) = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_r \in \mathbf{C})$$

egyenlőség az I intervallum minden x elemére csak úgy állhat fenn, hogy

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0.$$

Az ellenkező esetben azt mondjuk, hogy ezek a függvények az I intervallumon **lineárisan függő** rendszert alkotnak.

M 29.4 Ha az $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények valamennyien valós értékűek, akkor a lineárisan függetlenség, illetve függőség vizsgálatakor valós $c_1, c_2, \ldots, c_r$-ekre szorítkozhatunk.
A továbbiakban, ha csak azt mondjuk, hogy az illető függvények lineárisan független, illetve lineárisan függő rendszert alkotnak, akkor az intervallumon mindig a $(-\infty, \infty)$ intervallumot értjük.

D 29.5 Valamely I intervallumon legalább $(r-1)$-szer differenciálható (valós vagy) komplex értékű $f_1, f_2, \ldots, f_r$ függvények **Wronski-determinánsán** a

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_r(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_r'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(r-1)}(x) & f_2^{(r-1)}(x) & \ldots & f_r^{(r-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinánst értjük.

T 29.6 Ha az I intervallumon legalább $(r-1)$-szer differenciálható $f_1, f_2, \dots, f_r$ függvények Wronski-determinánsa az I intervallumnak legalább egy pontjában nem zérus, akkor ezek a függvények az I intervallumon lineárisan független rendszert alkotnak.

D 29.7 Függvények valamely rendszeréről akkor mondjuk, hogy az egy adott n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenletnek alaprendszere egy J intervallumon, ha a rendszer
a) a J-n értelmezett n számú függvényből áll,
b) lineárisan független a J intervallumon,
c) minden eleme a differenciálegyenletnek megoldása a J-n.

T 29.8 Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_n$ valamely $[a,b]$ intervallumon folytonos valós függvények. Az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek az (a,b) intervallumon akkor és csak akkor alaprendszere a partikuláris megoldások valamely $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ rendszere, ha ennek a függvényrendszernek a Wronski-determinánsa az (a,b) intervallumon sehol sem 0.

T 29.9 Legyenek $p_1, p_2, \dots, p_n$ az $[a,b]$ intervallumon folytonos valós függvények, és legyen $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek alaprendszere az (a,b) intervallumon. Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása az (a,b) intervallumon

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x)$$

alakban írható fel, ahol $c_1, c_2, \dots, c_n$ tetszőleges valós számokat jelölnek.

D 29.10 Az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{2}$$

differenciálegyenlet **karakterisztikus egyenletén** az n-edfokú

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \dots + a_{n-1}t + a_n = 0 \tag{3}$$

algebrai egyenletet értjük. A karakterisztikus egyenlet bal oldalát a differenciálegyenlet **karakterisztikus polinomjának** nevezzük.

M 29.11 A (2) egyenlethez – a (3) karakterisztikus egyenlet megoldása után – exponenciális, trigonometrikus és polinomfüggvényekből képezhetünk alaprendszert, a következő szabály szerint:
1. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres valós gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$e^{t_0x}$$

függvényt vesszük fel.
2. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0$ $(v_0 \neq 0)$, akkor az alaprendszerbe az

$$e^{u_0x}\cos v_0x \quad \text{és} \quad e^{u_0x}\sin v_0x$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).
3. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek **többszörös valós gyöke**, mégpedig m_0-szoros, akkor az alaprendszerbe az

$$x^se^{t_0} \quad (s = 0, 1, \dots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel.

4. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek többszörös nem valós gyöke, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0$ $(v_0 \neq 0)$ és t_0 a karakterisztikus egyenletnek m_0-szoros gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^s e^{t_0} \cos v_0 x \quad \text{és} \quad x^s e^{t_0 x} \sin v_0 x \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).

Az összes t_0 gyökkel így képzett függvények együtt meg is adják a (2) differenciálegyenletnek egy alaprendszerét.

Feladatok

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi feladatokban az $\{f_1, f_2\}$, illetve $\{f_1, f_2, f_3\}$ függvényrendszer a megadott J intervallumon – illetve, ha ilyen J nincs megadva, akkor a $(-\infty, \infty)$ intervallumon – lineárisan független-e. Ha független, akkor azt is vizsgáljuk meg, vannak-e J-nek olyan részintervallumai, ahol a függvényrendszer lineárisan függő.

1.	$\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$,	**2.**	$\{\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\}$
3.	$\{\ln x, x\}$; $J = (0, \infty)$,	**4.**	$\{x, x^2, x^3\}$,
5.	$\{2, \arcsin x, \arccos x\}$; $J = [-1, 1]$,	**6.**	$\{x + 1, x + 2, x + 3\}$,
7.	$\{\ln x, \ln x^2\}$; $J = (0, \infty)$,	**8.**	$\{2, \cos^2 x, \sin^2 x\}$,
9.	$\{4, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x\}$,	**10.**	$\{x^2, x\lvert x\rvert\}$,

11. $f_1(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x - 1, & \text{ha } x \leq 0, \\ 0, & \text{ha } x > 0, \end{cases}$ $\quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0, \\ \operatorname{ch} x - 1, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi feladatokban megadott y_1, y_2, illetve az y_1, y_2, y_3 függvények mely halmazon képezik az ugyanott szereplő differenciálegyenletek alaprendszerét. Az illető halmazon írjuk fel a differenciálegyenlet általános megoldását.

12. $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$; $\quad y_1 = e^x$, $\quad y_2 = -(x + 1)$,

13. $y'' \sin^2 x + y' \sin x \cos x - y = 0$; $\quad y_1 = \operatorname{ctg} x$, $\quad y_2 = \frac{1}{\sin x}$,

14. $y'' \sin^2 2x + y' \sin 4x - 4y = 0$; $\quad y_1 = \operatorname{tg} x$, $\quad y_2 = \operatorname{ctg} x$,

15. $xy'' - 2y' = 0$; $\quad y_1 = x^3$, $\quad y_2 = 1$,

16. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $\quad y_1 = x$, $\quad y_2 = \ln x$,

17. $(x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$; $\quad y_1 = x$, $\quad y_2 = x^2 - 1$,

18. $y'' + y' \operatorname{cth} x - y\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 0$; $\quad y_1 = \operatorname{cth} x$, $\quad y_2 = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$,

19. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + (2\operatorname{ctg}^2 x)y = 0$; $\quad y = \sin x$, $\quad y_2 = \sin^2 x$,

20. $y'' \sin^2 x - y' \sin x \cos x + y = 0$; $\quad y_1 = \sin x$, $\quad y_2 = \sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

21. $x^2y'' - 6y = 0$; $\quad y_1 = \frac{1}{x^2}$, $\quad y_2 = x^3$,

22. $xy''' + 2y'' = 0$; $\quad y_1 = 1$, $\quad y_2 = x$, $\quad y_3 = \ln x$,

23. $xy''' - y'' + xy' - y = 0$; $\quad y_1 = x$, $\quad y_2 = \cos x$, $\quad y_3 = \sin x$,

24. $(3-2x)y''' + (6x-7)y'' - 4xy' + 4y = 0;\quad y_1 = e^x,\quad y_2 = e^{2x},\quad y_3 = x,$

25. $xy''' - y'' - xy' + y = 0;\quad y_1 = x,\quad y_2 = \operatorname{ch} x,\quad y_3 = \operatorname{sh} x,$

26. $y''' + y'' = 0;\quad y_1 = 1,\quad y_2 = x,\quad y_3 = e^{-x},$

27. $(x^2-2x+2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0;\quad y_1 = x,\quad y_2 = x^2,\quad y_3 = e^x,$

28. $y''' + \frac{4x-3}{x(2x-1)}y'' - \frac{2}{x(2x-1)}y' + \frac{2}{x^2(2x-1)}y = 0;\ y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{x},\ y_3 = x\ln|x| + 1.$

Határozzuk meg az alábbi állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános és (ahol kezdeti feltételek vannak megadva, az azokat kielégítő) partikuláris megoldását.

29.• $y'' - 5y' + 6y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 1,$

30.▷ $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 3,\quad y''(0) = 4,$

31.▷ $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 3,\quad y''(0) = 5,$

32.▷ $y'' - 6y' + 13y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = -1,$

33.▷ $y^{(4)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0,$ **34.** $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0,$

35. $y'' - y' - 2y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 5,$

36. $y'' - 9y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 6,$

37. $y'' + 2y' - 3y = 0,$

38. $y'' - 4y = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 4,$

39. $y''' + y'' - 2y' = 0,$ **40.** $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0,$

41. $y'' + 4y' + 4y = 0,$

42. $y'' - 6y' + 9y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2,$

43. $4y'' - 4y' + y = 0,$ **44.** $8y''' + 12y'' + 6y' + y = 0,$

45. $4y'' + 12y' + 9y = 0;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = -2,$

46. $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0,$

47. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0;\quad 4y(0) = 0,\quad y'(0) = 4,\quad y''(0) = 4,$

48. $y''' - 2y'' = 0;\quad y(1) = e^2 + 1,\quad y'(1) = 2e^2 - 1,\quad y''(1) = 4e^2,$

49. $4y''' - 4y'' + y' = 0,$ **50.** $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0,$

51. $y'' - 2y' + 5y = 0,$

52. $y'' + 4y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2,$

53. $y'' - 4y' + 5y = 0,$

54. $y'' - 2y' + 2y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0,$

55. $y'' + 4y' + 13y = 0,$ **56.** $y''' - y'' + y' - y = 0,$

57. $y''' - 2y'' + 2y' = 0,$

58. $y^{(4)} + 9y'' = 0;\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 0,\quad y''(0) = 9,\quad y'''(0) = 27,$

59. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 8y''' - 16y'' + 16y' - 32y = 0,$

60.▷ $y'' - 4y + 2 = 0;\quad y(0) = \frac{1}{2},\quad y'(0) = 4,$

61.▷ $y'' - y - 1 = 0;\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,$

62. $y'' - 4y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 2,$

63. $y'' - y = 0;\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 3,$

64. $y'' + 4y = 0;\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 2,$

65. $y'' + 9y - 18 = 0;\quad y(\frac{\pi}{6}) = 0,\quad y'(\frac{\pi}{6}) = -3.$

Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

D 29.12 Az n-edrendű inhomogén lineáris

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenleten az

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0$$

differenciálegyenletet értjük.

M 29.13 Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását úgy határozzuk meg, hogy előbb a differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet általános megoldását számítjuk ki, majd az alábbi tételek valamelyikét alkalmazzuk.

T 29.14 Ha $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek alaprendszere valamely I intervallumon, akkor az

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletnek az I intervallumon az általános megoldása

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \ldots + c_n(x)y_n(x)$$

alakú, ahol a $c_1, c_2, \ldots, c_n$ függvények deriváltjai az

$$y_1(x)c_1'(x) + y_2(x)c_2'(x) + \ldots + y_n(x)c_n'(x) = 0$$
$$y_1'(x)c_1'(x) + y_2'(x)c_2'(x) + \ldots + y_n'(x)c_n'(x) = 0$$
$$\ldots$$
$$y_1^{(n-1)}(x)c_1'(x) + y_2^{(n-1)}(x)c_2'(x) + \ldots + y_n^{(n-1)}(x)c_n'(x) = f(x)$$

egyenletrendszerből számíthatók.

M 29.15 Figyeljük meg, hogy ezen egyenletrendszer mátrixának determinánsa nem más, mint az $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ függvényrendszer Wronsky-determinánsa.

T 29.16 (Speciálisan $n = 2$-re) Ha $\{y_1, y_2\}$ az

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek alaprendszere, akkor az

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

alakú; a c_1 és c_2 függvények a

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx, \qquad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx$$

képletekkel számíthatók ki, ahol

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},\quad W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},\quad W_2(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

T 29.17 (Speciálisan $n=3$-ra) Ha $\{y_1, y_2, y_3\}$ az

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$$

differenciálegyenletnek alaprendszere, akkor az

$$y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = f(x)$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

alakú; a c_1, c_2, c_3 függvények a

$$c_1(x)=\int\frac{W_1(x)}{W(x)}dx,\quad c_2(x)=\int\frac{W_2(x)}{W(x)}dx,\quad c_3(x)=\int\frac{W_3(x)}{W(x)}dx$$

képletekkel számíthatók ki, ahol

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix},\quad W_1(x)=\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & y_2'(x) & y_3'(x) \\ f(x) & y_2''(x) & y_3''(x) \end{vmatrix},$$

$$W_2(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 & y_3(x) \\ y_1'(x) & 0 & y_3'(x) \\ y_1''(x) & f(x) & y_3''(x) \end{vmatrix},\quad W_3(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & 0 \\ y_1'(x) & y_2'(x) & 0 \\ y_1''(x) & y_2''(x) & f(x) \end{vmatrix}.$$

T 29.18 Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása bármely J intervallumon előállítható úgy, hogy az egyenlet J-n érvényes egyik – tetszőlegesen választott – partikuláris megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet J-n érvényes általános megoldását.

M 29.19A gyakorlat számára legfontosabb alakú állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldása könnyen megkapható az alábbi tételek alapján (amelyekben az inhomogén egyenlet karakterisztikus egyenletén a hozzátartozó homogén egyenlet karakterisztikus egyenletét értjük, és ha egy m szám a karakterisztikus egyenletnek nem gyöke, akkor 0-szoros gyöknek tekintjük):

T 29.20 Ha az állandó együtthatós

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = e^{mx}(a_0 + a_1x + \ldots + a_rx^r);\quad a_r \neq 0$$

differenciálegyenletnek az m szám k-szoros gyöke, akkor a differenciálegyenletnek van

$$y_1 = x^ke^{mx}(A_0 + A_1x + \ldots + A_rx^r)$$

alakú partikuláris megoldása.

T 29.21 Ha az állandó együtthatós

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = a\operatorname{ch} mx + b\operatorname{sh} mx,\quad (m \neq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0)$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az m és a $-m$ szám is k-szoros gyöke, akkor a differenciálegyenletnek van

$$y_1 = x^k(A\operatorname{ch} mx + B\operatorname{sh} mx)$$

alakú partikuláris megoldása.

T 29.22 Ha az állandó együtthatós

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \ldots + p_ny = a\cos mx + b\sin mx, \ (m \neq 0, \ a^2 + b^2 \neq 0)$$

differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének az mi képzetes szám k-szoros gyöke, akkor a differenciálegyenletnek van

$$y_1 = x^k(A\cos mx + B\sin mx)$$

alakú partikuláris megoldása.

T 29.23 Ha egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános alakjának jobb oldalán két vagy több függvény összege áll, akkor az összeg minden tagjával külön-külön képezett inhomogén egyenletek egy-egy partikuláris megoldását (jelöljük ezeket $y_1, y_2, \ldots, y_r$-rel, $r \in \mathbf{N}^+$) meghatározva és ezek összegét a homogén egyenlet általános megoldásához adva kapjuk meg az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = Y + y_1 + y_2 + \ldots + y_r.$$

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását a hozzájuk tartozó homogén egyenlet $\{y_1, y_2 \ldots, y_n\}$ alaprendszerének ismeretében ($n = 2$ vagy $n = 3$).

66.* $xy'' - (x+1)y' + y = x^2e^x$; $\quad y_1 = e^x, \quad y_2 = -(x+1)$,

67. $y''\sin^2 x + y'\sin x\cos x - y = x\sin^2 x$; $\quad y_1 = \operatorname{ctg} x, \quad y_2 = \frac{1}{\sin x}$,

68. $y''\sin^2 2x + y'\sin 4x - 4y = -8\sin^3 2x$; $\quad y_1 = \operatorname{tg} x, \quad y_2 = \operatorname{ctg} x$,

69. $xy'' - 2y' = x^3$; $\quad y_1 = x^3, \quad y_2 = 1$,

70. $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = (x\ln x - x)^2$; $\quad y_1 = x, \quad y_2 = \ln x$,

71. $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = x(x^2+1)^2$; $\quad y_1 = x, \quad y_2 = x^2 - 1$,

72. $xy'' + (x-1)y' - y = x^2$; $\quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = x - 1$,

73. $xy'' + 2y' + xy = 1$; $\quad y_1 = \frac{\sin x}{x}, \quad y_2 = -\frac{\cos x}{x}$,

74. $xy'' - (x+1)y' + y = x^2$; $\quad y_1 = x + 1, \quad y_2 = e^x$,

75. $y'' + y'\operatorname{cth} x - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}y = \operatorname{sh} x$; $\quad y_1 = \operatorname{cth} x, \quad y_2 = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$,

76. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x)y' + (2\operatorname{ctg}^2 x)y = \sin x$; $\quad y_1 = \sin x, \quad y_2 = \sin^2 x$,

77. $y''\sin^2 x - y'\sin x\cos x + y = \sin x$; $\quad y_1 = \sin x, \quad y_2 = \sin x \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

78. $(x\cos x - \sin x)y'' + (x\sin x)y' - (\sin x)y = -x$; $\quad y_1 = x, \quad y_2 = \sin x$,

79. $xy'' - \frac{6}{x}y = 6x^3$; $\quad y_1 = \frac{1}{x^2}, \quad y_2 = x^3$,

80. $x^2y'' - 2y = 4x^3$; $\quad y_1 = \frac{1}{x}, \quad y_2 = x^2$,

81.* $xy''' - y'' + xy' - y = 2x^3$; $\quad y_1 = x, \quad y_2 = \cos x, \quad y_3 = \sin x$,

82. $xy''' + 2y'' = \frac{1}{x}$; $\quad y_1 = 1, \quad y_2 = x, \quad y_3 = \ln x$,

83. $xy''' - y'' - xy' + y = x^2$; $\quad y_1 = x, \quad y_2 = \operatorname{ch} x, \quad y_3 = \operatorname{sh} x$,

84. $(3-2x)y''' + (6x-7)y'' - 4xy' + 4y = -(2x-3)^3$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = x$,

85. $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x$; $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$, $y_3 = x^2e^{-x}$.

Határozzuk meg az alábbi állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenletek általános megoldását, és ahol kezdeti feltételek vannak megadva, az azokat kielégítő partikuláris megoldást is. (A feladatok megoldásában a következő jelöléseket használjuk:
Y: a homogén differenciálegyenlet általános megoldása;
y_1: az inhomogén differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása;
y: az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása;
y_p: az inhomogén differenciálegyenletnek az (esetleg) adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldása.)

86.• $y'' + y' - 6y = x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -\frac{1}{9}$,

87. $y'' + 6y' + 34y = 17x^2 - 62x + 23$,

88.▹ $y'' + 2y' + y = \sin x$; $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = 0$,

89. $y^{(4)} - 4y'' + 3y = 3e^{\frac{x}{2}}$,

90. $y'' - y = e^x(2x+3)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$,

91. $y'' + 3y' + 2y = 4$,

92. $y'' - 2y' + 5y = 3x^2e^x$; $y(0) = \frac{5}{8}$, $y'(0) = -\frac{11}{8}$,

93. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x}$,

94. $y'' + y = -4\cos x$; $y(\frac{\pi}{2}) = 2 - \pi$, $y'(\frac{\pi}{2}) = -3$,

95. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = 8e^x(2x-1)$,

96. $y'' + 4y' + 13y = e^{2x}(25x+8)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$,

97. $y'' + y' - 12y = e^{2x}(-12x^2 + 2x + 1)$,

98. $y'' + y' - 20y = -18xe^{-5x}$,

99. $y'' - 4y' + 3y = -15\,\mathrm{ch}\,2x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$,

100. $y'' + y' - 2y = 7\cos x - \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$,

101. $y'' - 4y = 8\,\mathrm{ch}\,2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$,

102. $y'' + 9y = 18\cos 3x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$,

103. $y'' - 4y' + 4y = 67\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{2} - 58\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{2}$,

104. $y'' + 4y = 5\sin 3x - 10\cos 3x$; $y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$,

105. $y'' + 6y' + 9y = 50\,\mathrm{ch}\,2x + 25\,\mathrm{sh}\,2x$,

106.▹ $y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}\cos x$.

A **T29.23.** felhasználásával oldjuk meg az alábbi feladatokat:

107.• $6y'' - 5y' + y = 15xe^{2x} - 2\cos x$,

108.▹ $y'' - 2y' + y = x^2 + 12\sin 2x$; $y(0) = 9$, $y'(0) = 3$,

109. $y'' + 2y' - 3y = 8e^{5x} + 15\,\mathrm{ch}\,2x$,

110. $y'' - 3y' - 4y = -6e^{2x} + 17\sin x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$,

111. $y'' + 10y' + 25y = 4e^{-5x} + 578\cos 3x$,

112. $y^{(4)} + 4y''' + 3y'' - 2y' - 6y = 150\,\mathrm{ch}\,2x - 6x^2$,

113. $y'' + y = x^3 + 20e^{3x}; \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2,$
114. $y'' + 2y' = 5\cos x - 8e^{2x},$
115. $y''' + y'' - y' - y = 4\cos x - 2x^2.$

Euler-féle differenciálegyenletek

D 29.24 Euler-féle n-edrendű differenciálegyenletnek az olyan

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} y = f(x) \quad (a_0 \neq 0)$$

alakú differenciálegyenleteket nevezzük, amelyekben $a_0, a_1, \ldots, a_n$ adott konstansok, f pedig adott egyváltozós valós függvény. Ha f azonosan 0 függvény, akkor homogén, ha f nem azonosan 0 függvény, akkor inhomogén Euler-féle differenciálegyenletről beszélünk.

M 29.25 Az Euler-féle differenciálegyenletnek $x = 0$ esetén nincs értelme. Ha a homogén Euler-féle differenciálegyenletben csak pozitív x-ekre szorítkozva $x = e^z$, csak negatív x-ekre szorítkozva pedig $x = -e^z$ helyettesítést végzünk, akkor a z-től függő y függvényre (az x előjelétől függetlenül ugyanaz az) állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet adódik. Ennek karakterisztikus egyenletét az eredeti (homogén) Euler-féle differenciálegyenlet karakterisztikus egyenletének nevezzük.
Megjegyezzük, hogy – y-nak a z változó szerinti deriváltját $\dot{y}$-tal jelölve – az előző helyettesítéseknél $y' = \dot{y}e^{-z}\operatorname{sgn} x$, $\quad y'' = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2z}$, $\quad y''' = (\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y})e^{-3z}\operatorname{sgn} x$ adódik.)
Ezeknek megfelelően egy (1) alakú homogén Euler-féle differenciálegyenletből az $n = 2$ esetben az

$$(2) \qquad a_0\ddot{y} + (a_1 - a_0)\dot{y} + a_2 y = 0,$$

az $n = 3$ esetben pedig az

$$(3) \qquad a_0\dddot{y} + (a_1 - 3a_0)\ddot{y} + (a_2 - a_1 + 2a_1)\dot{y} + a_3 y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk, amelyben y és deriváltjai a z függvényei.
Egyszerű számolással igazolható, hogy a karakterisztikus egyenlet gyökeinek ismeretében a szóban forgó homogén Euler-féle differenciálegyenletnek a $(0, \infty)$ intervallumon érvényes egyik alaprendszerét a következőképpen írhatjuk fel.
1. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek **egyszeres valós** gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{t_0}$$

függvényt vesszük fel.
2. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek **egyszeres nemvalós gyöke**, mégpedig $t_0 = u_0 + iv_0$, ahol $v_0 \neq 0$, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{u_0}\cos(v_0 \ln x) \quad \text{és} \quad x^{u_0}\sin(v_0 \ln x)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már a t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).
3. Ha t_0 a karakterisztikus egyenletnek **többszörös valós gyöke**, mégpedig m_0-szoros, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{t_0}\ln^s x \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel.

4. Ha $t_0 = u_0 + iv_0$ ($v_0 \neq 0$) a karakterisztikus egyenletnek **többszörös nemvalós**, mégpedig m_0-szoros gyöke, akkor az alaprendszerbe az

$$x^{u_0} \ln^s x \cos(v_0 \ln x) \quad \text{és} \quad x^{u_0} \ln^s x \sin(v_0 \ln x) \quad (s = 0, 1, \ldots, m_0 - 1)$$

függvényeket vesszük fel (ezzel már t_0 konjugáltját is figyelembe vettük).
Az előzőekből az is nyilvánvaló, hogy a homogén Euler-féle differenciálegyenlethez a $(-\infty, 0)$ intervallumon úgy adhatunk meg alaprendszert a karakterisztikus egyenlet gyökeivel, hogy az előző 1., 2., 3. és 4. esetnél leírtakat x helyett $(-x)$-szel vesszük figyelembe.

M 29.26 Inhomogén Euler-féle differenciálegyenletet többnyire úgy oldunk meg, hogy először a hozzá tartozó homogén egyenlet általános megoldását határozzuk meg, azután a konstansok variálásának módszerét alkalmazzuk.
Ha egy inhomogén Euler-féle differenciálegyenlet

$$a_0 y^{(n)} + \frac{a_1}{x} y^{(n-1)} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} = bx^r \ (b \neq 0)$$

alakú, akkor a megoldáshoz azt is felhasználhatjuk, hogy az ilyen differenciálegyenletnek többnyire van $y_1 = Bx^{r+n}$ alakú megoldása.
Bizonyos esetekben úgy is eljuthatunk egy inhomogén Euler-féle differenciálegyenlet megoldásához, hogy az $x = e^z$, illetve $x = e^{-z}$ helyettesítést az eredeti inhomogén differenciálegyenletre alkalmazzuk, az így adódó állandó együtthatós inhomogén differenciálegyenlet általános megoldásába az eredeti helyettesítéseknek megfelelő $z = \ln x$, illetve $z = \ln(-x)$ képletet visszahelyettesítjük.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi Euler-féle differenciálegyenletek általános megoldását a $(0, \infty)$ intervallumon, és ahol kezdeti feltételek vannak megadva, az ezeket kielégítő partikuláris megoldást is:

116.• $y'' - \frac{3}{x} y' + 20 \frac{y}{x^2} = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0,$

117.▷ $y'' - \frac{3}{x} y' - 21 \frac{y}{x^2} = -8x^3; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 3,$

118.▷ $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x^3; \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = 3,$

119. $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = 0,$

120. $y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{5}{x^2} y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$

121. $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 12x^{-2},$

122. $y''' + \frac{2}{x} y'' + \frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x^3} y = x^{-4},$

123. $y''' + \frac{3}{x} y'' - \frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x^3} y = 11,$

124. $3y''' + \frac{2}{x} y'' + \frac{1}{x^2} y' - \frac{1}{x^3} y = \frac{8}{x^4},$

125. $4y'' - \frac{32}{x} y' + \frac{81}{x^2} y = 0; \quad y(e) = e^{\frac{9}{2}}, \quad y'(e) = \frac{1}{2} e^{\frac{7}{2}},$

126. $y'' + \frac{13}{x} y' + \frac{20}{x^2} y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 6,$

127. $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{25}{x^2} y = 0; \quad y(e^{\frac{\pi}{10}}) = 1, \quad y'(e^{\frac{\pi}{10}}) = -10e^{-\frac{\pi}{10}},$

128. $y'' - \frac{7}{x} y' + \frac{17}{x^2} y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2,$

129. $y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2,$

130. $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = \frac{4}{x^2} \cos 2 \ln x,$

131. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = x^2 - 1,$

132. $y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{4}{x^2} y = x \ln x,$

133. $y'' + \frac{3}{x} y' + \frac{1}{x^2} y = x^2,$

134. $y''' + \frac{1}{x} y'' + \frac{8}{x^2} y' - \frac{18}{x^3} y = 0,$

135. $y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{7}{x^2} y' - \frac{8}{x^3} y = 0; \quad y(e) = e^2, \quad y'(e) = e, \quad y''(e) = 3.$

Laplace-transzformáció alkalmazása

T 29.27 Az $x = 0$ helyen legalább n-szer differenciálható y függvény n-edik deriváltjának Laplace-transzformáltja a következőképpen fejezhető ki:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = p^n Y - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} y_i, \tag{1}$$

ahol $Y = \mathcal{L}\{y\}$ és $y_i = y^{(i)}(0)$. Speciálisan, $\mathcal{L}(y') = pY - y(0)$, $\mathcal{L}(y'') = p^2Y - py(0) - y'(0)$.

T 29.28 Ha az állandó együtthatós lineáris

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

differenciálegyenlet karakterisztikus polinomját $K(p)$-vel, a jobb oldali $f(x)$ függvény Laplace-transzformáltját $F(p)$-vel jelöljük, akkor a keresett y függvény Laplace-transzformáltja

$$Y(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{K(p)}, \tag{2}$$

ahol Q a p-nek legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomja; speciálisan, $y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-1} = 0$ esetén $Q(p) = 0$, és így

$$Y(p) = \frac{F(p)}{K(p)}. \tag{3}$$

M 29.29 Nem állandó együtthatós differenciálegyenletek megoldásához használjuk a Laplace-transzformált differenciálására vonatkozó tételből és az (1) képletből adódó

$$\mathcal{L}\{x^m y^{(n)}\} = (-1)^m \left(p^n Y - \sum_{i=0}^{n-1} p^{n-1-i} y_i\right)^{(m)}$$

formulát.

M 29.30 Az ebben a fejezetben szereplő feladatok megoldásához felhasználjuk a következő táblázatban szereplő y függvények Y Laplace-transzformáltját (illetve a Y függvények y inverz Laplace-transzformáltját).

sorszám	y	Y	sorszám	y	Y
(I)	1	$\frac{1}{p}$	(IX)	$x\cos ax$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
(II)	x^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	(X)	$x\sin ax$	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$
(III)	e^{ax}	$\frac{1}{p-a}$	(XI)	$x\,\mathrm{ch}\,ax$	$\frac{p^2+a^2}{(p^2-a^2)^2}$
(IV)	$\cos ax$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	(XII)	$x\,\mathrm{sh}\,ax$	$\frac{2pa}{(p^2-a^2)^2}$
(V)	$\sin ax$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$(XIII)$	$e^{ax}\cos bx$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
(VI)	$\mathrm{ch}\,ax$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	(XIV)	$e^{ax}\sin bx$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
(VII)	$\mathrm{sh}\,ax$	$\frac{a}{p^2-a^2}$	(XV)	$\frac{\sin x}{x}$	$\mathrm{arctg}\,\frac{1}{p}$
$(VIII)$	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$	(XVI)	$\frac{1-\cos x}{x}$	$\frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{p^2})$

Feladatok

Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket a megadott kezdeti feltételekkel.

136.* $y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$

137.* $y'' - 2y' + y = x; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

138. $y'' - 3y' + 2y = 6e^{-x}; \quad y(0) = y'(0) = 3,$

139. $y'' - 3y' - 4y = e^{-2x}; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,$

140. $y'' - 4y' + 9y = -\cos x; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

141. $y'' + 2y' + 2y = 4xe^{-x}; \quad y(0) = y'(0) = 1,$

142. $y''' + y = 1; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$

143. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 1; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$

144. $y^{(4)} - 2y'' + y = 1; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,$

145. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin x; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$

Laplace-transzformáció alkalmazásával számítsuk ki az alábbi állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek általános megoldását.

146.* $y''' - 3y'' + 2y' = 0,$ **147.*** $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg az alábbi nem állandó együtthatós lineáris differenciálegyenleteket a megadott kezdeti feltételekkel.

148.* $y'' + 4xy' - 4y = 0; \quad y(0) = 0, \; y'(0) = -7,$

149.$^{\triangleright}$ $y'' - 16xy' + 32y = 14; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

150. $x^2y'' - 2y = 4x^3; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

151. $x^2y'' + (2 - x^2)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

152. $x^2y'' + (5x^2 - x)y' - (20x + 3)y = 0; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

153. $y'' + 8xy' = 0; \quad y(0) = 4, \; y'(0) = 0,$

154. $y'' - 8xy' + 16y = 3; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

155. $y'' + 2xy' - 4y = 6; \quad y(0) = y'(0) = 0,$

156. $xy''' + 3y'' + xy' + 3y = 0; \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 0,$

157.* $3x^2y^{(4)} + 12xy''' + 2x^2y'' + 20xy' + (16 - x^2)y = 0;$
$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2, \quad y'''(0) = 0.$

Laplace-transzformáció alkalmazásával kíséreljük meg az alábbi nem állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek általános megoldásának meghatározását:

158.* $xy'' - (x + 1)y' + y = x^2,$

159.$^{\triangleright}$ $x^2y'' - 2y = 2,$

160.$^{\triangleright}$ $xy'' + 2y' + xy = 0.$

Laplace-transzformáció alkalmazásával határozzuk meg az alábbi feladatokban szereplő differenciálegyenlet-rendszereknek azt a megoldását, amely kielégíti a megadott kezdeti feltételeket.

161.* $y'' + z = -5\cos 2x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$
$z'' + y = 5\cos 2x; \quad z(0) = -1, \quad z'(0) = 1,$

162.$^{\triangleright}$ $y'' - y + z + u = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$
$y + z'' - z + u = 0; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0,$
$y + z + u'' - u = 0; \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$

163. $y' = -z; \quad y(0) = 1,$
$z' = y; \quad z(0) = 0,$

164. $y' + 3y - 4z = 9e^{2x}; \quad y(0) = 2,$
$2y + z' - 3z = 3e^{2x}; \quad z(0) = 0,$

165. $y'' + y' + z'' - z = e^x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$
$y' + 2y - z' + z = e^{-x}; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0,$

166. $(2y'' - y' + 9y) - (z'' + z' + 3z) = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$
$(2y'' + y' + 7y) - (z'' - z' + 5z) = 0; \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 0.$

Lineáris differenciálegyenletek megoldása hatványsorokkal

T 29.31 Ha az (akár homogén, akár inhomogén)

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f(x)$$

differenciálegyenlet mindegyik együtthatófüggvénye és az f függvény is konvergens hatványsorba fejthető (megengedve azt a speciális esetet is, amikor ezek közül egyesek, vagy akár mind csak véges számú 0-tól különböző tagot tartalmaznak, vagyis polinomfüggvények), akkor a differenciálegyenletnek többnyire van hatványsor alakú megoldása.

M 29.32 Ezt a megoldást

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

alakban keressük. Az adott differenciálegyenletbe az y-nak ezt a hatványsoros kifejezését, valamint az együtthatófüggvények és az f hatványsorát behelyettesítjük, a kijelölt műveleteket elvégezzük, azután a két oldal ugyanolyan fokszámú tagjainak együtthatóit egyenlővé tesszük (mert a két hatványsor egymással egyenlő). Így egyenleteket kapunk az y hatványsorában szereplő együtthatókra. A kezdeti feltételeket is figyelembe véve, a hatványsor együtthatói a legtöbb esetben egyértelműen meghatározhatók. Bizonyos esetekben jól ismert elemi függvények hatványsorához jutunk. Ilyenkor a keresett megoldást az összegfüggvény képletével is megadhatjuk.

Hatványsorok segítségével határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldását, vagy a partikuláris megoldásnak legalább negyedfokú polinomfüggvénnyel való közelítését.

167.* $y' = x + y;\quad y(0) = 0,$

168. $(1-x)y'' + xy' - y = 0;\quad y(0) = y'(0) = 1,$

169.ᵖ $y' - xy = \sin x;\quad y(0) = 0,$

170. $y' - y\cos x = 0;\quad y(0) = 1,$

171.ᵖ $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x;\quad y(0) = 0,$

172. $y'' + y = xe^x;\quad y(0) = \frac{1}{2},\ y'(0) = 1,$

173. $y' - e^xy = 0;\quad y(0) = 1,$

174. $y'' + x^2y = 0;\quad y(0) = y'(0) = 1,$

175. $y' - xy = \cos x;\quad y(0) = 1,$

176. $y'' + y' - xy = 0;\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

30. fejezet

Parciális differenciálegyenletek

D 30.1 Parciális differenciálegyenleten olyan egyenletet értünk, amelyben a meghatározandó ismeretlen egy többváltozós valós függvény, és az egyenletben az ismeretlen függvény különböző rendű parciális deriváltjai, valamint (egy- vagy többváltozós) adott függvények szerepelnek.

D 30.2 Ha egy parciális differenciálegyenletben az ismeretlen függvény legmagasabb rendű parciális deriváltjának rendje n, akkor a parciális differenciálegyenletet n-edrendűnek nevezzük.

D 30.3 Ha egy parciális differenciálegyenlet 0-ra redukált alakjában a nemzérus oldalon olyan függvény áll, amely az ismeretlen függvényre és annak parciális deriváltjaira nézve k-adfokú polinomfüggvény, akkor a parciális differenciálegyenletet k-adfokúnak nevezzük; mégpedig, ha az ilyen parciális differenciálegyenletben minden nemzérus tagnak ugyanaz a fokszáma, akkor a parciális differenciálegyenletet homogénnek mondjuk. Ha valamely parciális differenciálegyenlet fokszáma 1, akkor azt is mondjuk, hogy a parciális differenciálegyenlet lineáris.

Elsőrendű parciális differenciálegyenletek

D 30.4 Az x és y változóktól függő valós u függvényre felírt elsőrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0.$$

M 30.5 Ebben a fejezetben az elsőrendű parciális differenciálegyenleteknek csak egy speciális típusával, a kvázilineáris parciális differenciálegyenletekkel foglalkozunk.

D 30.6 Az x és y változóktól függő valós u függvényre felírt elsőrendű parciális differenciálegyenletet **kvázilineárisnak** nevezzük, ha ekvivalens átalakításokkal

$$a(x, y, u)u'_x(x, y) + b(x, y, u)u'_y(x, y) = c(x, y, u)$$

alakra hozható, ahol a, b és c (az x, y és u-tól függő) adott háromváltozós valós függvények. Speciálisan, ha ezek a függvények csak x-től és y-tól függenek, akkor a parciális differenciálegyenletet **lineárisnak** nevezzük.

M 30.7 A **D 30.6**-beli kvázilineáris parciális differenciálegyenlet megoldásához feltesszük, hogy a benne szereplő a, b és c függvények $\mathbf{R}^3$ valamely D tartományán folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkeznek.

D 30.8 Legyen $u(x,y)$ egy kvázilineáris parciális differenciálegyenlet megoldása $\mathbb{R}^2$ valamely V tartományán. Tegyük fel, hogy minden $(x,y) \in V$ esetén $(x,y,u(x,y)) \in D$.
Az $f(x,y,u) = u(x,y) - u \quad ((x,y) \in V)$ függvénnyel definiált

$$f(x,y,u) = 0$$

egyenletű felületet a szóban forgó kvázilineáris parciális differenciálegyenlet egy **integrálfelületének** nevezzük.

T 30.9 Ha $u(x,y)$ invertálható, és folytonos elsőrendű parciális deriváltjai vannak a V tartományon, akkor a **D 30.8**-beli integrálfelület minden $(x,y,u(x,y))$ pontjához tartozik érintősík, s az érintősík normálvektora

$$\mathbf{grad} f = [u'_x(x,y), u'_y(x,y), -1].$$

M 30.10 Egy

$$a(x,y,u)u'_x(x,y) + b(x,y,u)u'_y(x,y) = c(x,y,u)$$

kvázilineáris parciális differenciálegyenletben szereplő a, b és c függvények segítségével definiáljuk a

$$\mathbf{v}(x,y,u) = a(x,y,u)\mathbf{i} + b(x,y,u)\mathbf{j} + c(x,y,u)\mathbf{k}$$

vektor-vektorfüggvényt a D tartományon, melynek segítségével a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet

$$a(x,y,u)u'_x(x,y) + b(x,y,u)u'_y(x,y) - c(x,y,u) = 0$$

alakjának bal oldala nem más, mint a $\mathbf{v}(x,y,u)$ és $\mathbf{grad} f(x,y,u)$ vektorok skaláris szorzata, azaz a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet átírható a

$$\mathbf{v}(x,y,u)\mathbf{grad} f(x,y,u) = 0$$

alakba. Mivel két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor nulla, ha a két vektor merőleges egymásra, ezért a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet bármely integrálfelülete esetén az integrálfelület tetszőleges $P(x,y,u(x,y))$ pontjához tartozó érintősík párhuzamos a $P(x,y,u(x,y))$ pontbeli $\mathbf{v}(x,y,u(x,y))$ vektorral. Ha a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet valamely $f(x,y,u) = 0$ egyenletű integrálfelületén van olyan $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + u(s)\mathbf{k}$ egyenletű görbe, amelynek tetszőleges $P(x(s), y(s), u(s))$ pontbeli érintővektora megegyezik a P pontbeli $\mathbf{v}$ vektorral, akkor e felületi görbét leíró vektor-skalárfüggvény $x(s)$, $y(s)$, $u(s)$ koordinátafüggvényei kielégítik a

$$\frac{dx(s)}{ds} = a(x,y,u), \quad \frac{dy(s)}{ds} = b(x,y,u), \quad \frac{du(s)}{ds} = c(x,y,u)$$

differenciálegyenlet-rendszert.

D 30.11 Az

$$a(x,y,u)u'_x(x,y) + b(x,y,u)u'_y(x,y) = c(x,y,u)$$

kvázilineáris parciális differenciálegyenletben szereplő a, b és c függvényekkel felírt

$$\frac{dx(s)}{ds} = a(x,y,u), \quad \frac{dy(s)}{ds} = b(x,y,u), \quad \frac{du(s)}{ds} = c(x,y,u)$$

differenciálegyenlet-rendszer megoldásai által meghatározott $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + u(s)\mathbf{k}$ egyenletű görbéket a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet **karakterisztikus görbéinek** nevezzük.

T 30.12 Ha az

$$a(x,y,u)u'_x(x,y) + b(x,y,u)u'_y(x,y) = c(x,y,u)$$

kvázilineáris parciális differenciálegyenletben szereplő a, b és c függvények a D tartományon eleget tesznek a Lipschitz-feltételnek és valamely s_0 paraméterre az $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+u(s)\mathbf{k}$ egyenletű karakterisztikus görbe $P_0(x(s_0), y(s_0), u(s_0))$ pontja rajta van a kvázilineáris parciális differenciálegyenlet egy integrálfelületén, akkor a szóban forgó karakterisztikus görbe teljesen rajta fekszik az integrálfelületen. Továbbá minden integrálfelülethez tartozik olyan, karakterisztikus görbékből álló egyparaméteres görbesereg, hogy a két geometriai alakzat ugyanazokból a pontokból áll.

D 30.13 Kezdetiérték-probléma: Legyen adott a

$$\mathcal{G} : \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + u(t)\mathbf{k}; \qquad t \in [t_1, t_2]$$

térgörbe (az un. **kezdeti görbe**) úgy, hogy minden $t \in [t_1, t_2]$ esetén $(x(t), y(t)) \in V$. Tegyük fel, hogy minden $t, t^* \in [t_1, t_2]$, $t \neq t^*$ paraméterpár esetén $x(t) \neq x(t^*)$ vagy $y(t) \neq y(t^*)$, valamint minden $t \in [t_1, t_2]$-re $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$. Egy kvázilineáris parciális differenciálegyenlet olyan $u(x,y)$ megoldásának meghatározását, amely minden $t \in [t_1, t_2]$ paraméter esetén kielégíti az

$$u(t) \equiv u(x(t), y(t))$$

azonosságot, a kvázilineáris parciális differenciálegyenlethez és a kezdeti görbéhez tartozó **kezdetiérték-problémának** nevezzük.

M 30.14 A kezdetiérték-probléma megoldását azzal kezdjük, hogy az s paramétertől függő karakterisztikus görbék közül kiválasztva a $\mathcal{G}$ kezdeti görbén áthaladókat, a karakterisztikus görbék által meghatározott

$$\mathbf{r} = x(s,t)\mathbf{i} + y(s,t)\mathbf{j} + u(s,t)\mathbf{k}; \quad t \in [t_1, t_2], \ s \in [s_1, s_2]$$

(kétparaméteres) vektoregyenletű felületet tekintjük. Ezen felület egyenletrendszerét alkotó

$$x = x(s,t), \quad y = y(s,t), \quad u = u(s,t)$$

egyenletek közül kettőből (például az első kettőből) kifejezzük az s és a t paramétereket (mint x és y függvényét), és azokat a harmadik egyenletbe behelyettesítjük; így az

$$u = u(s(x,y), t(x,y))$$

megoldásfüggvényhez jutunk. A kezdetiérték-probléma nem mindig oldható meg; ha megoldható, akkor sem mindig egyértelműen. Ha az $x = x(s,t)$ és $y = y(s,t)$ függvények

$$J = \begin{vmatrix} x'_s(s,t) & x'_t(s,t) \\ y'_s(s,t) & y'_t(s,t) \end{vmatrix}$$

Jacobi-féle determinánsa a vizsgált tartományon sehol sem nulla, akkor a kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg. Ekkor ugyanis az $x = x(s,t)$, $y = y(s,t)$ függvénykapcsolat invertálható. Ha $J \equiv 0$, akkor a $\mathcal{G}$ kezdeti görbe maga is karakterisztikus görbe, s így végtelen sok integrálfelület halad rajta keresztül. Ha $J \not\equiv 0$ a vizsgált tartományon, de a kezdeti görbe valamely ívének megfelelő ponthalmazon nulla értéket vesz fel, akkor a kezdetiérték-problémának nincs megoldása.

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi elsőrendű kvázilineáris parciális differenciálegyenletekre vonatkozó kezdetiérték-problémákat:

1.• $uu'_x(x,y) - u'_y(x,y) = 1; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad -\infty < t < \infty,$

2.▷ $yu'_x(x,y) - xu'_y(x,y) = 2xyu; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t > 0,$

3. $5u'_x(x,y) + 2u'_y(x,y) = 1; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + 9t^2\mathbf{k},$

4. $4u'_x(x,y) - u'_y(x,y) = 7; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = 4e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + e^t\mathbf{k},$

5.* $uu'_x(x,y) + xyu'_y(x,y) = u^2 + u; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (\frac{2t-1}{2t})^2\mathbf{j} + (2t-1)\mathbf{k}, \ t > 0,$

6.▷ $\frac{1}{\cos x}u'_x(x,y) + u'_y(x,y) = \frac{1}{\sin u}, \quad 0 < x, u < \frac{\pi}{2}; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$

7. $uu'_x(x,y) + \frac{1}{y}u'_y(x,y) = \frac{1}{u}, \quad y, u > 0; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{j},$

8.▷ $u'_x(x,y) + u'_y(x,y) = 1; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k},$

9. $e^{-x}u'_x(x,y) + y\ln y u'_y(x,y) = 1, \quad y > 0; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k},$

10.▷ $yu'_x(x,y) + xu'_y(x,y) = x + y; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j} + (2t+1)\mathbf{k},$

11.▷ $xu'_x(x,y) + xu'_y(x,y) = 1 - x; \quad \mathcal{G}: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{k}.$

Másodrendű parciális differenciálegyenletek

D 30.15 Az x és y változóktól függő valós u függvényre felírt másodrendű parciális differenciálegyenlet általános alakja:

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yx}, u''_{yy}) = 0.$$

M 30.16 Az x és y változóktól függő valós u függvényre felírt másodrendű parciális differenciálegyenlet homogén lineáris, ha ekvivalens átalakításokkal

$$a(x,y)u''_{xx} + b_1(x,y)u''_{xy} + b_2(x,y)u''_{yx} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = 0$$

alakra hozható, ahol a, b_1, b_2, c, d, e és f adott (kétváltozós) valós függvények. A továbbiakban feltételezzük, hogy az $u(x,y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjai folytonosak a tekintetbe vett tartományon. Ekkor $u''_{xy} = u''_{yx}$, s így a fenti formula a következő alakra hozható:

$$a(x,y)u''_{xx} + 2b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = 0,$$

ahol $b(x,y) = \frac{1}{2}(b_1(x,y) + b_2(x,y))$.

D 30.17 Az

$$a(x,y)u''_{xx} + 2b(x,y)u''_{xy} + c(x,y)u''_{yy} + d(x,y)u'_x + e(x,y)u'_y + f(x,y)u = 0$$

másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletről azt mondjuk, hogy
hiperbolikus, ha $a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y) < 0$ (pl. a rezgő húr differenciálegyenlete),
parabolikus, ha $a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y) = 0$ (pl. a hővezetés differenciálegyenlete),
elliptikus, ha $a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y) > 0$ (pl. a kétdimenziós Laplace-egyenlet).

Hiperbolikus parciális differenciálegyenletek

12. Mutassuk meg, hogy az $y''_{tt}(x,t) - a^2 y''_{xx}(x,t) = 0$ hiperbolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletnek van $y(x,t) = X(x)T(t)$ alakú megoldása. Határozzuk meg az $X(x)$ és $T(t)$ függvényeket.

13. Oldjuk meg az

$$y''_{tt}(x,t) - a^2 y''_{xx}(x,t) = 0$$

hiperbolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = 0 = y(l,t); \quad t \geq 0$$

feltételek (un. peremfeltételek) mellett, ahol l pozitív szám.

14. Oldjuk meg az

$$y''_{tt}(x,t) - a^2 y''_{xx}(x,t) = 0$$

hiperbolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = 0 = y(l,t); \quad t \geq 0$$

peremfeltételek és az

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$y'_t(x,0) \equiv 0; \quad 0 \leq x \leq l$$

feltételek (un. kezdeti feltételek) mellett, ahol f a $[0,l]$ intervallumon folytonos függvény.

15. Oldjuk meg az

$$y''_{tt}(x,t) - a^2 y''_{xx}(x,t) = 0$$

hiperbolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = 0 = y(l,t); \quad t \geq 0$$

peremfeltételek és az

$$y(x,0) = 0; \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$y'_t(x,0) = g(x); \quad 0 \leq x \leq l$$

kezdeti feltételek mellett, ahol g a $[0,l]$ intervallumon folytonos függvény.

16. Mutassuk meg, hogy az

$$y''_{tt}(x,t) - a^2 y''_{xx}(x,t) = 0,$$

$$y(0,t) = 0 = y(l,t); \quad t \geq 0,$$

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$y'_t(x,0) = g(x); \quad 0 \leq x \leq l$$

kezdetiérték-probléma megoldása $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$, ahol $y_1(x,t)$ a **14.** feladatbeli, $y_2(x,t)$ pedig a **15.** feladatbeli kezdetiérték-probléma megoldása.

Oldjuk meg az alábbi hiperbolikus homogén másodrendű parciális differenciálegyenleteket a megadott peremfeltételek és kezdeti feltételek mellett:

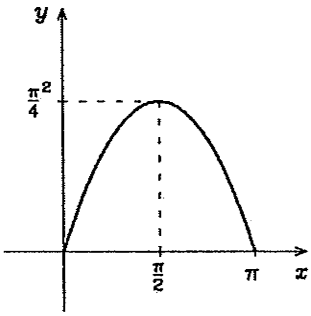
17. $y''_{tt}(x,t) - 0.01y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = y(\pi/2,t) = 0;\quad t \geq 0,$
$y(x,0) = x\cos x;\quad 0 \leq x \leq \pi/2,$
$y'_t(x,0) = \sin 2x;\quad 0 \leq x \leq \pi/2,$

18. $y''_{tt}(x,t) - 2y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = y(2\pi,t) = 0;\quad t \geq 0,$
$y(x,0) = -1 + \cos x;\quad 0 \leq x \leq 2\pi,$
$y'_t(x,0) = \sin x;\quad 0 \leq x \leq 2\pi,$

19. $y''_{tt}(x,t) - a^2y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = y(1,t) = 0;\quad t \geq 0,$
$y(x,0) = |x-1| - 1;\quad 0 \leq x \leq 2,$
$y'_t(x,0) = 1;\quad 0 \leq x \leq 2,$

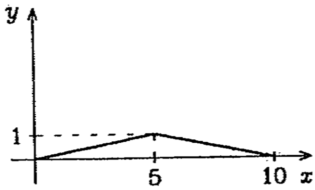
20. $y''_{tt}(x,t) - a^2y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = y(1,t) = 0;\quad t \geq 0,$
$y(x,0) = x^2 - x;\quad 0 \leq x \leq 1,$
$y'_t(x,0) = -x^2 + x;\quad 0 \leq x \leq 1,$

21. $y''_{tt}(x,t) - a^2y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = y(\pi,t) = 0;\quad t \geq 0,$
$y(x,0) = f(x);\quad 0 \leq x \leq \pi,$
$y'_t(x,0) = g(x);\quad 0 \leq x \leq \pi,$
ahol $g(x) \equiv 1$, az f grafikonja pedig az ábrán látható parabolaív.



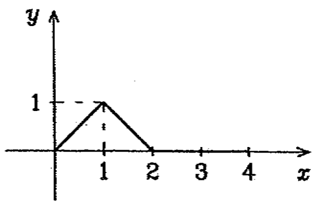
22. Tekintsünk egy l hosszúságú, mindkét végén befogott, p nagyságú erővel feszített, tökéletesen rugalmas, homogén tömegeloszlású húrt. Legyen a nyugalomban levő húr az xy-koordinátarendszer x-tengelyének $[0,l]$ szakaszán. Mozdítsuk ki a húrt nyugalmi helyzetéből az y-tengellyel párhuzamosan. Határozzuk meg a húr (t időtől függő xy-síkban történő) rezgését leíró $y(x,t)$ függvényt, ha a húr kezdeti alakját olyan $y = f(x)$, kezdeti sebességet pedig olyan $y = g(x)$ függvény írja le, amelyek a $[0,l]$ intervallumon Fourier-sorba fejthetők.

23. Két végén befogott, $l = 10$ egység hosszúságú húrt a $t = 0$ kezdőpillanatban a húr felezőpontján úgy pendítünk meg, hogy az az ábrán látható kezdeti alakot vegye fel; a húrpontok kezdeti sebessége legyen 0.
a) Írjuk fel a kezdeti- és peremfeltételeket!
b) Határozzuk meg a rezgést leíró függvénysort!

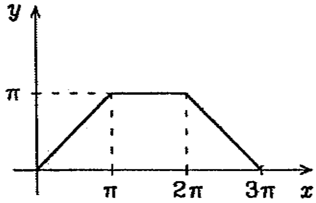


24. Határozzuk meg a mindkét végén befogott $l = \pi$ egység hosszúságú húr rezgését leíró függvénysort az $y(0,t) = 0 = y(\pi,t)$ peremfeltételek és az $y(x,0) \equiv 0$, $y'_t(x,0) = \sin x$ kezdeti feltételek mellett, ha a feszítő erő nagysága p, az egységnyi húrdarab tömege pedig ϱ.

25. Két végén befogott, $l = 4$ egység hosszúságú húrt a $t = 0$ kezdőpillanatban oly módon pendítünk meg, hogy az az ábrának megfelelő alakot vegye fel; a húr pontjainak kezdeti sebessége legyen 0.
a) Írjuk fel a kezdeti- és a peremfeltételeket!
b) Határozzuk meg a rezgést leíró függvénysort!



26. Egy $\varrho = 10$ egység sűrűségű, homogén eloszlású, $p = 40$ egység erővel kifeszített (mindkét végén befogott) húr rezgéseket végez. Adjuk meg a rezgést leíró $y(x,t)$ függvényt, ha a húr kezdeti alakja az ábrán látható, pontjainak kezdeti sebessége pedig 0.



27.[P] Egy l hosszúságú, mindkét végén befogott, homogén rúd longitudinális rezgéseket végez. A rúd hossztengelye menti koordinátát x-szel jelölve, a rúdrészecskék kezdeti helyzetét és sebességét az $f(x)$, illetve $g(x)$ függvények írják le. Jelölje $y(x,t)$ a rúd nyugalmi helyzetben x koordinátájú keresztmetszetének a nyugalmi helyzettől való kitérését (a rúd hossztengelye irányában) a t időpillanatban. Határozza meg az $y(x,t)$ függvényt.

28.[*] Egy π hosszúságú, mindkét végén befogott, homogén rúd longitudinális rezgését az

$$y''_{tt}(x,t) - 3y''_{xx}(x,t) = 0$$

differenciálegyenlet írja le az

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0; \quad t \geq 0$$

peremfeltételek, illetve az

$$y(x,0) = x(\pi - x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y'_t(x,0) \equiv 0; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

kezdeti feltételek mellett. Adjuk meg a rezgést leíró $y(x,t)$ függvényt.

Parabolikus parciális differenciálegyenletek

29.[P] Mutassuk meg, hogy az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2} y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletnek van $y(x,t) = X(x)T(t)$ alakú megoldása. Határozzuk meg az $X(x)$ és $T(t)$ függvényeket.

30.[P] Oldjuk meg az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2} y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = y(l,t) = 0; \quad t \geq 0$$

peremfeltételek mellett, ahol l pozitív szám.

31.[P] Oldjuk meg az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2} y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = y_1, \quad y(l,t) = y_2; \quad t \geq 0$$

peremfeltételek mellett, ahol l pozitív, y_1 és y_2 pedig tetszőleges valós számokat jelölnek.

32.[P] Oldjuk meg az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2} y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = y(l,t) = 0; \quad t \geq 0$$

peremfeltételek és az

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l$$

kezdeti feltétel mellett, ahol f a $(0,l)$ intervallumon folytonos és korlátos függvény. (Megjegyezzük, hogy $f(0) = f(l) = 0$.)

33.[P] Oldjuk meg az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2} y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = y_1, \quad y(l,t) = y_2; \quad t \geq 0$$

peremfeltételek és az

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq l$$

kezdeti feltétel mellett, ahol f a $(0,l)$ intervallumon folytonos és korlátos függvény. (Megjegyezzük, hogy $f(0) = y_1$ és $f(l) = y_2$.)

Oldjuk meg a következő feladatokban szereplő parabolikus homogén másodrendű parciális differenciálegyenleteket a megadott peremfeltételek és a kezdeti feltétel mellett:

34.[M] $y'_t(x,t) - \frac{1}{3} y''_{xx}(x,t) = 0,$

$y(0,t) = y(10,t) = 0; \quad t \geq 0,$

$$y(x,0) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{ha } 0 \leq x \leq 5, \\ 2 - \frac{1}{5}x, & \text{ha } 5 \leq x \leq 10, \end{cases}$$

35. $y'_t(x,t) - 100 y''_{xx}(x,t) = 0,$

$y(0,t) = y(2\pi,t) = 0; \quad t \geq 0,$

$y(x,0) = -1 + \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$

36. $y'_t(x,t) - y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = 0, \; y(\pi,t) = 1; \quad t \geq 0,$
$y(x,0) = \dfrac{x}{\pi} + \sin x; \quad 0 \leq x \leq \pi,$

37. $y'_t(x,t) - y''_{xx}(x,t) = 0,$
$y(0,t) = 0, \quad y(1,t) = 1; \quad t \geq 0,$
$$y(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ x + 100, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

38. Határozzuk meg azt a függvényt, amely az l hosszúságú, állandó keresztmetszetű homogén és izotróp hővezető rúd hőmérsékleteloszlását tetszőleges időpontban leírja, ha a rúd hőmérsékleteloszlása a $t = 0$ időpillanatban ismert, s a vizsgálat közben a rúd mindkét végét 0 fokon tartjuk.

39. Határozzuk meg az x-tengely $[0,\pi]$ szakaszán elhelyezett, állandó keresztmetszetű, homogén és izotróp hővezető rúd hőmérsékleteloszlását leíró $y(x,t)$ függvényt, ha a rúd hőmérsékletvezetési tényezője $\frac{1}{4}$, a rúd hőmérsékleteloszlása a $t = 0$ időpillanatban $y(x,0) = \sin x$, $(0 \leq x \leq \pi)$, s a vizsgálat közben a rúd mindkét végét 0 fokon tartjuk.

40. Határozzuk meg az x-tengely $[0,l]$ szakaszán elhelyezett homogén izotróp rúd hőmérsékleteloszlását leíró $y(x,t)$ függvényt, ha a rúd kezdeti hőmérsékleteloszlása
a) $y(x,0) = \frac{c}{l^2}(x(l-x)); \quad 0 \leq x \leq l, \quad c \in \mathbf{R},$
b) $y(x,0) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < l, \\ 0, & \text{ha } x = l, \end{cases}$
végeit pedig állandóan zérus hőmérsékleten tartjuk.

41. Határozzuk meg az x-tengely $[0,l]$ szakaszán elhelyezett homogén és izotróp rúd hőmérsékleteloszlását leíró $y(x,t)$ függvényt, ha a rúd kezdeti hőmérsékleteloszlása $y(x,0) = f(x)$ $(0 \leq x \leq l)$ végeit pedig y_1, illetve y_2 hőmérsékleten tartjuk, azaz $y(0,t) = y_1$ és $y(l,t) = y_2$ $(t \geq 0)$.

42. Tekintsünk egy 10 cm hosszú homogén izotróp rudat, melynek hőmérsékletvezetési tényezője egyenlő 1-gyel. A $t = 0$ időpillanatban az egész rúd hőmérséklete 0^oC. Tartsuk a rúd egyik végét -120^oC, a másikat pedig -20^oC hőmérsékletű folyadékban. Határozzuk meg a rúd lehűlési folyamatát leíró függvényt.

43. Tekintsünk egy 10 cm hosszú homogén izotróp rudat, melynek hőmérsékletvezetési tényezője egyenlő 1-gyel. A $t = 0$ időpillanatban az egész rúd hőmérséklete 100^oC. Tartsuk a rúd egyik végét 0^oC, a másikat pedig -1^oC hőmérsékletű folyadékban. Határozzuk meg a rúd lehűlési folyamatát leíró függvényt.

44. Egy 10 cm hosszú homogén izotróp rúd hővezetési tényezője 1. A $t = 0$ időpillanatban az (x-tengely $[0,10]$ szakaszán elhelyezett rúd) x helyen mért hőmérséklet $f(x) = (2x - 10)^oC$. Tartsuk a rúd egyik végét (amely az origóban van) -10^oC, a másikat pedig 10^oC hőmérsékleten. Határozzuk meg a rúd lehűlési folyamatát leíró függvényt.

Kétdimenziós Laplace-egyenlet

45.▹ Mutassuk meg, hogy az

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$$

kétdimenziós Laplace-egyenletnek van $u(x,y) = X(x)Y(y)$ alakú megoldása. Határozzuk meg az $X(x)$ és $Y(y)$ függvényeket!

46.▹ Mutassuk meg, hogy az

$$u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$$

kétdimenziós Laplace-egyenlet azon $u(x,y)$ megoldása, amely a

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b, \quad a,b > 0\}$$

téglalap alakú tartomány határán teljesíti az

$$u(x,0) = u(x,b) = 0; \quad 0 \le x \le a,$$

$$u(0,y) = 0, \; u(a,y) = g(y); \quad 0 \le y \le b$$

feltételeket előállítható

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

alakban, ahol az $E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}$ értékek annak a $2b$ szerint periódikus páratlan függvénynek a Fourier-együtthatói, amelynek a $[0,b]$ intervallumra való leszűkítése megegyezik a g függvénnyel, és így

$$E_n = \frac{2}{b \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

(Megjegyezzük, hogy g a $(0,b)$ intervallumon korlátos és folytonos függvény, valamint $g(0)=g(b)=0$.)

Oldjuk meg az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ kétdimenziós Laplace-egyenletet az alábbi feladatokban szereplő feltételek mellett:

47.• $u(x,0) = u(x,2) = 0; \quad 0 \le x \le 3,$
$u(0,y) = 0, \; u(3,y) = t_0; \quad 0 < y < 2, \; t_0 \in \mathbf{R},$

48. $u(x,0) = u(x,\pi) = 0; \quad 0 \le x \le \pi,$
$u(0,y) = 0, \; u(\pi,y) = \sin y; \quad 0 < y < \pi,$

49. $u(x,0) = u(x,1) = 0; \quad 0 \le x \le 1,$
$u(0,y) = 0, \; u(1,y) = y; \quad 0 < y < 1,$

50. $u(x,0) = u(x,b) = 0 \quad 0 \le x \le a,$
$u(0,y) = u(a,y) = 0; \quad 0 \le y \le b,$

51. $u(x,0) = u(x,1) = 0; \quad 0 \le x \le 1,$
$u(0,y) = 0, \; u(1,y) = y(1-y); \quad 0 \le y \le 1.$

Bebizonyítható, hogy az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ Laplace-egyenlet $u(0,y) = u(a,y) = 0$ $(0 \le y \le b)$ és $u(x,0) = 0$, $u(x,b) = f(x)$ $(0 \le x \le a)$ feltételeknek eleget tevő megoldása

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}\right) \sin \frac{n\pi x}{a}$$

alakú, ahol az $F_n \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}$ értékek annak a $2a$ szerint periódikus, páratlan függvénynek a Fourier-együtthatóival egyenlők, amely függvénynek a $[0,a]$ intervallumra való leszűkítése egyenlő f-fel, és így $F_n = \frac{2}{a \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$. (Megjegyezzük, hogy f a $(0,a)$ intervallumon korlátos és folytonos függvény, valamint $f(0) = f(a) = 0$.)

Mindezek alapján oldjuk meg az $u''_{xx}(x,y) + u''_{yy}(x,y) = 0$ kétdimenziós Laplace-egyenletet az alábbi feladatokban szereplő feltételek mellett:

52.* $u(0,y) = u(2,y) = 0; \quad 0 \le y \le 2,$
$u(x,0) = 0, \ u(x,2) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le 1, \\ -x+2, & \text{ha } 1 \le x \le 2, \end{cases}$

53. $u(0,y) = u(\pi,y) = 0; \quad 0 \le y \le \pi,$
$u(x,0) = 0, \ u(x,\pi) = \cos x; \quad 0 < x < \pi,$

54. $u(0,y) = u(1,y) = 0; \quad 0 \le y \le 2,$
$u(x,0) = 0, \ u(x,2) = 2, \quad 0 < x < 1,$

55. $u(0,y) = u(1,y) = 0; \quad 0 \le y \le 1,$
$u(x,0) = 0, \ u(x,1) = x(x-1), \quad 0 \le x \le 1,$

56. $u(0,y) = u(1,y) = 0; \quad 0 \le y \le 1,$
$u(x,0) = 0, \ u(x,1) = \begin{cases} 2x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$

22. Számsorok (megoldások)

1. A k-adik részletösszeg két mértani sor k-adik részletösszegére bontható: $s_k = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, azaz **D 22.1** és **T 22.5** alapján

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{10^{2n+1}} + \frac{2}{10^{2n+2}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{52}{10^2} \frac{1}{10^{2n}}$, ezért **D 22.1** és **T 22.5** szerint $s = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{52}{10^2} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{10^{2n}} = \frac{13}{2475}$.

3. Mivel $0 < \frac{a}{a+1} < 1$, ezért **T 22.5** szerint a sor konvergens; $s = a$.

4. A sor $\frac{1+i}{2}$ hányadosú mértani sor. Mivel $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ezért **T 22.5** szerint a sor konvergens; $s = 1 + i$.

5. A sor $\frac{(1-i)^3}{3}$ hányadosú mértani sor. Mivel $\left|\frac{(1-i)^3}{3}\right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, ezért **T 22.5** szerint a sor konvergens; $s = -\frac{14+6i}{29}$.

6. A Moivre-képletet (**T 6.14**) alkalmazva: $\frac{(1+\sqrt{3}i)^9}{1024} = -\frac{1}{2}$, ezért

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+\sqrt{3}i)^{9n}}{1024^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

A **T 22.5** szerint $s = \frac{2}{3}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(a^2+a-1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2+a-1} \left(-\frac{1}{a^2+a-1}\right)^{n-1}$, azaz a sor $-\frac{1}{a^2+a-1}$ hányadosú mértani sor, ha $a^2 + a - 1 \neq 0$. (Az $a^2 + a - 1 = 0$ esetben a sor nem létezik.) **T 22.5** szerint a sor akkor és csak akkor konvergens, ha $a < -2$, $-1 < a < 0$ vagy $a > 1$. Ezekben az esetekben a sor összege: $s = \frac{1}{a^2+a}$.

8. Elemi törtekre bontással (**T 12.18**): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, ezért

$$s = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = 1.$$

9. Az előző feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el. Elemi törtekre bontással (T 12.18): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$, ezért

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{3}{4}.$$

10. Elemi törtekre bontással: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$; $s = 1$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$; $s = \frac{1}{3}$.

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + (2i+1)n + i - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+i+1}\right)$; $s = -i$.

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n(i+1) + 2i - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+i+2}\right)$;

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+k} - \frac{1}{i+k+1}\right) = \frac{1-3i}{2}.$$

14. Jelölje szokásosan $\mathbf{Z}^-$ a negatív egész számok halmazát. Ha $a \notin \mathbf{Z}^-$, akkor a sor a következő alakra hozható:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+a+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+a+2}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+a+1}\right) - \left(\frac{1}{n+a+1} - \frac{1}{n+a+2}\right)\right).$$

Így $s =$
$\frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left(\left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right) - \left(\frac{1}{k+a+1} - \frac{1}{k+a+2}\right)\right) = \frac{1}{2(a+1)(a+2)}$.
Ha $a \in \mathbf{Z}^-$, akkor a sor nincs értelmezve.

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ miatt
$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n}{n-1}\right)$ miatt
$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \left(-\ln 2 + \ln\frac{k+1}{k}\right) = -\ln 2$.

17. Ha $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ és $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$, akkor

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{1}{n^2+n+1},$$

s így $\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}$. Ezt felhasználva

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{1}{k+1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

18. Egyrészt $s_{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k+1}{2^{k+1}} =$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \cdots + \frac{k}{2^{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{s_k}{2},$$

másrészt $s_{k+1} = s_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} > s_k$. Ezekből $1 - \frac{s_k}{2} > s_k$, tehát $s_k < 2$, vagyis a részletösszegek sorozata felülről korlátos, és 2 egy felső korlátja a sorozatnak. Ez azt jelenti, hogy a részletösszegek sorozata konvergens (**T 7.22**).

$$s = \lim_{k\to\infty} s_{k+1} = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{s_k}{2}\right) = 1 + \frac{s}{2}.$$

Ebből a sor összege: $s = 2$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{2n-1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)$. Az előző feladat eredményét is felhasználva:

$$s = \lim_{k\to\infty}\left(2\sum_{n=1}^{k}\frac{n}{2^n} - \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}\right) = 2\cdot 2 - 1 = 3.$$

20. A **18.** feladat megoldásához hasonlóan járhatunk el:

$$s_{k+1} = \frac{1}{a-1}\left(1 - \frac{1}{a^{k+1}}\right) + \frac{s_k}{a}, \qquad s_{k+1} = s_k + \frac{k+1}{a^{k+1}} > s_k.$$

Ezekből adódik, hogy $s_k < \frac{a}{(a-1)^2}$ minden k pozitív egész számra teljesül.

$s = \lim_{k\to\infty} s_{k+1} = \frac{1}{a-1} + \frac{s}{a}$, amiből $s = \frac{a}{(a-1)^2}$ adódik.

21. Teljes indukcióval megmutatható, hogy $s_k = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}$, ezért:

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}\right) = 1 - \sqrt{2}.$$

22. Tekintsük a $\sum_{n=1}^{\infty}(q(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n\cos n\alpha + i\sum_{n=1}^{\infty} q^n\sin n\alpha$$

mértani sort (l. **T 6.14**). $|q(\cos\alpha + i\sin\alpha)| = |q| < 1$, ezért **T 22.5** szerint a sor konvergens. A sor összege:

$$s = \frac{q(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{1 - q(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha} + i\frac{q\sin\alpha}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha},$$

amiből $\sum_{n=1}^{\infty} q^n\sin n\alpha = \frac{q\cos\alpha - q^2}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} q^n\cos n\alpha = \frac{q\sin\alpha}{1 + q^2 - 2q\cos\alpha}$

(l. még a **T 7.28** tételt).

23. $\dfrac{n}{|a|^n} \geq 1$ minden n pozitív egész számra, azaz a sor tagjai nem alkotnak nullasorozatot, így **T 22.3** szerint a sor divergens.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{3n-1} = \dfrac{1}{3}$, ezért **T 23.3** szerint a sor divergens.

25. Minden n és p pozitív egész szám esetén: $|s_{n+p} - s_n| =$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}} \geq \frac{p}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}},$$

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{\sqrt{(n+p)(n+p+1)}} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{p}+1\right)\left(\frac{n}{p}+1+\frac{1}{p}\right)}} = 1.$$

Emiatt nem teljesül a Cauchy-féle konvergenciakritérium (**T 22.4**), azaz van olyan $\epsilon > 0$, amelyhez nem adható meg olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor minden $p(\in \mathbb{N}^+)$ esetén $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$.

26. $|s_{n+p} - s_n| \geq \dfrac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n+p+1}}$ $(n, p \in \mathbb{N}^+)$ és $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n+p+1}}$ $= \infty$, amiből **T 22.4** alapján kapjuk, hogy a sor divergens.

27. Van olyan $0 \leq \varphi < 2\pi$, hogy $q = |q|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, ezért $q = |q|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (**T 6.14**). Tegyük fel, hogy a sor konvergens. Ez azt jelenti, hogy szükségképpen $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$ (**T 22.3**). Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n \neq 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = 0$. Ebből $\lim\limits_{n\to\infty} |\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = 0$ adódik, ami lehetetlen, mivel $|\cos n\varphi + i\sin n\varphi| = 1$. Így a sor valóban divergens.

28. $|s_{n+p} - s_n| = \dfrac{a_{n+1}}{a^{n+1}} + \dfrac{a_{n+2}}{a^{n+2}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{a^{n+p}} \leq$

$$\frac{1}{a^n} + \frac{1}{a^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a^{n+p-1}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{a^p}}{1 - \frac{1}{a}} < \frac{1}{(a-1)a^{n-1}}.$$

Legyen ϵ tetszőleges pozitív valós szám; $|s_{n+p} - s_n| < \dfrac{1}{(a-1)a^{n-1}} < \epsilon$ teljesül minden pozitív egész p számra, ha $n > \log_a \dfrac{a}{(a-1)\epsilon}$.

29. $|s_{n+p} - s_n| = \dfrac{n+1}{(n+1)^3 + (n+1)^2 + 1} + \cdots + \dfrac{n+p}{(n+p)^3 + (n+p)^2 + 1} <$

$$\frac{n+1}{(n+1)^3 + (n+1)^2} + \cdots + \frac{n+p}{(n+p)^3 + (n+p)^2} =$$

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n}.$$

Ha ϵ tetszőleges pozitív valós szám és $n > \dfrac{1}{\epsilon}$, akkor minden pozitív egész p számra $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$ teljesül.

30. Vegyük figyelembe $n \geq 2$ esetén a következő átalakításokat:

$$\frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{2}{n(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1})} <$$

$$< \frac{2}{n^2} < \frac{2}{n(n-1)} = 2\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Ezután az előző feladathoz hasonló módon fejezhető be a megoldás.

31. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ nem létezik, így **T 22.3** szerint a sor divergens.

32. $|s_{n+p} - s_n| = \dfrac{n+1}{(n+1)^2+2} + \dfrac{n+2}{(n+2)^2+2} + \cdots + \dfrac{n+p}{(n+p)^2+2} \geq$
$\dfrac{n+1}{(n+1)^2+n+1} + \dfrac{n+2}{(n+2)^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n+p}{(n+p)^2+n+p} =$
$\dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+3} + \cdots + \dfrac{1}{n+p+1} \geq \dfrac{p}{n+p+1}$ $(n, p \in \mathbf{N}^+)$.
Mivel bármely rögzített pozitív egész n számra $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{p}{n+p+1} = 1$, ezért 1-nél kisebb pozitív ϵ-hoz nem lehet megadni olyan n_0 valós számot, hogy ha $n > n_0$, akkor minden pozitív egész p számra $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon$, azaz $\dfrac{p}{n+p+1} < \epsilon$. Így **T 22.4** szerint a sor divergens.

33. A **7.74.** feladat szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = \infty$, ha $a > 1$ és $k \in \mathbf{N}$, ezért **T 22.3** szerint a sor divergens.

34. $\dfrac{5^n}{5^{n+a}-1} > \dfrac{1}{5^a} > 0$, ezért **T 22.3** szerint a sor divergens.

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{(2+i)^n}{n2^n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{5})^n}{n2^n} = \infty$, ezért **7.74.** feladat és **T 22.3** szerint a sor divergens.

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n}{\sqrt{n}+in}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+n^2}} = 1$, ezért **T 22.3** szerint a sor divergens.

37. $|s_{n+p} - s_n| = \left|\dfrac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin(n+2)x}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}}\right| \leq$
$\dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n+p}}$.
A **28.** feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy a sor konvergens.

38. $|s_{n+p} - s_n| = \left|\dfrac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2} + \dfrac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \leq$
$\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2}$. Felhasználva, hogy

$$\frac{1}{(n+k)^2} < \frac{1}{(n+k)(n+k-1)} = \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k},$$

T 22.4 segítségével bebizonyítható, hogy a sor konvergens.

39. Minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén: $\dfrac{1}{1+n^2} < \dfrac{1}{n^2}$, a **T 22.13** szerint konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ sor majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+n^2}$ nemnegatív tagú sort, ezért a majoránskritérium szerint az utóbbi sor is konvergens.

40. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén: $\dfrac{n^2}{n^3+1} > \dfrac{n^2}{n^3+n^3} = \dfrac{1}{2n}$. T 22.13 szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n}$ sor divergens, ezért a minoránskritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{n^3+1}$ sor is divergens.

41. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén:

$$\frac{2n^3-16}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5+n} < \frac{2n^3}{n^5} = \frac{2}{n^2}.$$

A $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$ sor tehát majorálja a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2n^3-16}{n^5+n}$ nemnegatív tagú sort, ezért T 22.13 és a majoránskritérium szerint az utóbbi sor is konvergens. Ebből, a T 22.2 tételt is felhasználva, adódik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^3-16}{n^5+n}$ sor is konvergens.

42. Minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén:

$$\frac{3n+2}{2n^2-n} > \frac{3n}{2n^2-n} = \frac{3}{2n-1} > \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

T 22.13 szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{n}$ sor divergens, ezért a minoránskritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n+2}{2n^2-n}$ sor is divergens.

43. $0 \le \dfrac{\left(\cos \frac{n}{2}\right)^{4n}}{n^n+1} \le \dfrac{1}{n^n+1} < \dfrac{1}{n^n} \le \dfrac{1}{n^2}$, ezért a sor T 22.13 és a majoránskritérium szerint konvergens.

44. A sor minorálható a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergens sorral (T 22.13), ezért divergens.

45. $\dfrac{2^n+4^n}{3^n+5^n} < \dfrac{4^n+4^n}{5^n} = 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ miatt a sort majorálja a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ konvergens mértani sor (T 22.5).

46. A sor konvergens.

47. Használjuk fel, hogy $0 \le \ln n < n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$. A sor konvergens.

48. A sor divergens.

49. Ha $n \ge 2$, akkor $\dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$. A T 7.37 tétel szerint $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, ezért a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}}$ sor divergens, így az eredeti sor is.

50. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$ konvergens sor (T 22.13) majorálja a sort.

51. 7.161 feladat szerint $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$, ezért van olyan n_0 pozitív egész szám, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $\left(1-\dfrac{1}{n}^n\right) \geq \dfrac{1}{2e}$, azaz

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2e},$$

ami azt jelenti, hogy a (**T 22.13** szerint) divergens $\dfrac{1}{2e}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ sor minorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ sort. A sor divergens.

52. $\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{n+1} \geq \sum\limits_{n=2}^{k}\dfrac{1}{n}$; a sor divergens.
(A feladat megoldható **D 22.1** alapján is; l. a **25.** feladatot.)

53. $\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2}}} \geq \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=2}^{k}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$; a sor divergens.
(l. a **26.** feladatot.)

54. $\sum\limits_{n=0}^{k}\dfrac{a_n}{a^n} \leq \sum\limits_{n=0}^{k}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}$; a sor konvergens. (l. a **28.** feladatot.)

55. $\dfrac{n}{n^3+n^2+1} < \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$; a sor konvergens. (l. a **29.** feladatot.)

56. $\dfrac{n}{n^2+2} > \dfrac{n}{2n^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}$ $(n \geq 2)$, a sor divergens. (l. a **32.** feladatot.)

57. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n} = 0$, mi a gyökkritérium szerint azt jelenti, hogy a sor konvergens.

58. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}{2+\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, a gyökkritérium szerint a sor konvergens.

59. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{e}{3} < 1$; a sor konvergens.

60. A hányadoskritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{e}{e-1} > 1.$$

Ez azt jelenti, hogy a sor divergens.

61. Ebben a feladatban a gyökkritériumot egyszerűbb alkalmazni, mint a hányadoskritériumot. A sor konvergens.

62. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{2}{e} < 1$, azaz a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

63. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\dfrac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\dfrac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \infty$,
így a hányadoskritérium szerint a sor divergens.

64. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$; a sor konvergens.

65. Mivel $\lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg} n = \frac{\pi}{2}$, ezért a gyökkritérium szerint a sor konvergens.

66. Alkalmazzuk a gyökkritériumot (a hányadoskritérium nem alkalmazható): $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{a} < 1$, ha $n \ge 1$; a sor konvergens.

67. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sin n}{n} = 0$, ezért a hányadoskritérium szerint a sor konvergens.

68. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{2}$, ezért a hányadoskritérium szerint a sor divergens.

69. A sor konvergens, mert (például L'Hospital-szabállyal (**T 11.12**)) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

70. Ha $x \ge 1$, akkor az $f(x) = \frac{x}{e^x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő. Alkalmazható az integrálkritérium:

$$\int_1^\infty xe^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty}\left(\left[-xe^{-x}\right]_1^a + \int_1^a e^{-x}\,dx\right) =$$

$$\lim_{a\to\infty}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{a}{e^a} - \frac{1}{e^a} + \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e},$$

tehát a sor konvergens. (L. még a **11.122.** feladat megoldását!)

71. Ha $x \ge 1$, akkor az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő.

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2\int_1^\infty e^{-x}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx = -2\left[e^{-\sqrt{x}}\right]_1^\infty = \frac{2}{e},$$

azaz a sor konvergens. Megjegyezzük, hogy a szokásos $\lim_{b\to\infty}[g(x)]_a^b = [g(x)]_a^\infty$ jelölést alkalmaztuk.

72. Ha $x \ge 2$, akkor az $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ függvény pozitív és szigorúan monoton csökkenő. $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x} = [\ln\ln x]_2^\infty = \infty$, a sor divergens.

73. A sor konvergens.

74. Ha $x \ge 2$, akkor az $\frac{1}{x\ln^p x}$ függvény pozitív. Mivel $f'(x) = -\frac{\ln x + p}{x^2(\ln x)^{p+1}}$, ezért $x \ge \sup\{e^{-p}, 2\}$ esetben a függvény monoton csökkenő is (**T 9.16**). Ha $n \ge n_0 = 1 + \operatorname{Ent}\sup\{e^{-p}, 2\}$, akkor az integrálkritérium szerint a $\sum_{n=n_0}^\infty \frac{1}{n\ln^p n}$ sor, s így a $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln^p n}$ sor is, akkor és csak akkor konvergens, ha az $\int_{n_0}^\infty \frac{1}{x\ln^p x}$

integrál konvergens. A $p = 1$ esetben a **72.** feladat megoldása szerint a sor divergens. Ha $p \neq 1$, akkor

$$\int_{n_0}^{\infty} (\ln x)^{-p} \frac{1}{x}\, dx = \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} \right]_{n_0}^{\infty},$$

amelyből látható, hogy a sor $p > 1$ esetben konvergens, $p < 1$ esetben pedig divergens.

75. A sor konvergens.

76. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^r}$; ha $x \geq 2$, akkor az $f(x) = \frac{\ln x}{x^r}$ függvény pozitív. Vizsgáljuk meg a függvényt a $[2, \infty)$ intervallumon monotonitás szempontjából. Deriváltja: $f'(x) = \frac{1 - r \ln x}{x^{r+1}} > 0$. Eszerint, ha $r \leq 0$, akkor $f'(x) > 0$, azaz a függvény szigorúan monoton növekvő; nem alkalmazható tehát az integrálkritérium, a sor azonban **T 22.3** szerint divergens. Ha $r > 0$ és $x \geq \sup\{2, e^{\frac{1}{r}}\}$, akkor f monoton csökkenő. Legyen $n_0 = 1 + \operatorname{Ent} \sup\{2, e^{\frac{1}{r}}\}$. Ha $r = 1$ (ebben az esetben $n_0 = 3$), akkor

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_3^{\infty} = \infty,$$

azaz a sor divergens. Ha $r \neq 1$, akkor

$$\int_{n_0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^r}\, dx = \frac{1}{1-r} \left[\frac{(1-r)\ln x - 1}{(1-r)x^{r-1}} \right]_{n_0}^{\infty},$$

amiből kapjuk, hogy a sor $r < 1$ esetben divergens, $r > 1$ esetben pedig konvergens. (Megjegyezzük, hogy a $r \leq 1$ esetben a **T 22.13** tételt és a minoránskritériumot (**T 22.8**) is alkalmazhatjuk, mivel $\frac{\ln n}{n^r} > \frac{1}{n^r}$, ha $n \geq 3$.)

77. Leibniz-sor, ezért **T 22.15** szerint konvergens.

78. **T 22.3** szerint a sor divergens.

79. $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$ és $\frac{n}{|a|^n} \geq \frac{n+1}{|a|^{n+1}}$, ha $n \geq n_0 = \operatorname{Ent} \frac{1}{|a|-1} + 1$, így a $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ sor Leibniz-sor. **T 22.15** és **T 22.2** szerint az eredeti sor is konvergens. (L. még a **20.** és a **23.** feladatot!)

80. A **7.74.** feladat bizonyítását a helyett $|a|$-kel megismételve, a **T 22.15** segítségével kapjuk, hogy a sor konvergens. (Megjegyezzük, hogy az előző feladat speciális esete ($k = 1$) a feladatnak.)

81. Felhasználva az előző feladat eredményét, kapjuk, hogy a sor konvergens ($k = 100$, $a = -\frac{100}{99}$).

82. A **7.75** feladat szerint $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$. Megmutatjuk, hogy valamilyen indextől kezdve az $\left[\frac{n^k}{n!}\right]$ sorozat szigorúan monoton csökkenő:

$$\frac{n^k}{n!} > \frac{(n+1)^k}{(n+1)!} \iff n+1 > \left(\frac{n+1}{n}\right)^k.$$

Mivel $n+1 \geq 2$, ezért az utóbbi egyenlőtlenség biztosan teljesül, ha $\left(\frac{n+1}{n}\right)^k < 2$, azaz ha $n > \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$. Így, ha $n > \frac{1}{\sqrt[k]{2}-1}$, akkor a sorozat szigorúan monoton csökkenő. **T 22.15** szerint a sor konvergens.

83. A sor konvergens.

84. Megjegyezzük, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, de $|a_{2k}| < \frac{1}{k+2} = a_{2k+1}$, ezért a sor nem Leibniz-sor.

$$s_{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(k+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{k}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Mivel $\frac{n}{(n+1)^2} \geq \frac{n}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}$, ezért a minoránskritérium (**T 22.8**) és **T 22.13** segítségével kapjuk, hogy a sor divergens.

85. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, de $a_{2k-1} = \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{k^2} = |a_{2k}|$, ezért a sor nem Leibniz-sor.

$$s_{2k} = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(k+1)^2} - 1$$

és $s_{2k+1} = s_{2k} + \frac{1}{(k+2)^2}$. Így $\lim\limits_{k\to\infty} s_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k+1} = -1$, azaz a sor konvergens és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -1$ (**D 22.1**).

86. A sor abszolút konvergens, mert a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^{\frac{4}{3}}}$ sort majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ konvergens sor (**T 22.13**).

87. A sor Leibniz-sor, feltételesen konvergens (l. **72.** feladatot!).

88. A sor divergens, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n^2]{n}} = 1$ (l. **T 22.3**).

89. Alkalmazzuk a gyökkritériumot (**T 22.9**) és a **T 7.37** tételt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 = 0,$$

ezért a sor konvergens, s mivel nemnegatív tagú, abszolút konvergens is.

90. Felhasználva, hogy

$$\frac{|\cos n|^n}{n^n+1} < \frac{1}{n^n+1} < \frac{1}{n^n} \le \frac{1}{n^2} \quad \text{ha} \quad n \ge 2,$$

a majoránskritérium (T 22.22) és T 22.13 alkalmazásával kapjuk, hogy a sor abszolút konvergens.

91. A sor abszolút konvergens.

92. A sor Leibniz-sor, de nem abszolút konvergens, mivel $\dfrac{n-1}{n(n+1)} \ge \dfrac{1}{2n}$, ha $n \ge 3$.

93. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot (T 22.25):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 \sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n^2 \sin\frac{\pi}{2^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\sin\frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

azaz a sor abszolút konvergens. A szinuszos rész határértékének kiszámításakor felhasználtuk a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ határértéket (Szász G., Matematika I, 281. o.), de a L'Hospital szabályt (T 11.12) is alkalmazhatjuk.

94. Az előző feladathoz hasonlóan látható be, hogy a sor abszolút konvergens.

95. A hányadoskritérium alkalmazásával kapjuk, hogy a sor abszolút konvergens.

96. A sor Leibniz-sor, de nem abszolút konvergens, mivel

$$\frac{1}{\ln(2n+1)} > \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2}\frac{1}{n+1}.$$

97. $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = e^{-2}$, ezért T 22.3 szerint a sor divergens.

98. Alkalmazzuk a gyökkritériumot (T 22.24): $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{4}$. A sor abszolút konvergens.

99. Alkalmazható az integrálkritérium (T 22.26):

$$\int_3^\infty \frac{dx}{(x\ln x)(\ln\ln x)^2} = \left[-\frac{1}{\ln\ln x}\right]_3^\infty = \ln\ln 3.$$

A sor abszolút konvergens.

100. $\dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{1}{(n+1)n^{\frac{1}{6}}} < \dfrac{1}{n^{\frac{7}{6}}}$, a sor abszolút konvergens.

101. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ (T 22.22 és 7.73), a sor divergens.

102. $\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}\sqrt[3]{n}-1)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}(\sqrt[6]{n^5}-1)} < \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt[6]{n^5}-\frac{\sqrt[6]{n^5}}{2}\right)} = \dfrac{2}{n^{\frac{4}{3}}}$,

ha $n > 2\sqrt[5]{2}$; a sor abszolút konvergens.

103. $\dfrac{1}{n^p \ln^q n} \le \dfrac{1}{n^p}$, a sor abszolút konvergens.

104. A sor Leibniz-sor, de nem abszolút konvergens, mert $\dfrac{1}{n-\ln n} > \dfrac{1}{n}$.

105. Ha $n \in \mathbf{N}^+$, akkor $\sin n < 1$, ezért könnyen belátható, hogy $\dfrac{1+\sin n}{2+\sin n} < \dfrac{2}{3}$. Így

$$0 < \left(\frac{1+\sin n}{2+\sin n}\right)^{n-\ln n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-\ln n} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\mathrm{Ent}(n-\ln n)},$$

amelyből a majoránskritérium (T 22.22) és T 22.28 szerint a sor abszolút konvergens.

106. Mivel

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p} = \frac{2}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} < \frac{2}{n^{p+\frac{1}{2}}},$$

ezért $p > \dfrac{1}{2}$ esetén a majoránskritérium (T 22.22) és T 22.27 szerint a sor abszolút konvergens. Másrészt, $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1} < 2\sqrt{n}$ miatt

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p} = \frac{2}{n^p(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})} > \frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}};$$

Ha tehát $p \le \dfrac{1}{2}$, akkor a minoránskritérium (T 22.23) és T 22.13 szerint a sor nem abszolút konvergens. Ha $-\dfrac{1}{2} < p \le \dfrac{1}{2}$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p} = 0$, és van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy ha $n > n_0$, akkor a $\left[\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p}\right]$ sorozat szigorúan monoton csökkenő. (Ez utóbbi állítás például belátható úgy, hogy az $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x^p}$ $(x > 1)$ függvényt vizsgáljuk monotonitás szempontjából.) Ez azt jelenti, hogy a sor Leibniz-sor (T 22.15), tehát feltételesen konvergens. Ha $p \le -\dfrac{1}{2}$, akkor a sor divergens, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^p} = \infty$ (T 22.3).

107. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|i|^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, ezért a sor nem abszolút konvergens. A sor feltételesen konvergens, mert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n} + i\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right),$$

a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$ és a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$ sorok pedig – ha elhagyjuk belőlük a 0 tagokat – Leibniz-sorok.

108. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|2-i|}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n$, ezért T 22.28 szerint a sor abszolút konvergens.

109. T 22.28 szerint a sor divergens. 110. A sor divergens.

111. $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}$, ezért a hányadoskritérium (T 22.25) szerint a sor abszolút konvergens.

112. A sor abszolút konvergens.

113. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+i}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-i\frac{1}{n+1}\right)$; a sor divergens, mert például a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ sor divergens (l. T 7.28).

114. $\left|\frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{n}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, amelyből a majoránskritérium (T 22.22) és T 22.27 szerint a sor abszolút konvergens.

115. $|a_n|=\frac{1}{n^2+(2n-1)^2}<\frac{1}{n^2}$; a sor abszolút konvergens.

116. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{5n^2+4n+1}{13n^2+12n+9}}=\sqrt{\frac{5}{13}}$, ezért a gyökkritérium (T 22.24) szerint a sor abszolút konvergens.

117. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot (T 22.25):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|a|}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k=\frac{1}{|a|}<1,$$

ezért a sor abszolút konvergens, s így az $\{a_n\}$ sorozat T 22.3 szerint nullasorozat.

118. L. az előző feladat megoldását!

119. Alkalmazzuk a hányados- vagy a gyökkritériumot!

120. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{4}$. 121. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{\sqrt{a^2+1}}{a+1}<1$.

122. Ha $z=x+iy$ és $z\neq 0$, akkor $x^2+y^2\neq 0$, és így

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt{\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}}<1.$$

123. Megmutatjuk, hogy a két sor abszolút konvergens, ezért T 22.29 szerint összegük és különbségük is abszolút konvergens. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot (22.21):

$$a_n=\frac{1+n}{3^n},\quad |b_n|=\left|\frac{(-1)^n-n}{3^n}\right|=\frac{(-1)^{n-1}+n}{3^n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{1}{3}.$$

124. $\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n(2n-1)}\leq\frac{1}{4n^2-2n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$; a különbségsor T 22.13 szerint konvergens. (Megjegyezzük, hogy a két sor divergens.)

125. A két sor abszolút konvergens, ezért T 22.33 alapján a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens.

126. Konvergens (T 22.32).

127. Írjuk fel a Cauchy-szorzat n-edik tagját:

$$c_n=\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n-1}}{1!(n-1)!}+\cdots+\frac{2^{n-k}}{k!(n-k)!}+\cdots+\frac{1}{n!}=$$

$$\frac{1}{n!}\left(2^n+\frac{n!}{1!(n-1)!}2^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{k!(n-k)!}2^{n-k}+\cdots+1\right)=$$

$$=\frac{1}{n!}(2+1)^n=\frac{3^n}{n!}.$$

Alkalmazzuk a hányadoskritériumot: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=0$.

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$ Cauchy-szorzat abszolút konvergens.

128. A sorok divergensek, mert a sorok tagjainak sorozata nem tart 0-hoz. Írjuk fel a Cauchy-szorzat c_n általános tagját:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\cdots-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2+\frac{1}{2^2}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(1+2+\cdots+2^{n-1})-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n+\frac{1}{2^{n+1}}-(2^n-1)-\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^n}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\frac{3}{2^{n+1}}=\left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ sor konvergens.

129. A sor konvergens, mert Leibniz-sor. Írjuk fel a Cauchy-szorzat általános tagját:

$$c_n=(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

A számtani és mértani közép között egyenlőtlenséget felhasználva: $\frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n-k}}\geq\frac{2}{n+1}$, s ezért $|c_n|\geq n\frac{2}{n+1}\geq 1$. A Cauchy-szorzat T 22.3 alapján divergens.

130. Mivel $\left|\sin\frac{a}{n^2}\right| \le \left|\frac{a}{n^2}\right|$ (l. például a **9.159.** feladatot), ezért a sor tagjainak abszolút értékeiből képezett sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a|}{n^2}$ konvergens sor (T 22.13), így T 22.22 szerint a sor abszolút konvergens.

131. Használjuk fel, hogy ha $0 < x \le 1$, akkor $x < \arcsin x$. A sor divergens.

132. Ha $n \ge 3$, akkor $\ln n > 1$, ezért a $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens sor (T 22.13) minorálja a $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ sort, tehát a sor nem abszolút konvergens.

$$\frac{\ln n}{n} \ge \frac{\ln(n+1)}{n+1} \iff n^{n+1} \ge (n+1)^n \iff n \ge \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, ezért van olyan $k \in \mathbb{N}^+$, hogy $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le k$ (l. Szász G., Matematika I., 165.oldalt, ahol látható, hogy $k = 4$ már teljesíti a követelményt). Így, ha $n > k$, akkor az $\left[\frac{\ln n}{n}\right]$ sorozat monoton csökkenő. Mivel a sor váltakozó előjelű és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, ezért T 22.15 szerint a sor konvergens, s így feltételesen konvergens.

133. Ha $n > e^{10}$, akkor $a_{n+1} > a_n$, ezért T 22.3 szerint a sor divergens.

134. Alkalmazható az integrálkritérium (T 22.26), mivel az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x+1}{x-1}$ fügvény $x \ge 2$ esetben pozitív és szigorúan monoton csökkenő (mert $\frac{1}{\sqrt{x}}$ és $\ln\frac{x+1}{x-1} = \ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$ is ilyen).

$$\int_2^{\infty} x^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{x+1}{x-1}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1}\right]_2^{\infty} + 4\int_2^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x+1)(x-1)}\,dx =$$

$$= -2\sqrt{2}\ln 3 + 8\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\frac{t^2}{(t^2+1)(t^2-1)}\,dt =$$

$$= -2\sqrt{2}\ln 3 + 4\int_{\sqrt{2}}^{\infty}\left(\frac{1}{2(t-1)} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= -2\sqrt{2}\ln 3 + \left[2\ln\frac{t-1}{t+1} + 4\operatorname{arctg} t\right]_{\sqrt{2}}^{\infty} =$$

$$= -2\sqrt{2}\ln 3 + 2\pi - 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - 4\operatorname{arctg}\sqrt{2}.$$

A sor abszolút konvergens.

135. Ha $e^{-1} \le a \le e$ és $a \ne 1$, akkor

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{(\ln a)^n}\right| = |\sin n\alpha|\left|\frac{1}{\ln a}\right|^n \ge |\sin n\alpha|.$$

Az általános tag nem tart 0-hoz, ezért a sor divergens. Ha $0 < a < e^{-1}$ vagy $e < a$, akkor

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{(\ln a)^n}\right| \leq \left|\frac{1}{\ln a}\right|^n.$$

A majoránskritérium (T 22.22) és T 22.27 szerint a sor abszolút konvergens.

136. $a_n = a_0 + nd$ ($d \in \mathbf{R}$) alakban írható. Ha $d = 0$, akkor a sor nyilvánvalóan divergens. Legyen $d > 0$. Van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy ha $n \geq n_0$, akkor $a_n > 0$. Van olyan $k_0 \in \mathbf{N}^+$, hogy $a_{n_0} \leq k_0 d$, ezért ha $n \geq n_0$, mégpedig $n = n_0 + k$ ($k \in \mathbf{N}$), akkor

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n_0} + kd} \geq \frac{1}{(k_0 + k)d},$$

ami azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k_0 + k)d}$ divergens sor minorálja a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sort, így az eredeti sor is divergens. Ha $d < 0$, akkor van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n \geq n_0$ esetén $a_n \leq 0$. A $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ sor részletösszegei a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{-a_n}$ divergens sor részletösszegeinek (-1)-szeresei, ezért a sor ebben az esetben is divergens.

137. A sor nem abszolút konvergens, mert

$$\frac{(n^2+1)\sin\frac{n+1}{n}}{n^3+1} \geq \frac{n^2 \sin 1}{2n^3} = \frac{\sin 1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

miatt alkalmazhatjuk a minoránskritériumot. A sor Leibniz-sor, mert váltakozó előjelű, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\sin\frac{n+1}{n}}{n^3+1} = 0$ és a

$$0 < \frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1} < \frac{n^2+1}{n^3+1}, \quad 0 < \sin\frac{n+2}{n+1} < \sin\frac{n+1}{n}$$

egyenlőtlenségek miatt szigorúan monoton csökkenő. A sor feltételesen konvergens.

138. Ha $p > 1$, akkor bármely $r \in \mathbf{R}$ esetén a sor konvergens. (A $0 \leq r$ esetben a majoránskritériumot (T 22.7) és a T 22.13 tételt, az $r < 0$ esetben az integrálkritériumot (T 22.12) alkalmazhatjuk, és $\operatorname{Ent} r + 1$ parciális integrálás után az előbbi esetet kapjuk.) Ha $p = 1$, akkor a **74.** feladat megoldása szerint $r \leq 1$ esetén a sor divergens, $r > 1$ esetén pedig konvergens. Ha $p < 1$, akkor bármely $r \in \mathbf{R}$ esetén a sor divergens. (Az $r \leq 0$ esetben a minoránskritériumot (T 22.8) és a T 22.13 tételt, a $0 < r \leq 1$ esetben a minoránskritériumot és **72.** feladat eredményét, az $r > 1$ esetben az integrálkritériumot és $\operatorname{Ent} r$ lépés után az **72.** feladat eredményét alkalmazhatjuk.)

139. A sor általános tagja:

$$\begin{cases} \frac{2}{n+1}, & \text{ha } n = 2k-1, \\ -\frac{2}{n+2}, & \text{ha } n = 2k,\ k \in \mathbf{N}^+. \end{cases}$$

A sor Leibniz-sor, de nem abszolút konvergens.

140. A sor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ alakban írható, amely a 8. feladat megoldása szerint abszolút konvergens.

141. A feltételből átrendezéssel adódik, hogy $n > n_0$ esetén $\frac{|a_{n+1}|}{b_{n+1}} \le \frac{|a_n|}{b_n}$. Ez azt jelenti, hogy az $\left[\frac{|a_n|}{b_n}; n \in \mathbf{N}^+, n > n_0\right]$ sorozat monoton csökkenő, s mivel pozitív tagú, ezért konvergens (T 7.22), s így korlátos is. Legyen a sorozat egy felső korlátja v. A $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sort majorálja a konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} vb_n$ konvergens sor, ezért T 22.22 szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

142. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan $0 < q < 1$ és $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ teljesül. Feltehető, hogy $n_0 = 0$. Ha ugyanis $n_0 > 0$, akkor T 22.2 szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor helyett vizsgálhatjuk a $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ sort. Könnyen belátható, hogy minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $a_{n+1} \le q^n a_1$, azaz $\sqrt[n]{a_{n+1}} \le q\sqrt[n]{a_1}$. T 7.36 szerint $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1} = 1$, ezért van olyan q_1, hogy $q < q_1 < 1$ és olyan $n_1 \in \mathbf{N}^+$, hogy ha $n > n_1$, akkor $\sqrt[n]{a_1} < \frac{q_1}{q}$. Így $\sqrt[n]{a_{n+1}} \le q\sqrt[n]{a_1} < q_1$, ha $n > n_1$.

143. A feltételből következik, hogy minden $n > n_0(\ge 1)$ esetén $a_{n+1} < a_n$ és $(n-1)a_n - na_{n+1} \ge (r-1)a_n$. Megmutatjuk, hogy az

$$\sum_{n=1}^{\infty}((n-1)a_n - na_{n+1})$$

sor konvergens. A sor n-edik részletösszege: $s_n = -na_{n+1} < 0$. Ha $n > n_0$, akkor $s_n - s_{n-1} = (n-1)a_n - na_{n+1} \ge (r-1)a_n > 0$. Ez azt jelenti, hogy a $[s_n; n \in \mathbf{N}^+, n > n_0]$ sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, ezért T 7.22 szerint konvergens. A majoránskritérium (T 22.7) szerint a $\sum_{n+1}^{\infty} a_n$ a sor is konvergens. A feladat második állítása a következő módon bizonyítható. Ha $n_1 = \operatorname{Ent} n_0 + 1$, akkor minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén $a_{n_1+n} \ge a_{n_1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, így $\lim_{n\to\infty} a_{n_1+n} \ge \lim_{n\to\infty} a_{n_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_{n_1}}{e} > 0$. T 22.3 szerint a sor divergens.

144. Ha $r = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1$, akkor bármely $d \in (1, r)$ esetén van olyan n_d valós szám, hogy ha $n > n_d$, akkor $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \ge d$. Ebből egyszerű

átrendezés után az előző feladat segítségével adódik, hogy a sor konvergens. Ha $r < 1$, akkor van olyan n_0 valós szám, hogy $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \le 1$, ha $n > n_0$, amiből szintén az előző feladat segítségével kapjuk, hogy a sor divergens.

145. Tegyük fel, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan $0 < q < 1$ és $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $a_n > 0$ és $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$ teljesül. Ebből $n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) \ge n(1-q)$. Bármely $r > 1$ esetén, ha $n > n_0$ és $n \ge \dfrac{r}{1-q}$, akkor a Raabe-kritérium szerint a sor konvergens. Tegyük fel most olyan n_0 valós szám létezését, hogy ha $n > n_0$, akkor $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$. Ebből, ha $n > n_0$, akkor $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 - \dfrac{1}{n}$ adódik, azaz a Raabe-kritérium szerint a sor divergens.

146. Megmutatható például L'Hospital-szabállyal (**T 11.12**), hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p\right) = p$. Ezért a **144.** feladat szerint $p > 1$ esetben a sor konvergens, $p < 1$ esetben pedig divergens. $p = 1$ esetben a **143.** feladat alapján látható be, hogy a sor divergens.

147. A sor $a > 1$ esetben konvergens, $a \le 1$ esetben divergens. ($a \ne 1$ esetben a **144.** feladat, $a = 1$ esetben pedig a **143.** feladat alapján; megjegyezzük, hogy például a hányadoskritérium nem alkalmazható.)

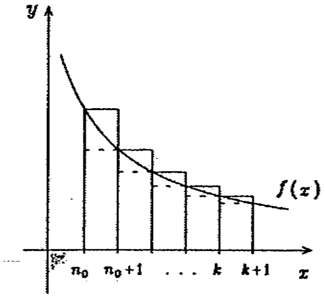
148. Teljesítse az $f(x)$ függvény a **T 22.12** tétel feltételeit. Legyen $k \in \mathbf{N}$ esetén

$$s_k = f(n_0) + f(n_0+1) + \cdots + f(k).$$

Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy

$$\int_{n_0}^{k+1} f(x)\,dx < s_k < f(n_0) + \int_{n_0}^{k} f(x)\,dx,$$

amelyből **D 13.6** és **D 22.1** definíciók, valamint a **T 7.22** tétel segítségével kapjuk az állítást.



149. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz például a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ sor konvergens. Akkor **T 22.29** szerint a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) - \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

sor is konvergens, ami ellentmond a tétel feltételének.

150. Divergens. **151.** Divergens. **152.** Divergens.

153. Konvergens (l. a **74.** feladat megoldását).

154. A **D 22.14** definíció alapján az állítás egyszerűen belátható.

155. $s = \sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^k = s_n + \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} aq^k = s_n + q^{n+1}\sum\limits_{k=0}^{\infty} aq^n$,

amelyből **T 22.5** segítségével kapjuk az állítást.

156. Legyen $[s_{k_j}; j \in \mathbf{N}^+]$ a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor részletösszegeinek egy konvergens részsorozata és s_m a sor m-edik részletösszege. Minden m-hez van olyan k_j és $t \in \mathbf{N}$, hogy $m = k_j + t$. Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{j\to\infty}(s_{k_j} + a_{k_j+1} + \cdots + a_{k_j+t}) = \lim_{j\to\infty} s_{k_j}.$$

157. Legyen a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens sor n-edik részletösszege s_n, és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ egy átrendezése, amelynek n-edik részletösszege t_n. Megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0$, amiből azonnal adódik az eredmény. Bármely pozitív ϵ-hoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor minden $p \in \mathbf{N}^+$ esetén $|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{2}$ (T 22.4). Legyen $n_1 > n_0$ olyan nagy, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor n_0-nál nem nagyobb indexű tagjai mind előforduljanak a $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sor n_1-nél nem nagyobb indexű tagjai között. Ha $n > n_1$, akkor az $s_n - t_n$ különbségben nem szerepelnek azok a tagok, amelyeknek a $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sorban n_0-nál nem nagyobb az indexük. Ezért s_n-ből és t_n-ből is olyan tagok maradnak csak meg, amelyeknek indexe az eredeti sorban n_0-nál nagyobb, ezért $|s_n - t_n| < \epsilon$.

158. Jelöljük a sor összegét s-sel, részletösszegeit s_t-vel, a tagok felcserélésével adódó $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor részletösszegeit pedig S_t-vel ($t \in \mathbf{N}^+$). Bármely $k \in \mathbf{N}^+$ esetén $S_{2k} = s_{2k}$ és $S_{2k-1} = s_{2k} - a_{2k-1}$. T 22.3 és T 7.15 szerint $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$, ezért

$$s = \lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} S_{2k-1}.$$

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is. Ha ugyanis a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens lenne, akkor az előbbi gondolatmenettel azt kapnánk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

159. Feltételesen konvergens sor végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz. Ugyanis, ha a sor véges számú pozitív vagy véges számú negatív tagot tartalmazna, akkor abszolút konvergens lenne. A sor részletösszegei, véges sok kivételével, tartalmaznak pozitív és negatív tagot is; ez azt jelenti, hogy véges sok részletösszeg kivételével felírhatók a pozitív illetve a negatív tagokból (eredeti sorrendben) alkotott sorok részletösszegeinek megfelelő összegeként. Az utóbbi két sor minden részletösszege előfordul az eredeti sor valamelyik részletösszegében összeadandóként. Ezért az eredeti sor (feltételes) konvergenciája csak úgy állhat fenn, hogy vagy a pozitív és a negatív

tagokból álló sorok részletösszegeinek sorozata is konvergens, vagy az előbbi a végtelenhez, az utóbbi a mínusz végtelenhez divergál. Ha azonban a részletösszegek mindkét sorozata konvergens volna, akkor az eredeti sor abszolút konvergens lenne, ami ellentmondana a feltételnek, hogy a sor feltételesen konvergens. Kaptuk, hogy a sor pozitív, illetve negatív tagjaiból eredeti sorrendben képzett sorok divergensek. Tegyük fel, hogy a két sornak van olyan átrendezése, hogy a sorok konvergensek. Ez azt jelenti, hogy az eredeti sornak van olyan átrendezése, amelyik abszolút konvergens. Ez azonban **T 22.19** miatt lehetetlen.

160. Legyen s tetszőleges valós szám. Alkossuk meg a sor pozitív tagjaiból a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, a negatív tagjaiból pedig a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ sort. Az előző feladat megoldása szerint az előbbi a ∞-hez, az utóbbi pedig a $-\infty$-hez divergál. Tegyük fel, hogy $s \geq 0$ (az $s < 0$ eset hasonlóan bizonyítható). Legyenek

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1-1} \leq s,$$

$$s_{k_1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1-1} + b_{k_1} > s,$$

$$s_{k_1} + c_1 + c_2 + \cdots + c_{l_1-1} \geq s,$$

$$s_{k_1+l_1} = s_{k_1} + c_1 + c_2 + \cdots + c_{l_1-1} + c_{l_1} < s,$$

$$s_{k_1+l_1} + b_{k_1+1} + +b_{k_1+2} \cdots + b_{k_2-1} \leq s,$$

$$s_{k_2+l_1} = s_{k_1+l_1} + b_{k_1+1} + b_{k_1+2} + \cdots + b_{k_2-1} + b_{k_2} > s,$$

$$s_{k_2+l_1} + c_{l_1+1} + c_{l_1+2} + \cdots + c_{l_2-1} \geq s,$$

$$s_{k_2+l_2} = s_{k_2+l_1} + c_{l_1+1} + c_{l_1+2} + \cdots + c_{l_2-1} + c_{l_2} < s,$$

Ezt az eljárást minden határon túl folytatva az

$$s_{k_1}, \quad s_{k_1+l_1}, \quad s_{k_2+l_1}, \ldots, s_{k_j+l_j}, \quad s_{k_{j+1}+l_j}, \ldots$$

sorozatot kapjuk, amely a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor megfelelő átrendezésével adódó sor részletösszegeinek egy részsorozata. Látható, hogy

$$s_{k_1} - s \leq b_{k_1}, \quad |s_{k_j+l_j} - s| \leq |c_{l_j}|, \quad s_{k_{j+1}+l_j} - s \leq b_{k_{j+1}} \quad (j \in \mathbf{N}^+).$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, ezért a részletösszegek előbbi részsorozata s-hez tart, ami a **156.** feladat szerint azt jelenti, hogy az átrendezett sor összege s. Végül megadjuk a sor egy divergens átrendezését a következő részletösszegek segítségével:

$$s_{t_1} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{t_1} > 1, \quad s_{t_1+1} = s_{t_1} + c_1,$$

$$s_{t_2+1} = s_{t_1+1} + b_{t_1+1} + b_{t_1+2} \cdots + b_{t_2} > 2, \quad s_{t_2+2} = s_{t_2+1} + c_2, \ldots.$$

22.20

161. $k=1$ esetben a két sor megegyezik. Tegyük fel, hogy $k>1$. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$b_j = a_{(j-1)k+1} + a_{(j-1)k+2} + \cdots + a_{jk}, \quad S_t = \sum_{j=1}^{t} b_j, \quad s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor **D 22.1** szerint $\lim_{m\to\infty} s_m = s$ a sor összege. Mivel $S_t = s_{tk}$, ezért **T 7.15** szerint $\lim_{t\to\infty} S_t = s$. Fordítva, legyen $\lim_{t\to\infty} S_t = s$. Ha $m \in \mathbf{N}$, akkor vannak olyan $t, r \in \mathbf{N}$ számok, hogy $m = tk + r$ és $0 \le r < k$. Ha $m \ge k$, akkor $t \in \mathbf{N}^+$ és $s_m = S_t + a_{tk+1} + a_{tk+2} + \cdots + a_{tk+r}$. Nyilvánvaló, hogy $m \to \infty$ akkor és csak akkor, ha $t \to \infty$. Így

$$\lim_{m\to\infty} s_m = \lim_{t\to\infty} (S_t + +a_{tk+1} + a_{tk+2} + \cdots + a_{tk+r}),$$

mivel $\lim_{t\to\infty} a_{tk+1} = \lim_{t\to\infty} a_{tk+2} = \cdots = \lim_{t\to\infty} a_{tk+r} = 0.$

162. Jelöljük a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor n-edik részletösszegét h_n-nel. Az átrendezett sor $5k$-adik részletösszege:

$$s_{5k} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8k-7} + \frac{1}{8k-5} + \frac{1}{8k-3} + \frac{1}{8k-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k}\right),$$

$$s_{5k} = h_{8k} - \frac{1}{2}h_{4k} - \frac{1}{2}h_k =$$

$$(h_{8k} - \ln 8k) - \frac{1}{2}(h_{4k} - \ln 4k) - \frac{1}{2}(h_k - \ln k) + \ln 8k - \frac{1}{2}\ln 4k - \frac{1}{2}\ln k.$$

Így $\lim_{k\to\infty} s_{5k} = c - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}c + \lim_{k\to\infty} \ln \frac{8k}{\sqrt{k}\sqrt{4k}} = 2\ln 2$. A **156.** feladat szerint a sor összege $2\ln 2$.

163. Az előző feladat megoldásában szereplő módszert alkalmazzuk:

$$s_{5k} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{6k-5} + \frac{1}{6k-3} + \frac{1}{6k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right),$$

ezért $s_{5k} = h_{6k} - \frac{1}{2}h_{3k} - \frac{1}{2}h_{2k}$. A sor összege: $\frac{1}{2}\ln 6$.

164. A **162.** feladat megoldásában szereplő módszert alkalmazzuk:

$$s_{\frac{k(k+1)}{2}+k} = h_{k(k+1)} - \frac{1}{2}h_{\frac{k(k+1)}{2}} - \frac{1}{2}h_k,$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{\frac{k(k+1)}{2}+k} = \infty.$$

165. Ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, akkor bármely pozitív ϵ-hoz van olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor $\frac{a_n}{b_n} < \epsilon$ (**D 7.13**). Ha tehát n_0 az $\epsilon = 1$-hez tartozó küszöbszám, akkor $n > n_0$ esetén $a_n < b_n$, ami szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens (**T 22.7**). A feladat másik állítása hasonlóan bizonyítható.

166. **T 22.3** szerint $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$, ezért van olyan pozitív u minden $n \in \mathbf{N}^+$ esetén, hogy $|a_n| < u$. Ez azt jelenti, hogy $\sum_{n=1}^{k}|a_nb_n| < u\sum_{n=1}^{k}|b_n|$ minden pozitív egész k-ra. Ebből **T 22.7** szerint adódik az állítás. Megfordítása nem igaz, mert például a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ sor abszolút konvergens, de a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sor divergens.

167. Az előző feladathoz hasonlóan bizonyítható.

168. Belátható, hogy $AB_k = \sum_{n=0}^{k} s\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^k$. Eszerint M_1 az $AC = \sum_{n=0}^{\infty} s\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n$ feltételt kielégítő C pontban éri utol M_2-t (ha létezik ilyen C). Mivel $\frac{v_2}{v_1} < 1$, ezért **T 22.5** szerint az előbbi mértani sor konvergens és $AC = \frac{sv_1}{v_1 - v_2}$. Hasonlóan mutatható meg, hogy ezt az utat $t = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s}{v_1}\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n = \frac{s}{v_1 - v_2}$ idő alatt teszi meg M_1.

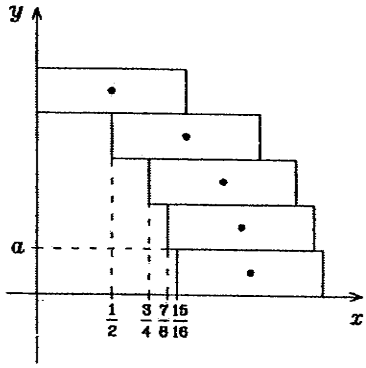
169. Homogén tömegeloszlású $m_1, \ldots, m_n$ tömegű merev testekből álló rendszer $S(x_1, x_2, x_3)$ tömegközéppontjának koordinátái az

$$\frac{m_1x_{j1} + m_2x_{j2} + \cdots + m_nx_{jn}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

($j = 1, 2, 3$) képlettel számíthatók ki, ahol

$S_k(x_{1k}, x_{2k}, x_{3k}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

az m_k tömegű test tömegközéppontja.



Vízszintes alapon nyugvó, legalább három pontban alátámasztott merev test akkor van stabil egyensúlyi helyzetben, ha a tömegközéppontján átmenő függőleges egyenes átmegy az alátámasztási felületen. Ennek ellenőrzésére elegendő az ábrán látható síkmetszetet tekinteni. Legyen egy-egy téglatest tömege 1. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az $(n+1)$-edik téglatest feletti alakzat tömegközéppontjának koordinátái az ábra szerinti koordinátarendszerben: $x_1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$, $\quad x_2 = \frac{a}{2}(n+2)$. (Az nyilvánvaló, hogy $x_3 = \frac{b}{2}$.) Ez azt jelenti, hogy az alakzat tömegközéppontján átmenő függőleges egyenes átmegy az alátámasztási felületen. $d = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$, ezért **T 22.13** szerint d bármilyen nagy lehet.

23. Függvénysorozatok és sorok (megoldások)

1. $D = \mathbf{C} - \{-3n; n \in \mathbf{N}^+\}$. Ha $z \in D$, akkor

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 z + 6n}{3n^2 + nz} = \lim_{n\to\infty} \frac{z + \frac{6}{n}}{3 + \frac{z}{n}} = \frac{z}{3},$$

ezért $K = D$.

2. $D = \mathbf{C}$. Ha $|z| < 1$, akkor például **T 7.35** szerint $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = 0$. Ha $|z| > 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} |z|^n = \infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$ nem létezik. Ha $|z| = 1$, akkor a **7.78.** feladat szerint a $\lim\limits_{n\to\infty} z^n$ határérték akkor és csak akkor létezik, ha $z = 1$. Tehát $K = (-1, 1]$. A határfüggvény:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |z| < 1, \\ \frac{7}{12}, & \text{ha } z = 1. \end{cases}$$

3. $D = K = (-\infty, -1] \cup [1, \infty), \quad f(x) = 2\sqrt{x^2 - 1}.$

4. $D = \mathbf{R} - \{0\}, \quad K = (-\infty, -1) \cup [1, \infty), \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } |x| > 1, \\ 2, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$

5. $D = \mathbf{R}, \quad K = \mathbf{R} - \{-1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$

6. $D = K = \mathbf{R}, \quad f(x) = e^x$ (l. 7.164. feladat)

7. $D = K = \mathbf{R}, \quad f(x) = 0.$

8. $D = \mathbf{R}, \quad K = [0, \infty), \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x > 0, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

9. $D = \mathbf{R}, \quad K = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq (2k+1)\pi,\ x \neq (2l + \frac{3}{2})\pi,\ k, l \in \mathbf{N}\},$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi \text{ és } x \neq 2l\pi, \\ 1, & \text{ha } x = (2k + \frac{1}{2})\pi \text{ vagy } x = 2l\pi. \end{cases}$$

10. $D = \mathbf{R}^+, \quad K = (e^{-1}, e], \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } e^{-1} < x < e, \\ 1, & \text{ha } x = e. \end{cases}$

11. $D = \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. Ha $x = 0$, akkor a sorozat divergens. Legyen $x > 0$. Rögzítsük az x értékét, s vizsgáljuk meg a $\lim\limits_{y\to\infty} y\left(x^{\frac{1}{y}} - 1\right)$ $(y \in \mathbf{R}^+)$ függvényhatárértéket. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt (**T 11.12**):

$$\lim_{y\to\infty} y\left(x^{\frac{1}{y}} - 1\right) = \lim_{y\to\infty} x^{\frac{1}{y}} \ln x = \ln x.$$

Ezért $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \ln x. \quad K = (0, \infty), \quad f(x) = \ln x.$

12. $D = \mathbf{R}$. Ha $x = 0$, akkor $n \sin \frac{x}{n} = 0$. Ha $x \neq 0$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} n \sin \frac{x}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} x = x.$$

Tehát $K = \mathbf{R}$, $\quad f(x) = x$.

13. $D = \mathbf{R}^+$. Alkalmazzuk a L'Hospital-szabályt: $K = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = x \ln x$.

14. $D = \mathbf{R}^+$. A L'Hospital-szabály alkalmazásával: $K = \mathbf{R}^+$, $\quad f(x) = 0$.

15. $D = \mathbf{R}$. Ha $|1 - x| > 1$, azaz $x < 0$ vagy $x > 2$, akkor a sorozat divergens. Legyen $0 \leq x < 1$, és alkalmazzuk az $g(y) = yx(1-x)^y$ függvény végtelenben vett határértékének kiszámításához a L'Hospital-szabályt:

$$\lim_{y\to\infty} g(y) = \lim_{y\to\infty} \frac{yx}{(1-x)^{-y}} = \lim_{y\to\infty} \frac{yx}{e^{-y\ln(1-x)}} = \lim_{y\to\infty} \frac{x(1-x)^y}{-\ln(1-x)} = 0.$$

Ha $x = 1$, akkor $nx(1-x)^n = 0$. Ha $1 < x < 2$, akkor vizsgáljuk külön a páros indexű, illetve a páratlan indexű elemekből álló részsorozatot: legyen $h(y) = 2yx(1-x)^{2y} = 2yx(x-1)^{2y}$, illetve $k(y) = (2y-1)x(1-x)^{2y-1}$. Hasonló számítással mint a $g(y)$-nál kapjuk, hogy $\lim_{y\to\infty} h(y) = 0$. A $k(y)$ függvényen a következő átalakítást hajtsuk végre:

$$k(y) = (2y-1)x(-1)^{2y-1}(x-1)^{2y-1} =$$

$$(2y-1)x(-1)(x-1)^{2y-1} = x(x-1)^{2y-1} - \frac{x}{x-1} 2y(x-1)^{2y},$$

amiből, a $\lim\limits_{y\to\infty} 2y(x-1)^{2y} = 0$ eredményt is figyelembe véve, $\lim\limits_{y\to\infty} k(y) = 0$ adódik. Ha $x = 2$, akkor a sorozat divergens. Ezeket az eredményeket felhasználva kapjuk, hogy: $K = [0, 2)$, $\quad f(x) = 0$.

16. $D = \mathbf{C} - \{-1\}$. Ha $z = 0$, akkor a sor konvergens. Mivel $\frac{1}{1+z}$ hányadosú mértani sorról van szó, ezért **T 22.28** szerint $z \neq 0$ esetben akkor és csak akkor konvergens (egyúttal abszolút konvergens is), ha $\frac{1}{|1+z|} < 1$. A konvergenciatartomány a komplex számsíknak a -1 középpontú 1 sugarú körön kívüli része, hozzászámítva a 0 komplex számot. **T 22.5** szerint

$$s(z) = \begin{cases} \frac{z}{1-\frac{1}{1+z}} = z + 1, & \text{ha } |1+z| > 1, \\ 0, & \text{ha } z = 0. \end{cases}$$

17. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq -1\}$. **T 22.28** szerint a sor akkor és csak akkor konvergens (abszolút konvergens is), ha $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$, azaz $0 < x$.

$$s(x) = \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x-1}{2}.$$

18. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq 1\}$, $\quad K = (-\infty, 0)$, $\quad s(x) = (x+1)\frac{1}{1 - \frac{x+1}{x-1}} = \frac{1-x^2}{2}$.

19. $D = \mathbf{R}, \quad K = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}, \quad s(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$

20. $D = \{x \in \mathbf{R}; x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, $K = \{x \in \mathbf{R}; -\frac{\pi}{4}+k\pi < x < \frac{\pi}{4}+k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$,

$$s(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\operatorname{tg} x}, & \text{ha } x \neq k\pi, \\ 0, & \text{ha } x = k\pi. \end{cases}$$

21. $D = K = \mathbf{C}, \quad s(x) = \begin{cases} \frac{(z^2+1)^2}{z^2+2}, & \text{ha } z \neq 0, \\ 0, & \text{ha } z = 0. \end{cases}$

22. $D = \mathbf{R}$. Ha $0 < a < 1$, akkor $K = \mathbf{R}^- = \{x \in \mathbf{R}; x < 0\}$; ha $a = 1$, akkor $K = \emptyset$; ha pedig $a > 1$, akkor $K = \mathbf{R}^+$.

$$s(x) = \frac{1}{1-a^{-x}} = \frac{a^x}{a^x - 1}; \quad a \neq 1.$$

23. $D = \mathbf{C}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{n} - \frac{z}{n+1}\right)$, ezért a sor k-adik részletösszege

$$s_k(z) = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{z}{n} - \frac{z}{n+1}\right) = z - \frac{z}{k+1}, \text{ így } s(z) = \lim_{k\to\infty} s_k(z) = z, \quad K = \mathbf{C}.$$

24. $D = \mathbf{R}$. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-x}}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$,

így a sor k-adik részletösszege

$$s_k(x) = \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right), \text{ ha } k \geq 3,$$

ezért $s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k = \frac{3}{4} e^{-x}, \quad K = \mathbf{R}.$

25. $D = K = \mathbf{R}^+, \quad s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \ln x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+k+1}\right) = \frac{\ln x}{x+1}.$

26. $D = K = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq 0, -1, -2, \ldots\}, \quad s(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$

27. $D = \mathbf{C} - \{0\}$. Belátható, például a **7.74** feladat alapján, hogy $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{z^n} = 0$ akkor és csak akkor, ha $|z| > 1$; a **T 22.3** szerint tehát csak a $|z| > 1$ esetben lehet konvergens a sor. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot (**T 22.25**):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|z|^{n+1}} \cdot \frac{|z|^n}{n} = \frac{1}{|z|} < 1,$$

azaz a sor a $|z| > 1$ esetben abszolút konvergens, s így konvergens is. A sor $(k+1)$-edik részletösszege:

$$s_{k+1}(z) = \frac{1}{z}\left(\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{z^k}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \cdots + \frac{k}{z^k}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{z-1}\left(1 - \frac{1}{z^{k+1}}\right) + \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{z^n},$$

ezért $s(z) = \lim_{k\to\infty} s_{k+1}(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{s(z)}{z}$, amelyből $s(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$.

28. $D = \mathbf{C}$. Ha $z = 0$, akkor a sor konvergens. A $z \neq 0$ esetben az előző feladat megoldásához hasonló módon járunk el. Konvergenciatartomány a komplex számsík 0 középpontú egységsugarú körének belseje (ahol a sor abszolút konvergens is). Az összegfüggvény: $s(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$. Megoldhatjuk azonban a feladatot a következő módon is: $z = 0$ esetben a sor konvergens; $z \neq 0$ esetben a $z = \dfrac{1}{w}$ helyettesítéssel visszavezetjük az előző feladatra.

29. $D = \mathbf{C}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)z^n = 0$ akkor és csak akkor, ha $|z| < 1$. Ebben az esetben az előző feladatot is felhasználva:

$$s(z) = \lim_{k\to\infty} s_k(z) = \lim_{k\to\infty}\left(2\sum_{n=1}^{k} nz^n + \sum_{n=1}^{k} z^n\right) = \frac{2z}{(1-z)^2} + \frac{z}{1-z} = \frac{3z-z^2}{(z-1)^2}.$$

Konvergenciatartomány a komplex számsík 0 középpontú egységsugarú körének belseje (ahol a sor abszolút konvergens is).

30. $D = \mathbf{C}$. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2z^n = 0$ akkor és csak akkor, ha $|z| < 1$. A hányadoskritériumot (T 22.25) vagy a gyökkritériumot (T 22.24) alkalmazva kapjuk, hogy $|z| < 1$, esetben a sor abszolút konvergens, tehát konvergens is. Az előző két feladat eredményét is felhasználva:

$$s(z) = \lim_{k\to\infty} s_{k+1}(z) = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k+1} n^2z^n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(n+1)^2z^{n+1} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} n^2z^{n+1} + \sum_{n=0}^{k}(2n+1)z^{n+1}\right) =$$

$$= z\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{k} n^2z^n + \sum_{n=1}^{k}(2n+1)z^n + 1\right) = z\left(s(z) + \frac{3z-z^2}{(z-1)^2} + 1\right);$$

$$|z| < 1, \quad s(z) = \frac{z(z+1)}{(1-z)^3}.$$

31. $D = \mathbf{R}$. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\cos nx|}{n^4+x^2}$ függvénysort majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ konvergens sor, ezért az minden x valós szám esetén abszolút konvergens (l. T 22.22 és T 22.13).

32. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq -2\}$. Ha $x = 2$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $x \neq 2$, akkor alkalmazzuk a hányadoskritériumot (T 22.25):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\cdot\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{n+1}\right|\cdot\left|\frac{2n-1}{(-1)^n}\cdot\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^n\right| = \left|\frac{2-x}{2+x}\right|.$$

Ha $\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right| < 1$, azaz $x > 0$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right| > 1$, azaz $-2 < x < 0$ vagy $x < -2$, akkor a sor divergens. Ha $\left|\dfrac{2-x}{2+x}\right| = 1$, azaz $x = 0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n-1}$ Leibniz-sort (T 22.14) kapjuk, amely feltételesen konvergens, mivel T 22.13 szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ sort minorálja (T 22.19) az $\frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor.

33. $D = \mathbf{R}$. Ha $x = 0$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $x \neq 0$, akkor a hányadoskritérium (T 22.25) szerint $\frac{4|x|}{1+4x^2} < 1$ feltétel mellett a sor abszolút konvergens. Ez az egyenlőtlenség pedig $x \neq \pm\frac{1}{2}$ esetben mindig teljesül. Ha $x = \frac{1}{2}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$ sort kapjuk. Teljes indukcióval megmutatható, hogy ha $n \geq 4$, akkor $\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} > \frac{1}{n}$, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens sor minorálja az adott sort, így az is divergens. Ha $x = -\frac{1}{2}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}$ sort kapjuk. Megmutatjuk, hogy a sor Leibniz-sor, de csak feltételesen konvergens, mert a sor tagjainak abszolút értékeiből alkotott sor az $x = \frac{1}{2}$-hez tartozó sor.

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} > \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdots 2n(2n+2)} \iff 1 > \frac{2n+1}{2n+2},$$

és az utóbbi nyilvánvalóan igaz, ezért a tagok abszolút értékeiből alkotott sorozat (szigorúan) monoton csökkenő.

$$0 < \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{n} \leq \frac{1}{2^n}\cdot n\cdot\frac{2n-1}{n} = \frac{2n-1}{2^n},$$

mert a $\left[\frac{2n-1}{n}\right]$ sorozat szigorúan monoton növekvő. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2^n} = 0$, ezért a rendőr-elv (T 7.30) miatt a tagok sorozata nullasorozat. $K = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq \frac{1}{2}\}$.

34. $D = \{z \in \mathbf{C};\ z \neq \pm\frac{i}{2}\}$. A $z = 0$ esetben a sor abszolút konvergens. Az $z \neq 0$ esetben, ha $\left|\frac{4z}{1+4z^2}\right| < 1$, akkor a sor abszolút konvergens (l. a **33.** feladat megoldását).

$$\left|\frac{4z}{1+4z^2}\right| = \frac{4|z|}{|1+4z^2|} \geq \frac{4|z|}{1+4|z|^2} \quad \text{és}$$

$$\frac{4|z|}{1+4|z|^2} \geq 1 \iff 0 \geq (2|z|-1)^2 \iff |z| = \frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha $|z| \neq \frac{1}{2}$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $|z| = \frac{1}{2}$, akkor van olyan $0 \leq \varphi < 2\pi$, hogy $z = \frac{1}{2}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ (D 6.12). ($z \neq \pm\frac{i}{2}$ miatt $\varphi \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.)

$$\frac{4z}{1+4z^2} = \frac{2(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{1+\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi} = \frac{2(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{2\cos^2\varphi + i2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

A sor így a következő alakban adható meg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right)^n.$$

Ha $(0<)|\cos\varphi|<1$, akkor $\dfrac{1}{|\cos\varphi|}>1$. A **33.** feladat megoldásában megmutattuk, hogy ha $n\geq 4$, akkor $\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}>\dfrac{1}{n}$. Belátható például L'Hospital-szabállyal (**T 11.22**), hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1}{\cos\varphi}\right|^n\dfrac{1}{n}=\infty$. **T 22.3** szerint a sor divergens. Ha $|\cos\varphi|=1$, akkor $z=\pm\frac{1}{2}$. Ezekben az esetekben a konvergencia vizsgálatát a **33.** feladat megoldásában elvégeztük. A konvergenciatartományba a komplex számsík azon pontjai tartoznak, amelyek nem esnek az 0 középpontú $\frac{1}{2}$ sugarú körvonalra, valamint a körvonal $-\frac{1}{2}$ pontja. A $-\frac{1}{2}$ pont kivételével a konvergenciatartomány minden pontjában a sor abszolút konvergens.

35. $D=\{x\in\mathbf{R};\ x\neq 0\}$. Ha $x>0$, akkor a sor divergens, ha pedig $x<0$, akkor feltételesen konvergens.

36. $D=\mathbf{R}-\{0\}$. Ha $x\in\mathbf{Z}-\{0\}$, akkor a sor feltételesen konvergens. Ha $x\in\mathbf{R}^+-\mathbf{Z}$, akkor abszolút konvergens. (Használjuk például a gyökkritériumot (**T 22.24**).) Ha $x\in\mathbf{R}^- -\mathbf{Z}$, akkor a sor divergens.

37. Ha $|x|\leq 1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^{2n}}\neq 0$ miatt a sor divergens. Ha $|x|>1$, akkor a sort majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}$ konvergens mértani sor.

38. $D=\{z\in\mathbf{C};\quad z^{2n}+1\neq 0,\quad n\in\mathbf{N}^+\}$; **T 6.16** szerint $z^{2n}+1\neq 0$ akkor és csak akkor, ha $z\neq\cos\dfrac{2k+1}{2n}\pi+i\sin\dfrac{2k+1}{2n}\pi\quad(k=0,1,2,\dots,2n-1)$. (Nyilvánvaló, hogy ebben az esetben $|z|=1$.) Ha $|z|<1$, akkor

$$\left|\frac{1}{1+z^{2n}}\right|=\frac{1}{|1+z^{2n}|}\geq\frac{1}{1+|z|^{2n}}\geq\frac{1}{2}$$

miatt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+z^{2n}}\neq 0$, ezért **T 22.3** szerint a sor divergens. Ha $|z|>1$, akkor alkalmazzuk a hányadoskritériumot (**T 22.25**):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+z^{2n}}{1+z^{2n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{z^{2n}}+1}{\frac{1}{z^{2n}}+z^2}\right|=\frac{1}{|z|^2}<1,$$

azaz a sor abszolút konvergens. Ha $|z|=1$, akkor van olyan $0\leq\varphi<2\pi$, hogy $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$ és $\varphi\neq\frac{2k+1}{2n}\pi$ $(n\in\mathbf{N}^+,\ k=0,1,2,\dots,2n-1)$.

$$\frac{1}{1+z^{2n}}=\frac{1}{1+\cos 2n\varphi+i\sin 2n\varphi}=\frac{1}{2\cos^2 n\varphi+i2\sin n\varphi\cos n\varphi}=$$

$$\frac{1}{2\cos n\varphi}(\cos n\varphi-i\sin n\varphi)=\frac{1}{2}(1-i\,\mathrm{tg}\,n\varphi).$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} n\varphi$ akkor és csak akkor létezik a megengedett φ szögek esetén, ha $\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pi$. Mivel $\cos n\varphi \neq 0$ a megengedett φ szögek esetén, ezért $\operatorname{tg}(n+1)\varphi$ kiszámítására alkalmazható a $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$ azonosság. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} n\varphi = a$. Akkor

$$a = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tg}(n+1)\varphi = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} n\varphi + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg} n\varphi \operatorname{tg}\varphi} = \frac{a + \operatorname{tg}\varphi}{1 - a\operatorname{tg}\varphi},$$

amiből $(1 + a^2)\operatorname{tg}\varphi = 0$. Ez azonban a lehetséges φ szögek esetén csak $\varphi = 0$ vagy $\varphi = \pi$ esetben igaz. Ha $\varphi = 0$, akkor $z = 1$, ha pedig $\varphi = \pi$, akkor $z = -1$. Mindkét esetben a sor divergens. Tehát $K = \{z \in \mathbf{C};\ |z| > 1\}$.

39. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x > -2\}$. Alkalmazható a hányados- vagy a gyökkritérium. Ha $x > -\frac{17}{9}$, akkor a sor abszolút, ha pedig $x = -\frac{17}{9}$, akkor feltételesen konvergens. $K = [-\frac{17}{9}, \infty)$.

40. $D = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{R}^+$. Ha $x > 1$, akkor a sor abszolút konvergens, ha $0 < x \leq 1$, akkor pedig feltételesen konvergens.

41. $D = \{z \in \mathbf{C};\ z \neq 0\}$, $K = \emptyset$ (l. a **7.73** feladatot).

42. $D = K = \mathbf{C} - \{-3\}$, a sor mindenütt abszolút konvergens.

43. $D = \mathbf{R}$, $K = (-\infty, -1)$, a sor a konvergenciatartományon mindenütt abszolút konvergens.

44. $D = \mathbf{R}$. Ha $0 < x$, akkor a gyökkritériumot alkalmazhatjuk:

$$\frac{\sqrt[n]{|\sin nx|}}{e^x} \leq \frac{1}{e^x} < 1,$$

azaz a sor abszolút konvergens. Ha $x < 0$ és minden n-re $\sin nx \neq 0$, akkor a **T 22.3** szerint a sor divergens, mivel $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{e^{nx}} \neq 0$. Ez utóbbit a következő módon bizonyíthatjuk. Tegyük fel, hogy $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{e^{nx}} = 0$. A Bolzano–Weierstrass-tétel (**T 7.17**) szerint a $[\sin nx]$ sorozatnak van konvergens részsorozata. Legyen $[a_n]$ a $[\sin nx]$ sorozat egy konvergens részsorozata. Mivel $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{e^{nx}} = \infty$, ezért $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, mert különben $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{e^{nx}} \neq 0$. A **7.66.** feladat szerint azt kapjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} \sin nx = 0$. Így

$$\lim_{n\to\infty} \cos nx \sin x = \lim_{n\to\infty} (\sin(n+1)x - \sin nx \cos x) = 0,$$

amiből $\lim_{n\to\infty} \cos nx = 0$ adódik. Ez azonban lehetetlen, mivel minden n-re $\sin^2 nx + \cos^2 nx = 1$. Vizsgáljuk meg végül, hogy $\sin nx = 0$ milyen esetekben teljesül. Nyilvánvaló, hogy van olyan $k \in \mathbf{R}$, hogy $x = k\pi$. Így $\sin nk\pi = 0$. Ez az jelenti, hogy $nk \in \mathbf{Z}$. Ebből következik, hogy $k \in \mathbf{Q}$. Ha $k \in \mathbf{Z}$, akkor $\sin nx = 0$ minden n-re teljesül. Ha $k \neq \mathbf{Z}$, akkor végtelen sok n-re $\sin nx \neq 0$, ezért **T 7.15** alapján ebben az esetben is $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin nx}{e^{nx}} \neq 0$.

$K = \mathbf{R}^+ \cup \{k\pi;\ k \in \mathbf{Z},\ k \leq 0\}$.

45. $D = \mathbf{R}$, $K = \mathbf{R}^+$, a konvergenciatartomány minden pontjában abszolút konvergens a sor.

46. $D = \mathbf{R}^+$, $K = [e^{-1}, e)$. Ha $x = e^{-1}$, akkor a sor feltételesen konvergens. A konvergenciatartomány többi pontjában a sor abszolút konvergens.

47. $D = \mathbf{R}$. T 22.28 szerint a sor akkor és csak akkor konvergens, ha $e^{\sin x} < 1$; ebben az esetben a sor abszolút konvergens is.
$K = \{x \in \mathbf{R};\ (2k-1)\pi < x < 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

48. Ha $a \neq 0$, akkor $D = \{x \in \mathbf{R};\ 0 \le x\}$. Ha $a = 0$, akkor $D = \emptyset$. Ha $|a| > 1$, akkor $D = K$, mert a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{|a|^n\sqrt{4+nx}}$ sort majorálja a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{|a|}\right)^n$ konvergens mértani sor, ezért a sor abszolút konvergens. Ha $0 < |a| < 1$, akkor $K = \emptyset$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a|^n\sqrt{4+nx}} = \infty$, ami azt jelenti, hogy a sor divergens. ($x = 0$ esetben nyilvánvaló, $x > 0$ esetben például L'Hospital-szabállyal állapítható meg.) Ha $a = -1$, akkor $K = \emptyset$, mert a $\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1+x}}$ divergens sor minorálja a sort. Ha $a = 1$, akkor $K = \mathbf{R}^+$, és a sor a konvergenciatartomány minden pontjában feltételesen konvergens.

49. $D = \mathbf{R}$. A sor Leibniz-sor, ezért mindenütt konvergens, de nem abszolút konvergens, mert a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+\sin x}$ sort minorálja a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergens sor.

50. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq -\frac{1}{2}\}$, $K = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, \infty)$. A sor a konvergenciatartományon abszolút konvergens.

51. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \ge 0\}$, $K = \mathbf{R}^+$. A sor a konvergenciatartomány minden pontjában abszolút konvergens.

52. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq 0\}$, $K = \{x \in \mathbf{R};\ |x| > 1\}$. A sor a konvergenciatartományon abszolút konvergens.

53. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq (2k+1)2^{n-1}\pi,\ n \in \mathbf{N}^+,\ k \in \mathbf{Z}\}$. Ha $x = 0$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $x \neq 0$, akkor alkalmazzuk a hányadoskritériumot. A L'Hospital-szabályt is felhasználva kapjuk, hogy $|x| < 2$ esetben a sor abszolút konvergens, $|x| > 2$ esetben pedig divergens. Ha $|x| = 2$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}}$, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}}$ sort kapjuk.

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\cos \frac{1}{2^{n-1}}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2^{n-1}}} = 2,$$

ezért a két sor divergens. A konvergenciatartomány: $K = (-2, 2)$.

54. $D = \{x \in \mathbf{R};\ x \neq k\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n},\ k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}^+\}$. Alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{n}\right)\right| = |\operatorname{tg} x| < 1,$$

azaz ha $-\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), akkor a sor abszolút konvergens. Legyen $|\operatorname{tg} x| = 1$, azaz $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Ha $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, akkor

$\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{n}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)>1$ $(n\geq 2)$, így **T 22.3** szerint a sor divergens. Ha $x=-\frac{\pi}{4}$, akkor $\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{n}\right)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)$. Ha $n\geq 2$, akkor $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}>0$, s így $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n}\right)>0$. Mivel

$$\lim_{y\to\infty}\operatorname{tg}^y\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{y}\right)=\lim_{y\to\infty}e^{y\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{y}\right)}=e^{-2}$$

(a L'Hospital-szabály alkalmazásával), ezért a sor divergens.
Tehát $K=\{x\in\mathbf{R};\ -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\}$.

55. Az $\operatorname{arctg} x$ függvénynek az $x=0$ helyen az $y=x$ egyenletű egyenes inflexiós érintője, továbbá ha $x<0$, akkor a függvény konkáv, ha $x>0$, akkor pedig konvex. Ezért minden x-re $|\operatorname{arctg} x|\leq|x|$. Ez alapján

$$\left|\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^2}\right|\leq\left|\frac{2x}{x^2+n^2}\right|\leq\frac{2|x|}{n^2}.$$

A majoránskritérium (**T 22.22**) és **T 22.13** alkalmazásával nyerjük, hogy a sor mindenütt abszolút konvergens. $D=K=\mathbf{R}$.

56. $D=K=\mathbf{R}$. A sor mindenütt abszolút konvergens.

57. Az **55.** feladat megoldásához hasonló módon kapjuk, hogy minden x-re $|\sin x|\leq|x|$ teljesül. Ezt felhasználva a majoránskritérium segítségével kapjuk, hogy a sor mindenütt abszolút konvergens. $D=K=\mathbf{R}$.

58. $D=\{z\in\mathbf{C};\ z\neq\cos\frac{2k+1}{n}\pi+i\sin\frac{2k+1}{n}\pi,\ n\in\mathbf{N}^+,\ k=0,1,\ldots,n-1\}$.
Ha $|z|\geq 1$, akkor

$$\left|\frac{z^n}{z^n+1}\right|=\frac{|z|^n}{|z^n+1|}\geq\frac{|z|^n}{|z|^n+1}\geq\frac{|z|^n}{|z|^n+|z|^n}=\frac{1}{2},$$

ezért a sor divergens. Ha $|z|<1$, akkor a hányadoskritérium alkalmazásával nyerjük, hogy a sor abszolút konvergens.

59. $D=\{x\in\mathbf{R};\ x\neq-\frac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}^+\}$. Ha $x=0$, akkor a sor divergens. Ha $x\neq 0$, akkor a hányadoskritérium alkalmazásával kapjuk, hogy a sor abszolút konvergens.

60. $D=\mathbf{R}-\{0\}$, $K=(-\infty,-\frac{1}{2})\cup[1,\infty)$. A konvergenciatartomány minden pontjában abszolút konvergens a sor.

61. $D=\{z\in\mathbf{C};\ z\neq i\}$. Alkalmazzuk a hányadoskritériumot! Ha $|z-i|>1$, akkor a sor abszolút konvergens, ha pedig $|z-i|<1$, akkor divergens. Ha $|z-i|=1$, akkor $|z-i|^n=1$, s ezért **T 22.3** szerint a sor divergens.

62. $D=\mathbf{C}$. A konvergenciatartomány a 0 középpontú 1 sugarú zárt kör, amelynek minden pontjában abszolút konvergens a sor.

63. **T 23.9** szerint:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2\cdot 2^{n+1}}{n^2\cdot 2^n}=2.$$

23.9

Ez azt jelenti, hogy ha $|x-1|<2$, azaz a $(-1,3)$ nyílt intervallumban a sor abszolút konvergens. **T 22.28** szerint az $x=3$ határpontban is abszolút konvergens a sor. A majoránskritérium szerint az $x=-1$ végpontban is abszolút konvergens a sor. A konvergenciaintervallum: $K=[-1,3]$.

64. **T 23.9** szerint: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0$. Csak a 0 pontban konvergens a sor.

65. **T 23.9** szerint: $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=1$. A **7.161.** feladat alapján:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$, ezért **T 22.3** szerint $|x|=1$ esetén a sor divergens. Így $K=(-1,1)$.

66. $r=2$, $K=[-2,2)$, az $x=-2$ helyen a hatványsor feltételesen konvergens.

67. $r=\frac{\sqrt{2}}{4}$, $K=(-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$. (Ha $|x|=\frac{\sqrt{2}}{4}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n-1}}$ sort minorálja az $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ divergens sor.)

68. Tekintsük $y=x^2$-et változónak. Akkor **T 23.9** szerint $r^2=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$, amiből $r=\sqrt{3}$. Ha $|x|=\sqrt{3}$, akkor a **T 22.28** szerint sor abszolút konvergens. Tehát $K=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

69. $r=1$, $K=(-1,1)$ (l. a **33.** feladat megoldását).

70. $r=1$, $K=(1,3)$.

71. $r=\frac{1}{3}$, $K=[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$. Ha $x=-\frac{4}{3}$, akkor a sor feltételesen konvergens.

72. $r=|a|$, $K=(-|a|,|a|)$.

73. $r=1$, $K=[-1,1]$. Kimutatható, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}5^{\sqrt{n}}}$ sort majorálja a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ konvergens sor. Ehhez például L'Hospital-szabállyal megmutatható, hogy az $\left[\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}\right]$ sorozat nullasorozat. Emiatt van olyan $n_0\in\mathbf{R}$, hogy ha $n>n_0$, akkor $\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}<\dfrac{2\ln 5}{3}$, amiből átrendezéssel és a logaritmus azonosságainak felhasználásával adódik, hogy $\sqrt{n}5^{\sqrt{n}}>n^2$. Ezért, ha $|x|=1$, akkor a sor abszolút konvergens.

74. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^{n!}$ sor az a $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hatványsor, ahol $a_{n!}=n!$ és $a_{n!+1}=a_{n!+2}=\dots=a_{(n+1)!-1}=0$, ezért a konvergenciasugár meghatározására közvetlenül sem a hányados-, sem a gyökkritérium nem használható. (Megjegyezzük, hogy ezeket a kritériumokat mi speciális formában használjuk. A gyökkritériumnak egy olyan, általánosabb formájával, amelyet a tankönyv sem tárgyal, a feladat megoldható.) Alkalmazhatjuk viszont rögzített $x(\neq 0)$ esetén a hányadoskritériumot ($x = 0$ helyen a sor konvergens):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{(n+1)!}}{n!|x|^{n!}} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|^{n\cdot n!}.$$

Ha $|x| \geq 1$, akkor ez a határérték ∞. Ha $|x| < 1$, akkor $(n+1)|x|^{n\cdot n!} \leq (n+1)|x|^n$. Például L'Hospital-szabállyal megmutatható, hogy $\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|^n = 0$. Tehát $r = 1$, $K = (-1,1)$.

75. T 23.9 szerint: $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4$, $z_0 = 0$.

76. T 23.9 szerint: $r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$, $z_0 = 0$.

77. $r = e$, $z_0 = 1$.

78. $r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|1+i(n+1)|}{|1+in|} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+(n+1)^2}}{\sqrt{1+n^2}} = 1$, $z_0 = 0$.

79. $r = 2$, $z_0 = -2i$ 80. $r = 1$, $z_0 = 0$. 81. $r = \infty$, $z_0 = i - 1$.

82. Ha $a = 0$, akkor komplex számsík minden pontjában konvergens a sor. Ha $a \neq 0$, akkor $r = |a|^{-1}$; $z_0 = i$.

83. $r = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}|1-(n+1)i| = \lim\limits_{n\to\infty}(1+(n+1)^2) = \infty$, ezért a sor a komplex számsík minden pontjában konvergens.

84. $r = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+2i}{1+2ni}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{1+4n^2}} = \frac{1}{2}$, $z_0 = 0$.

85. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ sor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$ sor tagonkénti integrálásával nyert sor. Utóbbi T 22.5 és T 22.28 szerint akkor és csak akkor konvergens, s egyúttal abszolút konvergens, ha $|x| < 1$, és ebben az esetben

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ezért a $(-1,1)$ intervallumon a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ sor is konvergens, és

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Ha $|x| > 1$, akkor a sor divergens. (Ha ugyanis a sor konvergens volna egy $(-a,a)$ $(a > 1)$ intervallumon, akkor **23.10** szerint a sor tagonkénti differenciálásával adódó $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}$ sor is konvergens volna ugyanezen az intervallumon.) Az $x = -1$ és az $x = 1$ helyeken a sor divergens, ezért $K = (-1,1)$.

86. A $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ sort a $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$ sorból kapjuk kétszeres tagonkénti differenciálással. A **T 22.5** tételt is felhasználva

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad K=(-1,1).$$

87. **T 22.5** szerint $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-2}=-\frac{1}{1+x^2}$ akkor és csak akkor, ha $x\in(-1,1)$, s így

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=-\operatorname{arctg} x.$$

Az $x=1$ helyen a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ Leibniz-sort kapjuk, és ez **T 22.15** szerint konvergens. **T 23.12** alapján $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=s(1)=-\frac{\pi}{4}$. Nyilvánvaló, hogy ha $x=-1$, akkor

$$s(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.$$

88. $s(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\right)'=\left(\frac{x}{a-x}\right)'=\frac{a}{(a-x)^2}$; $K=(-|a|,|a|)$ (l. még a **72.** feladatot).

89. $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}=\frac{x}{a-x}$ $(|x|<a)$ (l. az előbbi feladatot) és

$$\int\frac{x}{a-x}\,dx=-\int\left(1+\frac{a}{x-a}\right)dx=-x-a\ln|x-a|+c,$$

ezért

$$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{na^{n-1}}=-x-a\ln(a-x)+a\ln a=a\ln\frac{a}{a-x}-x.$$

$K=[-a,a)$. Megjegyezzük, hogy $s(-a)=a(1-\ln 2)$ Szász G., Matematika II. 308. oldalán lévő példa alapján is megkapható.

90. $s(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{n+2}\right)''=\left(\frac{x^2}{a(a-x)}\right)''=\frac{2a}{(a-x)^3},\quad K=(-|a|,|a|).$

91. $s(x)=\frac{1}{(x+3)^4}$; $K=(-5,-3)$. (Célszerű a $t=x+4$ helyettesítést elvégezni, azaz a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}t^n$ sort vizsgálni. Ekkor

$$s(t)=\frac{1}{3!}\left(\frac{t^3}{1-t}\right)'''=-\frac{1}{3!}\left(t^2+t+1+\frac{1}{t-1}\right)'''.$$

92. **T 22.13** szerint, a $t = x - 1$ helyettesítést is elvégezve:
$\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}$ $(t \in (-1,1))$. $\int \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-t) + c_1$
és $\quad -\int \ln(1-t)\,dt = -t\ln(1-t) + \ln(1-t) + t + c_2$ miatt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n(n+1)} = (1-t)\ln(1-t) + t \quad (t \in (-1,1)).$$

A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens sor majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ sort, ezért a végpontokban a sor abszolút konvergens. **T 23.12** segítségével kapjuk, hogy:

$$s(x) = \begin{cases} (2-x)\ln(2-x) + x - 1, & \text{ha } 0 \le x < 2, \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases}$$

$K = [0,2]$. (A határpontokban a sor összege megkapható a **T 23.12** tétel használata nélkül is. Ezzel kapcsolatban például Szász G., Matematika II., 308. oldalon lévő példájára illetve a **23.** feladat megoldásában leírt módszerre utalunk.)

93. $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}$ $\quad(|x| < 1)$ miatt:

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^4}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right) dt =$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}, \quad K = (-1,1).$$

94. $s(x) = -\ln(4-x)$, $\quad K = [2,4)$.

95. $(e^x)^{(n)} = e^x$ miatt **D 23.18** szerint $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$. Például **T 23.9** alkalmazásával megmutatható, hogy $K = \mathbf{R}$. Ha $x > 2$, akkor a Taylor-formula n-edik maradéktagja (**D 23.16**):

$$R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \quad (2 < \xi_n < x).$$

Az e^x függvény szigorúan monoton növekvő, ezért

$$0 < R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} < \frac{e^x}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}.$$

A **7.73.** feladat szerint $\lim_{n\to\infty} e^x \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, ezért a rendőr-elv (**T 7.30**) alapján $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Ha $x < 2$, akkor $x < \xi_n < 2$ miatt

$$0 < R_n(x) = \frac{e^{\xi_n}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} < \frac{e^2}{(n+1)!}(2-x)^{n+1},$$

ezért ebben az esetben is $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ és így **T 23.19** szerint a sor a konvergenciatartományán előállítja a függvényt. **M 23.17** és **D 23.14** szerint

$$T_4(x) = e^2\left(1 + (x-2) + \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{6} + \frac{(x-2)^4}{24}\right),$$

$H_n(\delta) = \dfrac{e^{x_0+\delta}\delta^{n+1}}{(n+1)!}$. Ha $x > 2$, akkor $h_n(x) = \dfrac{e^x\delta^{n+1}}{(n+1)!}$. Ha pedig $x < 2$, akkor $h_n(x) = \dfrac{e^2\delta^{n+1}}{(n+1)!}$. Ez azt jelenti, hogy $T_4(x)$ a $[1,3]$ intervallumon legfeljebb $H_4(1) = \frac{e^3}{120} \approx 0,167379$ hibával, az 1 helyen pedig legfeljebb $h_4(1) = \frac{e^2}{120} \approx 0,061575$ hibával közelíti meg az e^x függvényt. (Megjegyezzük, hogy a feladat **T 23.21** alkalmazásával is megoldható az $x \mapsto (x-2)$ transzformációt végrehajtva:

$$e^x = e^2 e^{x-2} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, \quad K = \mathbf{R}.$$

A hibabecslést azonban ebben az esetben is a fenti módon kell végrehajtani.)

96. A feladat megoldható **T 23.19** közvetlen alkalmazásával is. Egyszerűbben jutunk azonban célhoz, ha elvégezzük a

$$\sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

átalakítást. **T 23.21** alapján $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ Maclaurin-sorát felírva:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}, \quad K = \mathbf{R}.$$

M 23.17 szerint ha $x \in \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right]$, akkor

$$\left|\frac{\cos^{(n+1)}\left(\xi_n - \frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{n+1}\right| \le \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} = H_n(\delta).$$

(Felhasználtuk, hogy $\left|\cos^{(n+1)}\left(\xi_n - \frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$.)

$T_5(x) = T_4(x) = 1 - \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{24}$, $\quad H_5(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi^6}{4^6 \cdot 720} \approx 0,000326.$ (Megjegyezzük, hogy $n_1 = 4$ esetben ugyanazt a közelítő polinomot kapjuk ugyan, de a hibát (hat tizedesjegyre kerekítve) csak 0,002491 pontossággal tudjuk becsülni, ezért nem célszerű ezt a becslést választani.)

97. **T 23.20** alapján:

$$x^4 - 2x^3 + 2 = 1 - 2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4, \quad K = \mathbf{R}.$$

23.14

Ha $n > 4$, akkor $T_n(x) = T_4(x)$, azaz $h_n(\delta) = 0$. Nyilvánvaló, hogy $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = T_2(x) = 1 - 2(x-1)$, $T_3(x) = 1 - 2(x-1) + 2(x-1)^3$. Csak $H_2(\delta)$-t becslését közöljük; $H_0(\delta)$, $H_3(\delta)$ becslését az olvasóra bízzuk ($H_1(\delta)$-t nem érdemes becsülni). Mivel $1-\delta < \xi_2 < 1+\delta$, ezért $-1-2\delta < 2\xi_2 - 3 < -1 + 2\delta$, s így

$$|R_2(x)| = \left|\frac{24\xi_2 - 12}{3!}(x-1)^3\right| \le 2|2\xi_2 - 3||x-1|^3 < (1+2\delta)\delta^3 = H_2(\delta),$$

amelyből $H_2(0,1) = 0,0012$.

98. $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^{(n)} x_0}{n!}(x-x_0)^n$. Minden x-re $|\operatorname{sh} x| = \operatorname{sh}|x| < \operatorname{ch}|x| = \operatorname{ch} x$, ezért

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{ch}^{(n+1)}\xi_n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| <$$

$$\frac{\operatorname{ch}(|x_0|+\delta)}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} < \frac{\operatorname{ch}(|x_0|+\delta)}{(n+1)!}\delta^{n+1} = H_n(\delta)$$

és $h_n(x) = \frac{\operatorname{ch} a}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$, ahol $a = \sup\{|x|, |x_0|\}$. A **7.73** feladat szerint minden x-re $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{ch} a}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1} = 0$, ezért $K = \mathbf{R}$.

99. **D 23.18** szerint az $\ln x$ függvény 2 körüli Taylor-sora:

$$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}.$$

A sort tagonként differenciálva és a **T 22.5** tételt felhasználva:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-2)^{n-1}}{n\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{2-x}{2}} = \frac{1}{x}$$

$(0 < x < 4)$. **T 23.10** szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n} = \int_2^x \frac{1}{t}\,dt = \ln x - \ln 2 \quad (0 < x < 4).$$

Az $x = 4$ helyen a sor Leibniz-sor, ezért **T 22.15** szerint ezen a helyen is konvergens. **T 23.12**-t alkalmazva, kapjuk, hogy a sor ezen a helyen is előállítja a függvényt, azaz $K = (0,4]$. (Megjegyezzük, hogy a számítás az

$$\ln x = \ln(2+x-2) = \ln 2\left(1+\frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)$$

átalakítás segítségével $\ln(1+x)$ $(-1 < x \le 1)$ Maclaurin-sorának (**T 23.21**) felhasználásával jóval egyszerűbben elvégezhető.) Végül becsüljük meg az n-edik Taylor-polinommal való közelítés hibáját! Ha $2 < x \le 4$, akkor a sor

Leibniz-sor, ezért T 23.22 szerint a közelítés hibája nem nagyobb, mint az első figyelembe nem vett tag abszolút értéke:

$$|\ln x - T_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k\cdot 2^k}\right| \le \left(\frac{x-2}{2}\right)^{n+1}\frac{1}{n+1} = h_n(x).$$

Ha $0 < x < 2$, akkor T 22.5 és T 22.28 miatt

$$|\ln x - T_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{(x-2)^k}{k\cdot 2^k}\right| = \left|-\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2-x}{2}\right)^k\frac{1}{k}\right|$$

$$\le \frac{1}{n+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2-x}{2}\right)^k = \frac{1}{n+1}\left(\frac{2-x}{2}\right)^{n+1}\frac{2}{x} = h_n(x).$$

Ezért például $H_n(\delta) = \left(\frac{\delta}{2}\right)^{n+1}\frac{2}{(n+1)(2-\delta)}$. ($0 < 2-\delta \le x \le 2+\delta$ miatt $\frac{2}{x} \le \frac{2}{2-\delta}$, $\frac{2}{2-\delta} \ge 1$ és $|2-x| \le \delta$, amelyekből, a $h_n(x)$-re kapott becsléseket is felhasználva, kapjuk $H_n(\delta)$ előbbi értékét.)

100. $\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $K = \mathbf{R}$. Látható, hogy $T_{2k+1}(x) = T_{2k+2}(x)$ ($k \in \mathbf{N}$). A **98.** feladat megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy $h_n(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ és $H_n(\delta) = \frac{\operatorname{ch}\delta}{(n+1)!}\delta^{n+1}$.

101. T 23.21 szerint: $a^x = e^{x\ln a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln a)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln^n a}{n!}x^n;\quad x\in\mathbf{R}$.

102. $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n};\quad x\in\mathbf{R}$.

103. T 23.21 alapján:

$$\sin(x+2) = \sin x\cos 2 + \cos x \sin 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos 2 +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}x^{2n}\sin 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x\cos 2}{2n+1}+\sin 2\right)x^{2n};\quad x\in\mathbf{R}.$$

Megjegyezzük, hogy T 23.19 segítségével is megoldható a feladat: $\sin(x+2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(2)}{n!}x^n$, mert a **7.73.** feladat szerint

$$\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

bármely $x\in\mathbf{R}$ esetén, mivel $|\sin^{(n+1)}\xi_n| \le 1$.

104. $e^{x^2+1} = e\cdot e^{x^2} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!};\quad x\in\mathbf{R}$.

105. $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)\frac{x^n}{n!} =$
$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $x \in \mathbf{R}$. (Megoldható a feladat T 23.19 alkalmazásával is.)

106. $\operatorname{sh}\frac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1}(2n+1)!}$; $x \in \mathbf{R}$.

107. $x\ln(x+1) = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}$; $-1 < x \le 1$.

108. $\ln(x^2+1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$; $-1 \le x \le 1$.

109. $\ln(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$; $-1 < x < 1$.

110. $e^x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^{2x}+1\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n!}x^n$; $x \in \mathbf{R}$.

111. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$; $x \in \mathbf{R}$.

112. $\frac{x}{2-x} = -1 + \frac{2}{2-x} = -1 + \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$; $-2 < x < 2$.
(Megoldható a feladat T 23.19 alkalmazásával is. Például teljes indukcióval megmutatható, hogy $f^{(n)}(x) = \frac{2\cdot n!}{(2-x)^{n+1}}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$, ezért $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2^n}$.)

113. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n$ $(-1 < x < 1)$ miatt:

$$\frac{1}{1-(2x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n}; \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(l. T 22.5).}$$

114. $\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n =$
$\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n 2^{n+1})x^n$; $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

115. A T 22.5 és a T 23.10 tételeket is alkalmazva:

$$\frac{x}{(1-x)^2(1+x)} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2},$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}x^n, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

és

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},$$

ezért M 23.13-at is alkalmazva:

$$\frac{x}{(1-x)(1-x^2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} =$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(1+(-1)^n)x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right)x^n;$$

$-1 < x < 1.$

116. T 22.5 szerint $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$, ezért T 23.10 alapján

$$\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad -1 \le x \le 1.$$

(L. még a **87.** feladat megoldását. Megmutatható, hogy $|x| = 1$ esetben is előállítja a sor a függvényt; l. a **164.** feladatot.)

117. T 23.21 szerint: $\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad -1 < x < 1.$$

118. T 22.5, T 23.21 és M 23.13 alapján:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}.$$

Mindkét sor abszolút konvergens, így T 22.34 szerint Cauchy-szorzatuk is:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\right) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n; \quad -1 < x < 1.$$

119. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$, ezért $\alpha = -\frac{1}{2}$ esetre alkalmazhatjuk a binomiális sorokra vonatkozó M 23.24 megjegyzést. Először számítsuk ki a binomiális együtthatókat:

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}; \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

Ezért:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n; \quad -1 < x \le 1.$$

(A sor az $x = 1$ helyen Leibniz-sor (l. a **33.** feladat megoldását), így ezen a helyen is előállítja a függvényt.)

120. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{x}{3}}=$
$\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}};\quad -2<x<2.$

121. T **10.14** szerint $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad x\in(-1,1)$. Alkalmazzuk a **119.** feladat megoldását x helyett $-x^2$-re:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^{2n}.$$

Ebből tagonkénti integrálással (T **23.10**):

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1};\quad x\in[-1,1].$$

(Megmutatjuk, hogy az $x=\pm1$ helyeken is konvergens a sor. Minden $n\in\mathbf{N}^+$ esetén $\dfrac{n-1}{n}<\dfrac{n}{n+1}$, ezért

$$\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{2\cdot4\cdots(2n)}{3\cdot5\cdots(2n+1)},$$

amiből átrendezéssel

$$\left(\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\right)^2<\frac{1}{2n+1},$$

majd gyökvonással

$$\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$ sort majorálja a konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$ sor (T **22.13**), ezért az előbbi sor szintén konvergens. A Maclaurin-sor az $x=-1$ helyen is konvergens, mert az $x=1$ helyhez tartozó sor -1-szerese. Így T **23.12** szerint $|x|=1$ esetén a sor előállítja a függvényt.

122. T **23.17** alapján végezzük el a következő számítást: $|R_n(1)|<\dfrac{e}{(n+1)!}<\dfrac{3}{(n+1)!}<0,5\cdot10^{-4}$, amiből $n=8$ adódik. Így $e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{8!}\approx2,7183$.

123. $\left|R_n\left(\dfrac{\pi}{60}\right)\right|<\dfrac{\left(\frac{\pi}{60}\right)^{n+1}}{(n+1)!}<0,5\cdot10^{-5}$, amiből $n=3$.

Így $\sin\dfrac{\pi}{60}\approx\dfrac{\pi}{60}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{\pi}{60}\right)^3\approx0,05234.$

124. Kevesebb számolással jár, ha a $\frac{\pi}{2}$ körüli Taylor-sorral közelítjük a függvényértéket (l. például a **96.** feladat megoldását és a **T 23.22** tételt):

$$\left|R_n\left(\frac{23\pi}{45}\right)\right| \le \left|\frac{23\pi}{45} - \frac{\pi}{2}\right|^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} = \left(\frac{\pi}{90}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} < 0,5 \cdot 10^{-5},$$

amiből $n = 3$. Így $\sin\frac{23\pi}{45} \approx 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \approx 0,99939$.

125. Elvileg számolhatnánk **T 23.21** segítségével, azaz az $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Leibniz-sorral, de $|R_n(1)| \le \frac{1}{n+1} < 0,5 \cdot 10^{-4}$ miatt $n \ge 20000$ lenne. Jóval kevesebb számolást igényel a **117.** feladatban szereplő függvénysor alkalmazása $x = \frac{1}{3}$-ra:

$$\ln 2 = \ln\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}.$$

Végezzük el a következő hibabecslést (vagy pedig alkalmazzuk közvetlenül a **T 23.23** tételt):

$$\left|R_n\left(\frac{1}{3}\right)\right| = 2\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1}\frac{1}{2k+1} \le \frac{2}{2n+3}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k+1} <$$

$$\frac{1}{2n+3}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+2} < 0,5 \cdot 10^{-4},$$

amiből $n = 3$ adódik. Így $\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\right) \approx 0,6931$.

126. A **100.** feladat megoldását felhasználva: $\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$ $(x \ne 0)$. Terjesszük ki az $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ függvény értelmezését a 0 helyre a $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ értékkel.

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} =$$

$$1 + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k-1)!} + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}.$$

A $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$ sort majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^n(2k+1)!}$ $(k \in \mathbf{N}^+)$ konvergens mértani sor, amelynek összege **T 22.5** szerint: $\frac{1}{2k(2k+1)!}$.

Ha $k \geq 4$, akkor $\dfrac{1}{2k(2k+1)!} < 10^{-6}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}\,dx \approx 1 + \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \frac{1}{7\cdot 7!} \approx 1,057251,$$

és a közelítés hibája kisebb, mint 10^{-6}.

127. A **102.** feladat megoldását is felhasználva:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\right]_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}.$$

Az integrált megadó sor Leibniz-sor, ezért az n-edik részletösszeggel való közelítés hibája nem nagyobb, mint az $(n+1)$-edik tag abszolút értéke (**T 23.22**).

Ha $n \geq 6$, akkor $\dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 10^{-4}$, így

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0,7468,$$

10^{-4} pontossággal.

128. A 0 helyen legyen a függvény értéke $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$. A **T 23.21** tételt is felhasználva:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x-1}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n-1}}{n!}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{x^n}{n\cdot n!}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n\cdot n!}.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot n!}$ hatványsort $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n!}$ hatványsor tagonkénti integrálásával kaptuk, ezért **T 23.10** szerint mindenütt konvergens. Alkalmazhatjuk a **T 23.23** tételt $x = \frac{1}{2}$-re; az n-edik Taylor-polinommal való közelítés hibája nem nagyobb, mint $\dfrac{1}{2^n(n+1)(n+1)!}$.

Ha $n = 5$, akkor $\dfrac{1}{2^n(n+1)(n+1)!} < 10^{-5}$, ezért

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x-1}{x}\,dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!} + \frac{1}{2^4\cdot 4\cdot 4!} + \frac{1}{2^5\cdot 5\cdot 5!} \approx 0,57015.$$

129. A **T 23.21** tételt alkalmazva: $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+1)(2n)!}$. A hibaszámítást **T 23.22** segítségével végezve:

$$\int_0^1 \cos x^2\,dx \approx 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216} \approx 0,905.$$

130. A **T 23.21** tételt alkalmazva: $\displaystyle\int_0^1 \sin x^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}$. A hibaszámítást **T 23.22** segítségével végezve:

$$\int_0^1 \sin x^2\,dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} \approx 0,3103.$$

131. A 0 helyen legyen a függvény értéke $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = 1$. A **T 23.21** tételt is felhasználva:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-2}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n-1}(2n-1)(2n)!}.$$

T 23.22 alapján: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{576} \approx 0{,}24826.$

132. **T 22.5** segítségével:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,dx = \int_0^{\frac{1}{9}} \left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\sqrt{x^3}\right)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2}{3^{3n+2}(3n+2)}.$$

T 23.22 alapján: $\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{1}{1+\sqrt{x^3}}\,dx \approx \frac{1}{9} - \frac{2}{1215} \approx 0{,}1095.$

133. A 0 helyen legyen a függvény értéke $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$. A **116.** feladatot is felhasználva: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 2^{2n+1}}.$

T 23.22 szerint: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{800} \approx 0{,}487.$

134. A 0 helyen legyen a függvény értéke $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. A **T 23.21** tételt is felhasználva: $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. **T 23.22** szerint:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx \approx 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} \approx 0{,}83.$$

135. A **T 23.21** tétel alapján:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{9}} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{2n+3}(2n+3)n!}.$$

A hibaszámításhoz a **T 23.23** tételt használhatjuk, mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{x^{\frac{2n+3}{2}}}{(2n+3)n!}$ hatványsort a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$ hatványsor tagonkénti integrálásával kaptuk. A **T 23.10** tétel szerint, az $x \geq 0$ esetben a hatványsor konvergens. Ha $n \geq 2$, akkor $\frac{1}{4\cdot 3^{2n+3}(2n+5)(n+1)!} < 10^{-5}$, ezért:

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^x\,dx \approx \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5\cdot 5} + \frac{1}{3^7\cdot 7} \approx 0{,}02640.$$

23.22

136. A hányadoskritérium alkalmazásával belátható, hogy a sor konvergens. Vegyük észre, hogy a sor összege egyenlő a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ hatványsor összegfüggvényének $x = \frac{1}{2}$ helyen felvett értékével, ha $\frac{1}{2}$ benne van a hatványsor konvergenciaintervallumában. Írjuk a hatványsort $x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ alakba. A **T 23.10** és a **T 22.5** tételek szerint

$$x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = x \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\, dt = x \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} \right) dt =$$

$$x \int_0^x \frac{1}{1-t}\, dt = -x \ln(1-x); \quad -1 < x < 1.$$

Ebből: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n+1}} = \frac{\ln 2}{2}$.

137. A hányadoskritériummal megmutatható, hogy a sor konvergens. A sor összege egyenlő a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n+1)!}$ hatványsor összegfüggvényének $x = 1$ helyen felvett értékével, ha 1 benne van a hatványsor konvergenciaintervallumában. A **T 23.10** és a **T 23.21** tételek szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{(n+1)!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right)' = \left(\frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' =$$

$$\left(\frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1 \right) \right)' = \left(\frac{1}{x} (e^x - x - 1) \right)' = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2}; \quad x \neq 0,$$

ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

138. A sor Leibniz-sor, összege egyenlő a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ hatványsor összegfüggvényének $x = 1$ helyen felvett értékével. A **116.** feladat megoldása szerint: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x$, ha $-1 \leq x \leq 1$, így $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

139. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = e^{-2}$ (l. e^x Maclaurin-sorát (**T 23.21**)).

140. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} = \operatorname{ch} 0 = 1$ (l. a **105.** feladat megoldását).

141. A hányadoskritériummal megmutatható, hogy a sor konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' =$$

$$x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}; \quad -1 < x < 1,$$

ezért $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$. (Megjegyezzük, hogy a sor összegét a **22.18.** feladat megoldásában más módszerrel számítottuk ki.)

142. A $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$ sorból tagonkénti differenciálással és $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy a sor összege 3.

143. A függvény páros, ezért **M 23.32** szerint a Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelnek. **D 23.27** és **M 23.33** alapján:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Ha $n \geq 1$, akkor kétszer parciálisan is integrálva (**D 12.10**):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos nx\,dx =$$

$$2\pi\int_0^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx = -4\frac{\cos n\pi}{n^2} = 4\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Az $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx.$$

A majoránskritérium és **T 22.13** szerint a Fourier-sor minden x helyen (abszolút) konvergens, az $f(x)$ függvény pedig folytonos, ezért a **T 23.28** tétel alapján:

$$f(x) = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx \quad (x \in \mathbf{R}).$$

144. A függvény páratlan, ezért Fourier-sorában csak szinuszos tagok szerepelnek (**M 23.32**). **T 23.26** és **M 23.33** szerint:

$$b_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x \sin 2nx\,dx,$$

amiből a

$$\sin x \sin nx = \frac{1}{2}(\cos(2n-1)x - \cos(2n+1)x)$$

összefüggés segítségével, vagy kétszer parciálisan integrálva (**P 12.11**):

$$f(x) \sim \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin 2nx.$$

Az $f(x)$ függvény az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ helyeken nem folytonos, a sor azonban ezeken a helyeken is konvergens és összege egyenlő a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepével (**T 23.28**)
$\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi-0} f(x) = 1 \text{ és } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+k\pi+0} f(x) = -1\right)$.

23.24

145. A **D 23.27** definíció szerint:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-2x)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 3x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 5x\,dx = \frac{5\pi}{4}.$$

Hasonló számolással, parciális integrálást is alkalmazva:

$$a_k = \frac{5}{\pi k^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{5}{\pi k^2}((-1)^k - 1), \quad b_k = -\frac{\cos k\pi}{\pi k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

($k \in \mathbf{N}^+$). A **T 23.29** és a **T 23.28** tételek alapján:

$$f(x) = \frac{5\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{\pi(2n-1)^2}\cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

146. $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \quad x \in \mathbf{R}.$

147. A függvény páros, ezért **M 23.32** szerint a Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelnek. **D 23.27** és **M 23.33** alapján: $a_0 = 0$ és $a_k = \frac{4}{\pi k}\sin\frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{N}^+$). A $\operatorname{sgn}\cos x$ az $x = \dfrac{2m+1}{2}\pi$ ($m \in \mathbf{Z}$) helyek kivételével mindenütt folytonos, de **T 23.28** szerint könnyen ellenőrizhető, hogy a sor ezeken a helyeken is előállítja a függvényt:

$$\operatorname{sgn}\cos x = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}; \quad x \in \mathbf{R}.$$

148. A **D 23.27** definíció szerint:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx = -\frac{1}{\pi},$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos x\,dx = 0.$$

Ha $k > 1$, akkor a $\sin x\cos kx = \dfrac{1}{2}(\sin(k+1)x - \sin(k-1)x)$ összefüggés segítségével, vagy kétszer parciálisan is integrálva:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin x\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi(k^2-1)}(1+\cos k\pi).$$

Hasonló számítással kapjuk, hogy minden $k \in \mathbf{N}^+$ esetén $b_k = 0$, bár a függvény nem páros. **T 23.28** alapján:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}; \quad x \in \mathbf{R}.$$

149. **D 23.26**, **M 23.32** és **M 23.33** szerint: $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arcsin(\cos x)\,dx =$

$$\frac{2}{\pi}\left[x\arcsin(\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x(-\sin x)}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \frac{\pi}{4},$$

$a_k = \dfrac{1}{k^2\pi}(1-\cos k\pi)$ ($k \in \mathbf{N}^+$), így **T 23.28** alapján:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(4n-2)x}{(2n-1)^2}; \quad x \in \mathbf{R}.$$

150. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}; \quad x \in \mathbf{R}.$

151. $f(x) = \frac{16}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{(4n^2-1)^2}\sin 2nx; \quad x \in \mathbf{R}.$

152. **D 23.26**, **M 23.32** és **M 23.33** szerint: $a_0 = \int_0^1 (x-1)\,dx = -\frac{1}{2}$,

$a_k = 2\int_0^1 (x-1)\cos k\pi x\,dx = \frac{2}{k^2\pi^2}\left((-1)^k - 1\right).$

T 23.28 alapján: $f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}; \quad x \in \mathbf{R}.$

153. A Fourier-együtthatókat kiszámíthatjuk a **D 23.27** és **M 23.32** alapján. Közvetlenül kapjuk, hogy $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{3}{4}$. Az a_3 együttható meghatározásához használjuk fel például a $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$ azonosságot: $a_3 = \frac{1}{4}$. Ha $n \in \mathbf{N}^+ - \{1,3\}$, akkor kétszeres parciális integrálással és azonos átalakításokkal eljuthatunk az

$$a_n = \frac{6\pi}{n^2}\int_0^\pi (3\cos^3 x\cos nx - 2\cos x\cos nx)\,dx$$

integrálhoz. Ezt tovább alakítva:

$$a_n = \frac{6\pi}{n^2}\int_0^\pi \left(3\cos^3 x\cos nx - (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)\right)\,dx,$$

amiből $a_n = \frac{9}{n^2}a_n$, azaz $a_n = 0$. Megjegyezzük, hogy sokkal egyszerűbben kapjuk meg az eredményt a következő elemi átalakítással:

$$\cos^3 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\cos x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos x\cos 2x) =$$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x.$$

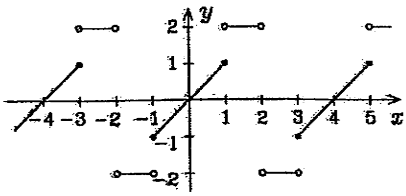
154. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx; \quad x \in \mathbf{R}.$

155. **D 23.27** szerint: $a_0 = \pi$, $a_n = 0$ és $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^+)$. A függvény Fourier-sora: $\pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$. A sor minden x helyen konvergens (**T 23.29**). A függvény az $x = (2k-1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével mindenütt folytonos, ezért **T 23.28** alapján:

$$f(x) = \pi + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx; \quad x \neq (2k-1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ha $x = (2k-1)\pi$, akkor a sor összege egyenlő a függvény bal és jobb oldali határértékének számtani közepével, π-vel.

156. Az f függvény szakaszonként monoton (1. ábra), ezért **D 23.29** szerint Fourier-sora mindenütt konvergens.
Ha $x \notin \mathbf{Z} - \{4k; k \in \mathbf{Z}\}$, akkor **T 23.28** szerint a sor összege $f(x)$.
Ha $x \in \mathbf{Z} - \{4k; k \in \mathbf{Z}\}$, akkor a sor összege ezen a helyen a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepe. A függvény páratlan, ezért



D 23.26, **M 23.32** és **T 23.33** alapján a Fourier-sora:

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}\left(1+\frac{1}{(4n+1)\pi}\right)\sin\frac{(4n+1)\pi x}{2}-\frac{3}{2(4n+2)}\sin\frac{(4n+2)\pi x}{2}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4n+3}\left(1-\frac{1}{(4n+3)\pi}\right)\sin\frac{(4n+3)\pi x}{2}-\frac{1}{2(4n+4)}\sin\frac{(4n+4)\pi x}{2}\right).$$

157. $f(x)=\dfrac{e^2-1}{e}\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x-n\pi\sin n\pi x)\right);\quad x\in\mathbf{R}.$

158. $f(x)=\begin{cases}-\frac{2}{\pi}x-2, & \text{ha } -\pi<x\le-\frac{\pi}{2},\\ \frac{2}{\pi}x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ -\frac{2}{\pi}x+2, & \text{ha } \frac{\pi}{2}<x\le\pi \text{ és } f(x+2m\pi)=f(x);\quad m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$

A függvény páratlan, ezért **M 23.32**, **D 23.27** és **M 23.33** szerint:
$b_k=\dfrac{8}{\pi^2k^2}\sin\dfrac{k\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{N}^+)$. Ha k páros, akkor $\sin\frac{k\pi}{2}=0$, ezért feltehető, hogy $k=2n+1$ $(n\in\mathbf{N})$. **T 23.28** és **T 23.29** segítségével kapjuk, hogy

$$f(x)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x.$$

159. $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{ha } -1<x\le 0,\\ -x+1, & \text{ha } 0<x\le 1,\end{cases}$ és $f(x+2m)=f(x)$ $(m\in\mathbf{Z})$.

A függvény páros. $a_0=\frac{1}{2}$ és $a_k=\dfrac{2}{k^2\pi^2}(-\cos k\pi+1)$.
Ha $k=2n$ $(n\in\mathbf{N}^+)$, akkor $a_k=0$, ezért

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

160. $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi x.$

161. A $g(x)=\begin{cases}\pi-x, & \text{ha } 0<x\le\pi,\\ 1, & \text{ha } \pi<x\le 2\pi,\end{cases}$ $g(x+2k\pi)=g(x)$ $(k\in\mathbf{Z})$ függvény Fourier-sora **T 23.29** alapján mindenütt konvergens. Így **T 23.28** szerint:

$$f(x)=\frac{2+\pi}{4}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx+\frac{\pi-1+(-1)^n}{n}\sin nx\right).$$

(Megjegyezzük, hogy ha $x\ne k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$, akkor $f(x)=g(x)$. Ha $x=2k\pi$, akkor $f(x)=\frac{1+\pi}{2}$, ha pedig $x=(2k+1)\pi$, akkor $f(x)=\frac{1}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

162. $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$; $x \in \mathbf{R}$ (l. például Szász G., Matematika II., 343. oldal 1.példa). $f(0) = 0$ miatt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

163. A **146.** feladat megoldása szerint:
$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$; $x \in \mathbf{R}$. $x = 0$ helyettesítéssel az összeg $\frac{\pi^2}{8}$.

164. A függvény páratlan, ezért Fourier-sorában csak szinuszos tagok szerepelnek. Az **M 23.33**-at is figyelembe véve:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos kx}{k}\right]_0^{\pi} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(2n+1)}, & \text{ha } k = 2n+1, \\ 0, & \text{ha } k = 2n+2;\ n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Az $f(x)$ függvény Fourier-sora: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$, ennek értéke az $x = \frac{\pi}{2}$ helyen: $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. A sor Leibniz-sor, ezért **T 22.15** szerint konvergens. Az $f(x)$ függvény folytonos a $\frac{\pi}{2}$ helyen, így **T 23.28** alapján: $1 = \operatorname{sgn}\frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ebből: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$. (Megjegyezzük, hogy Szász G., Matematika II., 348. oldalán egy másik függvény Fourier-sora segítségével adja meg a sor összegét.)

165. A függvény páros, ezért Fourier-sorában csak konstans és koszinuszos tagok szerepelhetnek: $a_0 = \frac{2}{\pi}$. Ha $n \geq 1$, akkor kétszeres parciális integrálást is alkalmazva:

$$a_n = -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi + 1) + \frac{1}{4n^2}a_n,$$

amiből $a_n = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$. Így $f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$ $(x \in \mathbf{R})$. Ebből $x = 0$ helyettesítéssel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

166. $\sin\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}k}{4k^2-1}\sin kx$ $(x \in \mathbf{R})$. Végezzük el az $x = \frac{\pi}{2}$ helyettesítést. Mivel $\sin k\frac{\pi}{2} = 0$, ha k páros szám, ezért elegendő a $k = 2n+1$ $(n \in \mathbf{N})$ értékeket figyelembe venni: $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{4(2n+1)^2-1}$, amiből

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{16n^2+16n+3} = \frac{\sqrt{2}\pi}{16}.$$

167. $x^4 = \frac{1}{5} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\left(1 - \frac{6}{n^2\pi^2}\right)\cos n\pi x$ $(x \in \mathbf{R})$, amiből $x = 1$ helyettesítéssel kapjuk az eredményt; a feladatbeli sor összege $\frac{\pi^4}{10}$.

168. Legyen $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f_n(z_0)}{g_n(z_0)}\right| = a(>0)$. A határérték **D 7.13** definíciója miatt bármely pozitív ϵ számhoz van n_0 küszöbszám, hogy ha $n > n_0$, akkor $\left|\frac{f_n(z_0)}{g_n(z_0)} - a\right| < \epsilon$. Legyen például $\epsilon = \frac{a}{2}$, akkor

$$\frac{a}{2}|g_n(z_0)| < |f_n(z_0)| < \frac{3a}{2}|g_n(z_0)|,$$

ha $n > n_0$. Ebből a majoránskritérium alkalmazásával kapjuk az állítást.

169. A majoránskritérium és a minoránskritérium segítségével az előző feladat megoldásához hasonló módon bizonyítható (legyen például $\epsilon = 1$).

170. A végtelenhez divergálás **D 7.19** definícióját felhasználva az előző feladathoz hasonló módon bizonyítható az állítás.

171. Alkalmazzuk a $t = z^q$ helyettesítést!

172. Páros (páratlan) függvény deriváltja páratlan (páros) (l. a **9.20** feladatot). Páratlan függvény értéke a 0 helyen 0, amiből **D 23.18** segítségével kapjuk az állítást.

173. Könnyen látható, hogy $x \neq 0$ esetben $f'(x) = \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = 0$. Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy ha $x \neq 0$, akkor

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2^n}{x^{3n}} + \frac{a_{n_1}}{x^{3n-2}} + \frac{a_{n_2}}{x^{3n-3}} + \cdots + \frac{a_{n_{2n-3}}}{x^{n+2}}\right) \quad (n \geq 2),$$

ahol a_{n_k} $(k = 1, 2, \ldots 2n-3)$ alkalmasan választott valós számok. Felhasználva a differenciálhányados definícióját és a L'Hospital-szabályt is, belátható, hogy $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x} = 0$ $(n \in \mathbf{N}^+)$. (A L'Hospital-szabályt megfelelő számszor kell alkalmazni a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^{-k}}{e^{x^{-2}}}$ $(a \in \mathbf{R})$ alakba átírt határértékek kiszámítására.) Ez azt jelenti, hogy bármely x valós szám esetén a függvény Maclaurin-sorának minden tagja 0, azaz az összege is 0. Így csak a 0 helyen állítja elő a függvényt.

174. Igazoljuk, hogy $f^{(n)}(x) = e^{x\cos\alpha}\cos(n\alpha + x\sin\alpha)$. Ebből **D 23.18** alapján kapjuk a függvény Maclaurin-sorát: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n!}x^n$. **T 23.19** alapján a **7.73.** feladat segítségével megmutatható, hogy a sor mindenütt előállítja a függvényt.

175. Szorozzuk meg az $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ egyenlet mindkét oldalát x-szel, és differenciáljuk mind a két (új) oldalt:

$$(1+x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}.$$

A kapott egyenletet ismét szorozzuk meg x-szel, és differenciáljuk újra:

$$(1+3x+x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{n!}.$$

A sor összege ($x = 1$ helyettesítéssel): $5e$.

176. A T 22.5 és a T 23.10 tételek alkalmazásával:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^3}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{3n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}; \quad |x| < 1.$$

A kapott sor az $x = 1$ helyen is konvergens, mert Leibniz-sor, ezért T 23.12 szerint T 12.18-at is alkalmazva: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n} = \lim\limits_{x\to 1-0} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} =$

$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{3}\left(\ln \frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \sqrt{3}\left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$\frac{1}{3}\left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

177. Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergens a konvergenciaintervallum r határpontjában. Legyen $s_k = \sum\limits_{n=0}^{k} a_n x^n$ $(k \in \mathbf{N})$ és $\lim\limits_{k\to\infty} s_k = s$.

$$\sum_{k=0}^{m} a_k r^k \left(\frac{x}{r}\right)^k = \sum_{k=0}^{m} (s_k - s_{k-1}) \left(\frac{x}{r}\right)^k = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{k=0}^{m-1} s_k \left(\frac{x}{r}\right)^k + s_m \left(\frac{x}{r}\right)^m$$

(a $k = 0$ esetben fellépő s_{-1} legyen 0). Ebből, ha $|x| < r$, akkor $m \longrightarrow \infty$ esetén az adódik, hogy $s(x) = \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum\limits_{k=0}^{\infty} s_k \left(\frac{x}{r}\right)^k$. Bármely pozitív ϵ-hoz van olyan $n_0 \in \mathbf{N}$, hogy $n > n_0$ esetén $|s_n - s| < \epsilon$ (D 7.13). T 22.5 szerint $\left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{r}\right)^k = 1$ $(|x| < r)$; emiatt $|s(x) - s| =$

$$\left|\left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (s_k - s) \left(\frac{x}{r}\right)^k\right| \le \left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum_{k=0}^{n_0} |s_k - s| \left|\frac{x}{r}\right|^k + \frac{\epsilon}{2} \le \epsilon,$$

ha $\left(1 - \frac{x}{r}\right) \sum\limits_{k=0}^{n_0} |s_k - s| \left|\frac{x}{r}\right|^k \le \frac{\epsilon}{2}$. Az r-nek van olyan bal oldali környezete, amelynek pontjaiban az utóbbi egyenlőtlenség teljesül. Ez azonban azt jelenti, hogy $\lim\limits_{x\to r-0} s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$.

A $-r$ határpont esetén a bizonyítás hasonlóan végezhető el.

178. Használjuk fel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)n x^{n-1} - 3\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)$$

átalakítást. A T 22.5 tétel szerint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}; |x| < 1.$$

Ezért a T 23.10 tétel alapján:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)nx^{n-1} = \left(\frac{x^3}{1-x}\right)''' = \frac{6}{(1-x)^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nx^{n-1} = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Így $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3x^n = \dfrac{x(x^2-4x+9)}{(1-x)^4}$. A T 22.3 szerint az $x = \pm 1$ helyeken a sor divergens, emiatt a konvergenciaintervallum: $(-1, 1)$.

179. Használjuk fel a $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ azonosságot. (Az azonosság a **6.169.** feladathoz hasonlóan igazolható.) Írjuk fel a sor k-adik részletösszegét:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}\left(\frac{3}{4}\sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)\right) =$$

$$\frac{3^k}{4}\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \frac{1}{4}\sin x.$$

Ebből

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{x}{4}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}{\frac{x}{3^k}} - \frac{1}{4}\sin x\right) = \frac{x - \sin x}{4}.$$

180. Ha $x = 0$, akkor a sor abszolút konvergens. Legyen $x \neq 0$ és $0 < a \leq b$. T 23.9 szerint:

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a^n + b^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\frac{a}{b}\right)^n + b}{\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1} = b.$$

T 22.3 szerint az $x = \pm b$ pontokban a sor divergens. Ha $0 < b < a$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $r = a$, és az $x = \pm a$ pontokban a sor divergens. Ezért $r = \sup\{a, b\}$ és $K = (-r, r)$.

181. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{a^n}{n} + \dfrac{b^n}{n^2}\right)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a^n}{n}x^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{b^n}{n^2}x^n$. Alkalmazzuk például a T 23.9 tételt az egyenlet jobb oldalán lévő két sorra: $r = \dfrac{1}{\sup\{a, b\}}$. Ha $a < b$ és $x = \pm b^{-1}$, akkor a sor abszolút konvergens. Ha $a \geq b$ és $x = a^{-1}$, akkor a sor divergens, ha pedig $x = -a^{-1}$, akkor feltételesen konvergens.

182. T 23.9 szerint

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^p}{\left(\sin\frac{1}{n+1}\right)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^p}{\left(\frac{\sin\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}}\right)^p}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1.$$

Vizsgáljuk meg a konvergenciaintervallum végpontjaiban, azaz az $x = 0$ és az $x = 2$ helyeken a sor konvergenciatulajdonságait. Ha $p > 1$, akkor T 22.13 és 22.22 szerint $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^p < \left(\frac{1}{n}\right)^p$ miatt ezeken a helyeken a sor abszolút konvergens, ezért $K = [0, 2]$. Ha $p \le 0$, akkor $\left(\sin\frac{1}{n}\right)^p \ge 1$, tehát T 22.3 szerint a sor divergens, ezért $K = (0, 2)$. Legyen $x = 2$ és $0 < p < 1$. Alkalmazzuk a T 22.11 integrálkritériumot:

$$\int_1^\infty \left(\sin\frac{1}{t}\right)^p dt = \left[t\left(\sin\frac{1}{t}\right)^p\right]_1^\infty + p\int_1^\infty \frac{1}{t}\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{p-1}\cos\frac{1}{t}\,dt = \infty,$$

mert $\lim\limits_{t\to\infty} t\left(\sin\frac{1}{t}\right)^p = \lim\limits_{t\to\infty} t^{1-p}\left(\frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}\right)^p = \infty$ és $\int_1^\infty \frac{1}{t}\left(\sin\frac{1}{t}\right)^{p-1}\cos\frac{1}{t}\,dt \ge 0$.
Az $x = 2$ és $p = 1$ esetben alkalmazzuk szintén az integrálkritériumot, de végezzük el az $u = t^{-1}$ helyettesítést:

$$\int_1^\infty \sin\frac{1}{t}\,dt = \int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,du.$$

T 23.21 szerint $\frac{\sin u}{u^2} = \sum\limits_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m u^{2m-1}}{(2m+1)!}$, ezért a T 23.10 tételt is felhasználva:

$$\int_0^1 \frac{\sin u}{u^2}\,du = \int_0^1 \frac{1}{u}\,du + \sum_{m=1}^\infty \int_0^1 \frac{(-1)^m u^{2m-1}}{(2m+1)!}\,du =$$

$$[\ln u]_0^1 + \sum_{m=1}^\infty \left[\frac{(-1)^m u^{2m}}{2m(2m+1)!}\right]_0^1 = \lim_{u\to+0} \ln u + \sum_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{2m(2m+1)!} = -\infty,$$

mert a $\sum\limits_{m=1}^\infty \frac{(-1)^m}{2m(2m+1)!}$ sor Leibniz-sor. Ha $x = 0$ és $0 < p \le 1$, akkor a sor Leibniz-sor, s így az előbbieket is felhasználva feltételesen konvergens. Tehát $0 < p \le 1$ esetén $K = [0, 2)$ és az $x = 0$ helyen a sor feltételesen konvergens.

183. Ha $x = 0$, akkor a sor konvergens, ha $x \ne 0$, akkor divergens.

184. A T 22.5 tételt vagy a 22.155. feladatot is felhasználva:

$$|f(x) - T_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^\infty \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\right| \le$$

$$\frac{M_n}{(n+1)!}\left|\sum_{k=n+1}^\infty (x - x_0)^k\right| = \frac{M_n}{(n+1)!}\cdot\frac{|x - x_0|^{n+1}}{1 + x_0 - x},$$

illetve

$$|f(x) - T_n(x)| \le M_n \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (x - x_0)^k \right| = \frac{M_n |x - x_0|^{n+1}}{1 + x_0 - x}.$$

A tétel második állítása **T 23.20** és az előbbiek alapján nyilvánvaló.

185. $a_n = c_n, \quad b_n = -d_n$, illetve $a_n = -c_n, \quad b_n = d_n$.

186. Az $x = (x + h) - h$ és az addíciós tételek alkalmazásával:
$a_n \cos nh - b_n \sin nh, \quad b_n \cos nh + a_n \sin nh$.

187. Minden $x \in \mathbf{R}$ esetén $f(x + 2\pi) = f((x + \pi) + \pi) = -f(x + \pi) = f(x)$, azaz a függvény 2π szerint periodikus. **D 23.27** szerint: $a_{2n} =$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos 2nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x) \cos 2nx \, dx =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 2nx \, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(x + \pi) \cos 2nx \, dx = 0; \quad n \in \mathbf{N}^+$$

(a második integrálban az $x + \pi = u$ helyettesítést végrehajtva és a $\cos 2n(u - \pi) = \cos 2nu$ összefüggést figyelembe véve). Hasonlóan látható, hogy $a_0 = 0$ és $b_{2n} = 0$.

188. A bizonyítás az előző feladatbeli állítás bizonyításához hasonló módon végezhető el.

24. Komplex függvények (megoldások)

1. Ha $z = x + iy$, akkor **D 6.3** szerint $\overline{z} = x - iy$, s így

$$\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0).$$

Ebből $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ és $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

2. $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$.

3. $u = 2x$, $\quad v = 0$.

4. $u = x^2 + y^2$, $\quad v = 0$.

5. $u = x + 2xy$, $\quad v = y^2 - x^2 - y$.

6. $u = x^2 - y^2$, $\quad v = 2xy + 1$.

7. $u = x^2 - y^2 + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad v = 2xy - \dfrac{y}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$.

8. $u = \dfrac{x - 3xy^2}{x^2 + y^2}$, $\quad v = \dfrac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$.

9. $u = \dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x - 1)^2 + y^2}$, $\quad v = -\dfrac{2y}{(x - 1)^2 + y^2} \quad ((x, y) \neq (1, 0))$.

10. $u = 1 + \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $\quad v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0)$.

11. Ha $z = x + iy$, akkor **T 24.6** szerint

$$e^{-z} = e^{-x} \cdot e^{-iy} = e^{-x}(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y,$$

azaz $u = e^{-x}\cos y$ és $v = -e^{-x}\sin y$.

12. Az $e^{i(z_1+z_2)} = \cos(z_1 + z_2) + i\sin(z_1 + z_2)$ és az $e^{i(z_1+z_2)} = e^{iz_1} \cdot e^{iz_2}$ azonosságokból adódik az állítás (l. **T 24.6**).

13. Alkalmazzuk a **D 24.5** definíciót az egyenletek mindkét oldalára.

14. Alkalmazzuk a **12.** feladat képleteit és **T 24.6**-ot.

15. **T 24.6** és a **13.** feladat alapján: $u = \operatorname{sh} x \cos y$, $\quad v = \operatorname{ch} x \sin y$.

16. $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1)$, $\quad v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1)$.

17. $u = \dfrac{\sin x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$, $\quad v = \dfrac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}$.

18. Az állítás a **14.** feladat felhasználásával könnyen adódik.

19. Az Euler-formula (**T 24.6**) alkalmazásával az egyenlet

$$\cos\overline{z} + i\sin\overline{z} = \overline{\cos z + i\sin z}$$

alakra hozható. A **T 6.4** tétel szerint:

$$\overline{\cos z + i\sin z} = \overline{\cos z} + \overline{i\sin z} = \cos\overline{z} - i\sin\overline{z}.$$

(Felhasználtuk az előző feladat eredményeit is.) Ezért $\sin\overline{z} = 0$, azaz $\overline{z} = k\pi$, s így $z = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

20. $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$, amiből kapjuk, hogy $y = k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$.

21. **T 24.6** szerint:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 = 1.$$

22. **T 24.6** szerint: $\cos(-i) = \operatorname{ch}(i(-i)) = \operatorname{ch} 1$.

23. **D 24.5** és **T 24.6** alapján:

$$\operatorname{tg}\frac{i\pi}{2} = \frac{\sin\frac{i\pi}{2}}{\cos\frac{i\pi}{2}} = \frac{-i\operatorname{sh}\left(i\cdot\frac{i\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(i\cdot\frac{i\pi}{2}\right)} = i\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

24. A **14.** feladat és **T 24.6** alapján:

$$\sin(3-4i) = \sin 3\cos 4i - \cos 3 \sin 4i = \sin 3 \operatorname{ch} 4 - i\cos 3 \operatorname{sh} 4.$$

25. $-\frac{3i}{4}$.

26. A **14.** feladat és **T 24.6** alapján: $i\operatorname{ch} 1$.

27. $\frac{\sqrt{2}}{6}(5+4i)$. **28.** $\frac{5}{3}$. **29.** $\frac{e}{3}(2\sqrt{2}-i)$.

30. A **10.132** feladat szerint $\arccos\cos 5 = 2\pi - 5$, ezért

$$e^{\ln 2 + i\arccos\cos 5} = 2(\cos 5 - i\sin 5).$$

31. **T 24.10** szerint: $\ln(-5+5i) = \ln\left(5\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \ln 5\sqrt{2} + i\pi\left(\frac{3}{4}+2k\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\ln 5\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4}$.

32. $\ln 1 = \ln\left(1\cdot e^{i\cdot 0}\right) = \ln 1 + 2k\pi i = 2k\pi i \quad (z \in \mathbf{Z})$; a főérték: 0.

33. $\ln i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $i\frac{\pi}{2}$.

34. $\ln(-e) = 1 + i\pi(2k+1) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $1 + \pi i$ (l. a **33.** feladat megoldását).

35. **D 24.12** és **T 24.10** szerint:

$$(1+i)^i = e^{i\ln(1+i)} = e^{i\left(\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)} =$$

$$e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\cdot e^{i\ln\sqrt{2}} = e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\cos\ln\sqrt{2} + i\cdot e^{-\pi\left(\frac{1}{4}+2k\right)}\sin\ln\sqrt{2} \quad (k \in \mathbf{Z});$$

a főérték: $e^{-\frac{\pi}{4}}(\cos\ln\sqrt{2} + i\sin\ln\sqrt{2})$.

36. $i^{i+1} = i\cdot i^i = i\cdot e^{-\frac{4k+1}{2}\pi} \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $i\cdot e^{-\frac{\pi}{2}}$ (l. a **33** feladat megoldását).

37. $e^{5-i} = e^{(5-i)\ln e} = e^{(5-i)(1+2k\pi i)} = e^{5+2k\pi}(\cos 1 - i\sin 1) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $e^5(\cos 1 - i\sin 1)$.

38. $2^{\frac{e}{2}}\left(\cos e\frac{8k+7}{4}\pi + \sin e\frac{8k+7}{4}\pi\right) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $2^{\frac{e}{2}}\left(\cos\frac{e\pi}{4} - i\sin\frac{e\pi}{4}\right)$.

39. $e^{-10k\pi}(\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)) \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\cos(5\ln 2) + i\sin(5\ln 2)$.

40. $e^{\pi i} = e^{\pi i \ln e} - e^{-2k\pi^2} \quad (k \in \mathbf{Z})$; a főérték: -1.

41. Az $a = \ln 45 + 2k\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ és $b = \ln\sqrt{45} - 4k\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$ jelöléssel $(6-3i)^{2i+1} = e^{b}(\cos a + i\sin a)$; a főérték $k = 1$ helyettesítéssel adódik.
42. $e^{2k\pi}$ $(k \in \mathbf{Z})$; a főérték: 1.
43. $e^{\sqrt{2}(2k+1)i} = \cos(\sqrt{2}(2k+1)) + i\sin(\sqrt{2}(2k+1))$ $(k \in \mathbf{Z})$; a főérték: $\cos\sqrt{2} + i\sin\sqrt{2}$.
44. $-5e^{\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-(2k+1)\pi}\left(\cos\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right) + i\sin\left(\ln 5 - \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}\right)\right)$ $(k \in \mathbf{Z})$; a főérték $k = 0$ helyettesítéssel adódik.
45. $z = \ln(-1) = i(2k+1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 46. $z = i\dfrac{4k-1}{2}\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.
47. T 24.6 alkalmazásával: $\left(e^{iz}\right)^2 + 2\pi e^{iz} - 1 = 0$. Innen $e^{iz} = -\pi \pm \sqrt{\pi^2+1}$.
Az $e^{iz} = -\pi + \sqrt{\pi^2+1}$ egyenletből: $z_1 = 2k\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1} - \pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$.
Az $e^{iz} = -\pi - \sqrt{\pi^2+1}$ egyenletből: $z_2 = (2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{\pi^2+1} + \pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásokban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)
48. Az előző feladathoz hasonló módon: $z = (2k+1)\pi - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$ $(k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)
49. $z = (4k-1)\frac{\pi}{2} - i\ln(2 \pm \sqrt{3})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)
50. $z = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 51. $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$.
52. D 24.5 és T 24.6 alapján:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1} = -1,$$

amelyből: $e^{2iz} = \dfrac{1+i}{i-1} = -i$. Innen: $z = \dfrac{4k-1}{4}\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$.
53. Az egyenletnek nincs gyöke.
54. $z = \ln(2 \pm \sqrt{3}) + i(2k+1)\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. (A megoldásban valós négyzetgyök és valós logaritmus szerepel.)
55. $z = i\dfrac{4k+1}{4}\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$. 56. Az egyenletnek nincs megoldása.
57. Használjuk fel a 18. feladat eredményeit:

$$\overline{\cos iz} = \cos\overline{iz} = \cos(-i\bar{z}) = \cos i\bar{z}.$$

Az egyenletnek megoldása minden z komplex szám.
58. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg: $z = k\pi i$ $(k \in \mathbf{Z})$.
59. Ha $z = x + iy$ megoldása az egyenletnek, akkor D 24.12 és T 24.10 szerint:

$$5^z = e^{z\ln 5} = e^{(x+iy)(\ln 5 + i2k\pi)} = e^{x\ln 5 - 2k\pi y + i(y\ln 5 + 2k\pi x)} = 1.$$

Így T 24.6-ot is felhasználva, az

$$1 = \left|e^{x\ln 5 - 2k\pi y}\cdot e^{i(y\ln 5 + 2k\pi x)}\right| = e^{x\ln 5 - 2k\pi y}$$

egyenletnek minden k egész számra teljesülni kell. Ezt az egyenletet már a valós számok halmazában kell megoldani ($\ln 5$ is valós logaritmust jelent), ezért $x \ln 5 - 2k\pi y = 0$. A $k = 0$ helyettesítéssel $x = 0$ adódik. Így $-2k\pi y = 0$, amiből tetszőleges $k \neq 0$ választással az $y = 0$ eredményt kapjuk, azaz $z = 0$ az egyenlet egyetlen megoldása.

60. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg. Az egyenletnek nincs gyöke.

61. Az **59.** feladat megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy csak $z = 0$ lehet az egyenlet gyöke. $2^0 = 1$ miatt azonban ez sem megoldás.

62. Az **59.** feladat megoldásához hasonlóan kapjuk, hogy $z = 1$.

63. Legyen z megoldása az egyenletnek. Az nyilvánvaló, hogy $z \neq 0$. Adjuk meg z-t trigonometrikus alakban: $z = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$ $(r > 0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$. Igy az egyenlet a következő alakba írható:

$$e^{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\ln r + i(\varphi + 2k\pi))} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Az **59.** feladat megoldásához hasonló módon ebből:

$$e^{r\ln r\cos\varphi - r(\varphi+2k\pi)\sin\varphi} = r.$$

Mivel ezt az egyenletet már a valós számok halmazán kell megoldani ($\ln r$ is valós logaritmust jelent), ezért mindkét oldal valós logaritmusát véve, az

$$r\ln r\cos\varphi - r(\varphi + 2k\pi)\sin\varphi = \ln r$$

egyenletet kapjuk. Az egyenletnek minden k egész számra teljesülni kell. A $k = 0$, illetve a $k = 1$ választással a

$$r\ln r\cos\varphi - r\varphi\sin\varphi = \ln r,$$

$$r\ln r\cos\varphi - r(\varphi + 2\pi)\sin\varphi = \ln r$$

egyenletekhez jutunk. Ha az első egyenletből kivonjuk a másodikat, akkor az $r2\pi\sin\varphi = 0$ egyenletet kapjuk. Ebből $\sin\varphi = 0$, azaz $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ megoldások adódnak. Ezeket az értékeket például az első egyenletbe helyettesítve, az $\ln r(\pm r - 1) = 0$ egyenleteket kapjuk, amiből $r = 1$. A két lehetséges megoldás: $z = 1$ és $z = -1$. Az eredeti egyenletbe helyettesítve meggyőződhetünk arról, hogy ezek valóban megoldásai az egyenletnek.

64. A feladat megoldását ugyanúgy kezdve, mint a **59.** feladat megoldását, az

$$e^{x\ln 5 - 2k\pi y + i(y\ln 5 + 2k\pi x)} = 1$$

egyenlethez jutunk. Ha tehát az 5^z hatvány legalább egy értékére fennáll, hogy $5^z = 1$, akkor vannak olyan k és l egész számok, hogy

$$x\ln 5 - 2k\pi y = 0, \quad y\ln 5 + 2k\pi x = 2l\pi$$

($\ln 5$ valós logaritmust jelent). Ebből:

$$x = \frac{4kl\pi^2}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2}, \quad y = \frac{2l\pi\ln 5}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2},$$

azaz

$$z = \frac{2l\pi(2k\pi + i\ln 5)}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2} \quad (k \in \mathbb{Z},\ l \in \mathbb{Z}).$$

24.4

Adott k egész szám esetén az egyenlet bal oldalába az előbb meghatározott z-t és 5 komplex logaritmusának $\ln 5 + i2k\pi$ értékét helyettesítve, **D 24.12** szerint éppen 1-et kapunk eredményül.

65. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg:

$$z = \frac{2l\pi - i\ln 2}{2k\pi} \quad (k \in \mathbf{Z} - \{0\},\ l \in \mathbf{Z}).$$

Az eredeti egyenletbe való helyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a **D 24.12** szerint adott $k \neq 0$ egész szám esetén az egyenlet bal oldalába az előbb meghatározott z-t és a 2 komplex logaritmusának $i2k\pi$ értékét helyettesítve, éppen 2-t kapunk eredményül.

66. $z = \dfrac{(2l+1)\pi(2k\pi + i\ln 2)}{\ln^2 2 + 4k^2\pi^2}; \quad k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}.$

67. $z = \dfrac{\ln^2 5 + 4kl\pi^2 + i2\pi\ln 5(l-k)}{\ln^2 5 + 4k^2\pi^2}; \quad k \in \mathbf{Z},\ l \in \mathbf{Z}.$

68. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**D 11.13**), ezért közvetlenül a $z = i$ helyettesítéssel nem számítható ki. Mivel a $z = i$ hely kivételével

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 3z^3 + (3i-2)z^2 + (5-2i)z + 5i$$

(l. például a **T 10.3** tételt), így

$$\lim_{z\to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} =$$

$$\lim_{z\to i}(3z^3 + (3i-2)z^2 + (5-2i)z + 5i) = 4(1+i).$$

69. A határérték $\frac{0}{0}$ típusú (**D 11.13**). Ezért $\displaystyle\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} =$

$$\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{(z^2+2z+4)(z^2-2z+4)} = \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z+2}{z^2+2z+4} = \frac{3-\sqrt{3}i}{8}.$$

70. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z^6+1} = \lim_{z\to i} \frac{1}{z^4 - z^2 + 1} = \frac{1}{3}.$

71. $\displaystyle\lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z\left(z - e^{\frac{\pi i}{3}}\right)}{z^3+1} = \lim_{z\to e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z}{(z+1)\left(z - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}i}{6}.$

72. Ha az $\operatorname{Re} f$ és az $\operatorname{Im} f$ valós függvények folytonosak a z_0 helyen, akkor bármely pozitív ϵ-hoz van olyan pozitív δ, hogy ha $|z - z_0| < \delta$, akkor $|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$ és $|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ezért:

$$|f(z) - f(z_0)| = |\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0) + i(\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0))| \le$$

$$|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| + |(\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0))| = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

A fordított állítás nyilvánvaló, mivel

$$|\operatorname{Re} f(z) - \operatorname{Re} f(z_0)| \le |f(z) - f(z_0)|,$$

$$|\operatorname{Im} f(z) - \operatorname{Im} f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|.$$

73. Ha $z = x + iy$, akkor $\operatorname{Re}|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ és $\operatorname{Im}|z| = 0$. Ezek a kétváltozós valós függvények mindenütt folytonosak (l. **D 14.1** és **D 14.2**). Ebből az előző feladat felhasználásával kapjuk az állítást. Közvetlenül a folytonosság definíciója alapján is bebizonyítható az állítás. Ehhez először a háromszög-egyenlőtlenség (1.49 feladat) segítségével mutassuk meg, hogy bármely z és z_0 komplex számra az $||z| - |z_0|| \leq |z - z_0|$ egyenlőtlenség teljesül.

74. Az előző feladathoz hasonlóan oldható meg.

75. Íjuk fel z-t trigonometrikus alakban (**D 6.12**). Akkor

$$f(z) = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)r\cos\varphi}{r} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cos\varphi \quad (r \neq 0).$$

Mivel $\cos\varphi + i\sin\varphi$ és $\cos\varphi$ korlátos függvényei φ-nek, ezért **T 7.26** szerint

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cos\varphi = 0.$$

Tehát legyen $f(0) = 0$.

76. Az előző feladat megoldásához hasonlóan: $f(0) = 0$.

77. A 75. megoldásához hasonlóan: $f(0) = 0$.

78. Nem lehet úgy értelmezni, mert $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ nem létezik.

79. Ha $z = x \quad (x \in \mathbf{R})$, akkor $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = 1$. Ha $z = iy \quad (y \in \mathbf{R})$, akkor $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z} = -1$. Ez azt jelenti, hogy a határérték nem létezik.

80. A $z = re^{i\varphi}$ exponenciális alakkal (**D 24.8**) számolva $f(z) = \sin 2\varphi$. Ez azt jelenti, hogy rögzített φ esetén

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{r\to 0} f(z) = \sin 2\varphi,$$

azaz a határérték különböző irányokból más és más lesz (φ-től függő).

81. Az $u = y^3 - 3x^2y$ és a $v = x^3 - 3xy^2$ kétváltozós valós függvények mindkét változó szerint mindenütt parciálisan differenciálhatók, s a parciális differenciálhányadosok folytonosak.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2,$$

azaz minden (x, y) pár kielégíti a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenleteket. Ez azt jelenti, hogy a függvény az egész komplex számsíkon differenciálható (**T 24.16**), s így reguláris is (**D 24.18**).

82. Ha $z = x + iy$, akkor $\bar{z} = x - iy$ (**D 6.3**), azaz $u = x$ és $v = -y$. Mivel $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$ és $\frac{\partial v}{\partial y} = -1$, ezért **T 24.14** szerint a függvény sehol sem differenciálható.

83. Ha $z = x + iy$, akkor $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**D 6.5**). Az $(x, y) \neq (0, 0)$ esetben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

tehát **T 24.14** szerint ekkor a függvény nem differenciálható. A $(0, 0)$ pontban a differenciálhatóságot a definíció (**M 24.13** és **D 9.1**) alapján vizsgáljuk meg:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{|z|}{z}.$$

Könnyen belátható, hogy ez a határérték nem létezik.

84. A függvény sehol sem differenciálható.

85. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

86. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

87. Használjuk fel a $\cos(x - iy) = \cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y$ összefüggést (l. a **14.** feladatot). A $z = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ pontokban a függvény differenciálható, de sehol sem reguláris (**D 24.18**).

88. A függvény sehol sem differenciálható.

89. A függvény csak az $z = 1$ helyen differenciálható.

90. A függvény csak az $z = 0$ helyen differenciálható.

91. A függvény sehol sem differenciálható.

92. A függvény az egész komplex számsíkon differenciálható, így reguláris is (**D 24.18**).

93. Ha $z \neq 0$, akkor a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek (**T 24.14**) nem teljesülnek. A $(0, 0)$ pontban a definíció alapján vizsgáljuk a differenciálhatóságot. Írjuk a $(0, 0)$ valamely környezetében a z komplex számot exponenciális alakban (**D 24.8**); ekkor:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z|\overline{z}}{z} = \lim_{r \to 0} r e^{-2\varphi i} = 0.$$

A függvény (csak) a $z = 0$ helyen differenciálható.

94. Legyen $z = re^{i\varphi}$, akkor $|z| \operatorname{Re} z = r^2 \cos\varphi$. Ha $r \neq 0$, akkor **T 24.17** szerint:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r\cos\varphi, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad -\frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

azaz ekkor a függvény nem differenciálható. Az $r = 0$ (azaz $z = 0$) esetben a definíció alapján:

$$\lim_{z \to 0} \frac{|z| \operatorname{Re} z}{z} = \lim_{r \to 0} r \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = 0.$$

A függvény csak a $z = 0$ helyen differenciálható.

95. A függvény az egész komplex számsíkon differenciálható, így reguláris is (**D 24.18**).

96. **T 24.6** szerint $e^{c(x+iy)} = e^{cx}(\cos cy + i \sin cy)$, ezért $u = e^{cx}\cos cy$ és $v = e^{cx}\sin cy$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = ce^{cx}\cos cy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -ce^{cx}\sin cy,$$

és ezek a parciális deriváltak mindenütt folytonosak. Ez az jelenti (**M 24.15** és **T 24.16**), hogy a függvény mindenütt reguláris. **T 24.14** alapján:

$$(e^{cz})' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = c \cdot e^{cz}.$$

97. Ha $z = re^{i\varphi}$ $(r \neq 0)$, akkor **T 24.10** szerint $\ln z = \ln r + i(\varphi + 2k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$. Rögzítsük k értékét, és $\ln z$-t mindig ezzel az értékkel számítsuk ki. (Úgy is szokták mondani, hogy többértékű $\ln z$ függvénynek tekintsük egy ágát.)

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0,$$

ami **T 24.17** szerint azt jelenti, hogy a függvény (bármely ága) az értelmezési tartományán reguláris. Szintén **T 24.17** szerint:

$$(\ln z)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{z}.$$

98. A bizonyítás az előző feladathoz hasonló módon történhet; $\left(\ln z^2\right)' = \frac{2}{z}$.

99. Adjuk meg a **13.** feladat és **T 24.6** segítségével a függvény valós és képzetes részét. Alkalmazzuk **T 24.14**-et; $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$.

100. $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$.

101. Írjuk fel z-t trigonometrikus alakban (**D 6.12**), és alkalmazzuk a Moivre-képletet (**T 6.14**): $z^n = r^n \cos n\varphi + ir^n \sin n\varphi$. Ha $z \neq 0$, akkor

$$\frac{\partial u}{\partial r} = nr^{n-1}\cos n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = nr^n \cos n\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -nr^n \sin n\varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = nr^{n-1}\sin n\varphi,$$

ezért ekkor **T 24.17** szerint a függvény reguláris. A $z = 0$ helyen a definíció alapján vizsgáljuk a differenciálhatóságot: $\lim\limits_{z\to 0}\frac{z^n}{z} = \lim\limits_{z\to 0} z^{n-1} = 0$, ha $n > 1$, és $\lim_{z\to 0}\frac{z^n}{z} = 1$, ha $n = 1$. Ez azt jelenti, hogy a függvény az értelmezési tartományán reguláris. A $z \neq 0$ esetben **T 24.17**-et alkalmazva:

$$(z^n)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{r}{z}\cdot nr^{n-1}(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = nz^{n-1},$$

amely $z = 0$ és $n > 1$ esetben is megadja a differenciálhányadost.

102. A $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$ azonosságot (**14.** feladat) felhasználva kapjuk az állítást; $(\cos z)' = -\sin z$.

103. $(\sin z)' = \cos z$.

104. Az előző feladat és **M 24.13** alapján: $\left(\sin\frac{z}{3}\right)' = \frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}$.

105. A függvény azokon a z helyeken nincs értelmezve, ahol $\cos z = 0$, azaz **T 24.6** szerint $\operatorname{ch} iz = 0$. Az utóbbi egyenlet megoldásai: $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. A **102.** és a **103.** feladatok megoldása, valamint **M 24.13** alapján: $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$.

106. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \left\{\dfrac{4k+1}{4}\pi;\ k \in \mathbf{Z}\right\}$;

$$\left(\frac{\cos z}{\cos z - \sin z}\right)' = \frac{1}{1 - \sin 2z}.$$

107. $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$.

108. Ha $z = x + iy$ $(z \neq 1)$, akkor

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-x^2-y^2}{1-2x+x^2+y^2} + i\frac{2y}{1-2x+x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(x^2-y^2-2x+1)}{(1-2x+x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{4y(x-1)}{(1-2x+x^2+y^2)^2}.$$

A függvény az értelmezési tartományán reguláris; $\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)' = \dfrac{2}{(1-z)^2}$.

109. A **96.** és a **101.** feladatok megoldása, valamint **M 24.13** szerint: $(z \cdot e^{-z})' = e^{-z}(1-z)$.

110. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{-i, i\}$;

$$\left(\frac{z\cos z}{1+z^2}\right)' = \frac{(1-z^2)\cos z - z(1+z^2)\sin z}{(1+z^2)^2}.$$

111. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{2k\pi i;\ k \in \mathbf{Z}\}$;

$$\left(\frac{e^z+1}{e^z-1}\right)' = -\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}.$$

112. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{k \cdot \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbf{Z}\}$;

$\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z} = \dfrac{\sin 2z}{2}$ minden olyan z helyen, ahol a bal oldal értelmezve van; ezért $\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z}\right)' = \cos 2z$.

113. Az értelmezési és regularitási tartomány: $\mathbf{C} - \{0\}$;

$$\left(\frac{e^z}{z}\right)' = \frac{e^z(z-1)}{z^2}.$$

114. A függvény nem harmonikus, mert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y^2}(2x^2+1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x^2-y^2}(2y^2-1).$$

115. A függvény harmonikus, mert

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \operatorname{ch} x \cos y - \operatorname{ch} x \cos y = 0.$$

116. Harmonikus.

117. Harmonikus.

118. Mivel $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{2\cos\frac{x}{y}}{y^2 \sin^3 \frac{x}{y}}$ és $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{2x\left(x\cos\frac{x}{y} - y\sin\frac{x}{y}\right)}{y^4 \sin^3 \frac{x}{y}}$, ezért a függvény nem harmonikus.

119. Harmonikus.

120. Az **M 24.20**-beli definíció szerint a függvény harmonikus az értelmezési tartományán (amely egyszeresen összefüggő nyílt halmaz), ezért szintén **M 24.20** szerint van olyan reguláris komplex függvény ezen a halmazon, amelynek u valós vagy képzetes része. Legyen f olyan reguláris komplex függvény, amelynek valós része u; ekkor **T 24.14** alapján

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2(x + y - i(x - y)) = 2(1 - i)z,$$

ha $z = x + iy$. Legyen g olyan reguláris komplex függvény, amelynek képzetes része u; ekkor

$$g'(z) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - y + i(x + y)) = 2(i + 1)z.$$

121. Nem.

122. Nem.

123. Ha $z = x + iy$, akkor $f'(z) = 6x + i(6y - 2) = 6z - 2i$ és $g'(z) = 2 - 6y + i6x = 6iz + 2$.

124. Ha $z = x + iy$, akkor $f'(z) = \dfrac{2(x - iy)}{x^2 + y^2} = \dfrac{2}{z}$ és $g'(z) = \dfrac{2(y + ix)}{x^2 + y^2} = \dfrac{2i}{z}$.

125. Ha $z = x + iy$, akkor $f'(z) = e^{-y}(\cos x + i \sin x) = e^{iz}$ és $g'(z) = i \cdot e^{iz}$.

126. Ha $z = x + iy$, akkor

$$f'(z) = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{z^2},$$

$$g'(z) = \frac{-2xy + i(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{i}{z^2}.$$

127. Ha van olyan v kétváltozós valós függvény, hogy az $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ függvény eleget tesz a feltételeknek, akkor **T 24.14** szerint u-nak és v-nek teljesítenie kell a Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenleteket. Mivel $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$ és $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, ezért $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y$. Innen

$$v(x, y) = \int e^x \sin y \, dy = -e^x \cos y + c(x),$$

ahol $c(x)$ az y-tól független. A $c(x)$ függvény meghatározása céljából differenciáljuk x szerint az egyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y + c'(x).$$

Használjuk fel, hogy $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$, azaz: $-e^x \cos y + c'(x) = -e^x \cos y$. Ebből $c'(x) = 0$, azaz $c(x) = c \quad (c \in \mathbf{R})$, amiből

$$f(z) = e^x \sin y + i(-e^x \cos y + c).$$

Az $f(0) = i$ feltételből következik, hogy $c = 2$.

128. A **126.** feladat megoldása szerint: $f'(z) = -\dfrac{1}{z^2}$, amiből $f(z) = \dfrac{1}{z} + ci$ $(c \in \mathbf{R})$. Megjegyezzük, hogy a konstans azért képzetes, mert az u függvény harmonikus társai $v+c \quad (c \in \mathbf{R})$ alakúak (l. **M 24.20**). Az $f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$ feltételből következik, hogy $c = 0$.

129. A **127.** feladat megoldásában megismert módszert alkalmazva:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2, \quad u(x,y) = \int (2x+2)\,dx = x^2 + 2x + c(y),$$

$$-2y = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = c'(y), \quad c(y) = -y^2 + c \ (c \in \mathbf{R}),$$

$$f(z) = x^2 + 2x - y^2 + c + i(2xy + 2y) = z^2 + 2z + c.$$

Az $f(i) = 2i - 1$ feltétel miatt $c = 0$, ezért $f(z) = z^2 + 2z$. Megoldható a feladat az előző feladat megoldásánál közölt módszerrel is:

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x + 2 + i2y = 2z + 2,$$

s így $f(z) = z^2 + 2z + c$.

130. $f(z) = x^2 - y^2 - 5x + y + 2 + i(2xy - 5y - x + c) = (x^2 + 2ixy - y^2)$
$-5(x + iy) + (-xi + y) + 2 + ci = z^2 - 5z - iz + 2 + ic \quad (c \in \mathbf{R})$.
A $f(1) = -2$ feltételből $c = 1$.

131. $f'(z) = 3z^2, \quad f(z) = z^3 + ic \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = -2i$.

132. $f'(z) = \dfrac{1}{z}, \quad f(z) = \ln z + c \quad (c \in \mathbf{R})$, ahol $\ln z$ a z logaritmusának főértékét (**D 24.11**) jelenti; $\quad c = 0$.

133. $f(z) = \frac{2-i}{2}z^2 + ic \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = \frac{1}{2}$.

134. $f(z) = \frac{1}{2}z^2 + c \quad (c \in \mathbf{R}); \quad c = 0$.

135. Az $f(z) = \operatorname{Re} z$ függvény folytonos az egész komplex számsíkon, ezért **T 24.23** szerint a komplex számsík bármely rektifikálható görbeívén integrálható. A $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t(1+i) \quad (0 \le t \le 1)$. A $z(t)$ folytonosan differenciálható a $[0,1]$ intervallumon, ezért **T 24.22** alapján:

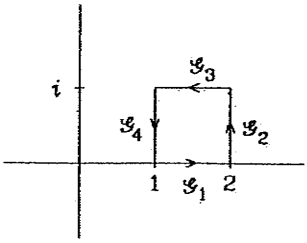
$$\int_{\mathcal{G}} \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 \operatorname{Re} z(t) z'(t)\,dt = \int_0^1 t(1+i)\,dt = (1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{i+1}{2}.$$

24.11

136. A $|z|\overline{z}$ függvény folytonos a komplex számsíkon, ezért a komplex számsík bármely rektifikálható görbeívén integrálható (**T 24.23**). A $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = e^{it} \quad (0 \le t \le \pi)$. **T 24.22** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} |z|\overline{z}\, dz = \int_0^{\pi} e^{-it} \cdot e^{it} \cdot i\, dt = i[t]_0^{\pi} = i\pi.$$

137. A $\dfrac{z}{\overline{z}}$ függvény folytonos a $\mathbf{C}-\{0\}$ halmazon, ezért **T 24.23** szerint a $\mathcal{G}$ görbén integrálható. Az ábra alapján nyilvánvaló, hogy



$$\int_{\mathcal{G}} f(z)\, dz = \int_{\mathcal{G}_1} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{G}_2} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{G}_3} f(z)\, dz + \int_{\mathcal{G}_4} f(z)\, dz.$$

A $\mathcal{G}_1$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t \quad (1 \le t \le 2)$. Mivel $z'(t) = 1$, így **T 24.22** alapján:

$$\int_{\mathcal{G}_1} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_0^1 dt = 1.$$

A $\mathcal{G}_2$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 2+it \quad (0 \le t \le 1); \quad z'(t) = i$, ezért:

$$\int_{\mathcal{G}_2} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_0^1 \frac{2+it}{2-it} i\, dt = i \int_0^1 \frac{(2+it)^2}{4+t^2}\, dt =$$

$$i \int_0^1 \left(\frac{4-t^2}{4+t^2} + i \frac{4t}{4+t^2} \right) dt = i \int_0^1 \left(\frac{2}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} - 1 + i \frac{4t}{4+t^2} \right) dt =$$

$$i \left[4 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} - t + 2i \ln(4+t^2) \right]_0^1 = 2 \ln \frac{4}{5} + i(4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - 1).$$

A $\mathcal{G}_3$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = t + i \quad (2 \ge t \ge 1)$, így:

$$\int_{\mathcal{G}_3} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \int_2^1 \frac{t+i}{t-i}\, dt = 2 \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} - 1 + i \ln \frac{2}{5}.$$

A $\mathcal{G}_4$ görbe egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 1 + it \quad (1 \ge t \ge 0)$, amiből:

$$\int_{\mathcal{G}_4} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = \ln 2 + i \left(1 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Tehát $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{z}{\overline{z}}\, dz = 2(\ln \frac{4}{5} + \operatorname{arctg} 2) \mp \ln 2 - \frac{\pi}{2} + i \left(\ln \frac{2}{5} + 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \approx$ $0,890361 - 0,632497i$.

138. 1. megoldás: Az e^z függvény mindenütt folytonos. $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete: $z(t) = 2e^{it} \quad (\pi \le t \le 2\pi)$. Ezért **T 24.23** és **T 24.22** alapján:

$$\int_{\mathcal{G}} e^z\, dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{2e^{it}} 2ie^{it}\, dt = \left[e^{2e^{it}} \right]_{\pi}^{2\pi} = e^2 - e^{-2}.$$

2. megoldás: e^z az egész komplex számsíkon reguláris (l. a **96.** feladat megoldását), ezért **T 24.24** szerint az integrálás a kezdő- és végpont között tetszőleges rektifikálható görbeíven elvégezhető. Például a $z(t) = t \quad (-2 \le t \le 2)$ egyenletű szakaszt választva:

$$\int_{\mathcal{G}} e^z \, dz = \int_{-2}^{2} e^t \, dt = e^2 - e^{-2}.$$

3. megoldás: Mivel e^z-nek egy primitív függvénye e^z, ezért **T 24.27** szerint: $\int_{\mathcal{G}} e^z \, dz = [e^z]_{-2}^{2}$.

139. A $3z+1$ függvény az egész komplex számsíkon (amely egyszeresen összefüggő nyílt halmaz) reguláris, ezért **T 24.24** szerint: $\oint_{\mathcal{G}} (3z+1) \, dz = 0$.

140. $-\int_{\mathcal{G}} (iz - 2\bar{z}) \, dz = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4ie^{2it} - 4e^{-it}\right) 2ie^{it} \, dt = -\frac{8}{3} + i\left(4\pi + \frac{8}{3}\right).$

141. $\mathcal{G}$ egy paraméteres egyenlete (választható x paraméternek):
$z(x) = x + 2x^2 i \quad (0 \le x \le 1)$;

$$\int_{\mathcal{G}} \mathrm{Re}(z + z^2) \, dz = \int_0^1 (x + x^2 - 4x^4)(1 + 4xi) \, dx = \frac{1}{30} - \frac{i}{3}.$$

142. A függvény az egész komplex számsíkon reguláris (l. a **95.** feladatot), ezért **T 24.24** és **T 24.27** szerint:

$$\int_{\mathcal{G}} z e^{z^2} \, dz = \frac{1}{2} \left[e^{z^2}\right]_{-i}^{i} = 0.$$

143. $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} \frac{z+2}{z} \, dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{2e^{it} + 2}{2e^{it}} 2ie^{it} \, dt = 4 + 2\pi i.$

144. $\displaystyle\int_{\mathcal{G}} (3z^2 + 2z) \, dz = \left[z^3 + z^2\right]_{1-i}^{2+i} = 7 + 19i.$

145. Alakítsuk az integrálandó függvényt a következő módon:

$$\frac{2z-1}{z(z-1)} = \frac{\frac{2z-1}{z}}{z-1}.$$

Az $f(z) = \dfrac{2z-1}{z}$ függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt reguláris. $\mathcal{G}$ és belseje benne van f regularitási tartományában (**D 24.18**), ezért alkalmazható a **T 24.30** tétel:

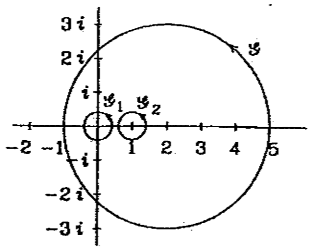
$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{2z-1}{z^2 - z} \, dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i.$$

146. Az $f(z) = \mathrm{ch}\, z$ függvényre alkalmazható a **T 24.31** Cauchy-féle integrálformula ($n = 4$ helyettesítéssel):

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\mathrm{ch}\, z}{z^5} \, dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(0) = \frac{2\pi i}{4!} \mathrm{ch}\, 0 = \frac{i\pi}{12}.$$

147. $\displaystyle\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{\sin \frac{iz\pi}{2}}{z+i}}{z-i} \, dz = 2\pi i \frac{\sin i^2 \pi}{2i} = -\pi.$

148. A nevező zérushelyei, a 0 és 1 pontok a $\mathcal{G}$ kör belsejében vannak. Ezért vegyük fel a $|z| = r$ és a $|z-1| = r$ egyenletű köröket pozitív forgásiránnyal, ahol $0 < r < \frac{1}{2}$ (l. az ábrát). **M 24.29** szerint:



$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\,dz + \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\,dz.$$

A jobb oldalon lévő két integrál kiszámítható a Cauchy-féle integrálformulák alkalmazásával:

$$\oint_{\mathcal{G}_1} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\left(\frac{e^z}{z-1}\right)''\right)_{z=0} = -5\pi i,$$

$$\oint_{\mathcal{G}_2} \frac{e^z}{z^3(z-1)}\,dz = \oint_{\mathcal{G}_2} \frac{\frac{e^z}{z^3}}{z-1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{e^z}{z^3}\right)_{z=1} = 2\pi e\,i.$$

Ebből $\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^z}{z^4 - z^3}\,dz = i\pi(2e-5)$.

149. $\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{1+z^2}\,dz = \frac{1}{2i}\left(\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-i} - \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z+i}\right) = \frac{1}{2i}(2\pi i - 2\pi i) = 0.$

150. A **T 12.16**, a **T 10.4** és a **T 12.18** tételek érvényesek komplex polinomokra is. (Természetesen a **T 12.18** tétel képletében nem szerepel a harmadik és a negyedik sor.) Ezek alapján kapjuk az

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{1}{z(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right)$$

felbontást. Így

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\,dz = -\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z}\,dz + \frac{1}{2}\left(\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z-1}\,dz + \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z+1}\,dz\right).$$

Az első két integrál értéke a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint 0, a harmadik integrál értéke a Cauchy-féle integrálformula (**T 24.30**) alapján $2\pi i$.

Ezért: $\oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{z(z^2-1)}\,dz = \pi i.$

151. $\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}\,dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}\,dz = 2\pi i\left(\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)'\right)_{z=i} = \frac{-\pi + \pi^2 i}{2}.$

152. Az ellipszis fókuszpontjai 1 és -1, fél nagytengelye 2, tehát fél kistengelye $\sqrt{3}$. Ez azt jelenti, hogy a $\frac{\pi i}{2}$ pont az ellipszis belsejében van. (Ugyanez közvetlen behelyettesítéssel is adódik: $\left|\frac{\pi i}{2} - 1\right| + \left|\frac{\pi i}{2} + 1\right| = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} = \sqrt{\pi^2 + 4} < 4.$)

Ezért **T 24.31** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi i}{2}\right)^3}\,dz = \frac{2\pi i}{2!}\left((\sin z)''\right)_{z=\frac{\pi i}{2}} = i\pi\left(-\sin\frac{\pi i}{2}\right) = \pi\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}.$$

(Felhasználtuk a **103.** és **102.** feladat eredményét, valamint a **T 24.6** tételt.)

153. A $z^3-1=0$ egyenlet gyökei: $1, \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$. A háromszög belsejében csak az 1 pont van. Ezért **M 24.30** szerint:

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz = \oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{e^{2z}}{z^2+z+1}}{z-1}\,dz = 2\pi i\frac{e^2}{3}.$$

154. $z^5-z^4-z+1=(z-1)^2(z+1)(z-i)(z+i)$; az 1, -1, i, $-i$ pontok az ellipszis belsejében vannak. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\frac{i\pi}{4e}(3+2e\sin 1-e^2)\approx 0,053641i$.

155. Osszuk el az $|4z+i|=6$ egyenlet mindkét oldalát 4-gyel: $\left|z+\frac{i}{4}\right|=\frac{3}{2}$. A görbe a $-\frac{i}{4}$ középpontú $\frac{3}{2}$ sugarú kör. $z^3-2iz^2-z=z(z-i)^2$; a 0 és i pontok a kör belsejében vannak. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\pi\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-1\right)$. (A számításnál felhasználtuk a **99.** feladat eredményét és az **M 24.13** megjegyzést is.)

156. $(z^2-z)(z^2-2iz-1)=z(z-1)(z-i)^2$; a 0 és az i pont a kör belsejében van, az 1 pont azonban nincs. Hasonlóan járhatunk el, mint a **148.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $\frac{\pi}{e}\left(1+i\frac{4e-e^2-3}{2}\right)\approx 1,155727+i0,279727$. (A számításnál felhasználtuk a **102.** feladat eredményét és **M 24.13** megjegyzést is.)

157. A **97.** és **101.** feladatokat is felhasználva:

$$(\ln(1+z))^{(n+1)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}\quad (n\in\mathbf{N}).$$

Így az $\ln z$ függvény $z_0=0$ körüli Taylor-sora: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. A sor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1}$ mértani sor tagonkénti integrálásával nyerhető. Az utóbbi sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|z|<1$, s ebben az esetben az összege $\frac{1}{1+z}$ (**T 22.5**). Ezért, ha $|z|<1$, akkor $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. Ha $|z|>1$, akkor a Taylor-sor divergens.

158. Mivel $\ln\frac{1+z}{1-z}=\ln(1+z)-\ln(1-z)$, ezért az előző feladat megoldása alapján

$$\ln\frac{1+z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-z)^n}{n}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1};\quad |z|<1.$$

159. A **12.** feladat szerint

$$\sin z=\sin\left(z-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Így D 24.5 alapján:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right);\quad z\in\mathbf{C}.$$

160. 1. megoldás: A **101.** feladat alapján: $\left(\frac{1}{1+z}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}\quad (n\in\mathbf{N})$.

Így a függvény 1 körüli Taylor-sora: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n$. Például a hányadoskritériummal (T 22.25) kimutatható, hogy a Taylor-sor az 1 szám 2 sugarú környezetében még konvergens. Például a 22.154 feladat segítségével megmutatható, hogy a maradéktag 0-hoz tart, azaz a sor ebben a környezetben előállítja a függvényt.

2. megoldás: Az $\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$ átalakítást figyelembe véve:

$$\frac{1}{1+z}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n,\quad |z-1|<2.$$

161. $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris hely. D 24.5 alapján a függvény 0 körüli Laurent-sora a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n!}$ Taylor-sor, ezért D 24.39 szerint a 0 megszüntethető szingularitás.

162. Az előző feladat megoldásához hasonló módon kapjuk, hogy $z=0$ lényeges szingularitás.

163. T 24.41 szerint $z=0$ negyedrendű pólus.

164. T 24.41 szerint $z=0$ elsőrendű pólus és $z=1$ harmadrendű pólus.

165. Mivel $\frac{\pi}{6}+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$ a $(2\sin z-1)^2$ kétszeres zérushelyei, ezért T 24.41 szerint a $\frac{1}{(2\sin z-1)^2}$ függvény másodrendű pólusai.

166. Az $\frac{1}{i2k\pi}\quad(k\in\mathbf{Z}-\{0\})$ helyek az $e^{\frac{1}{z}}-1$ függvény egyszeres zérushelyei, ezért T 24.41 szerint ezek a helyek az eredeti függvény elsőrendű pólusai. A $z=0$ hely a függvény lényeges szingularitása. A $z=0$ az $\frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z}$ függvénynek nem zérushelye, és kimutatható például indirekt módon, hogy $\lim_{z\to0}\frac{z}{e^{\frac{1}{z}}-1}$ nem létezik.

167. A $z=-2i$ pont lényeges szingularitás (D 24.5 alapján végezzük el a $z\mapsto\frac{1}{z+2i}$ helyettesítést).

168. A $z=1$ megszüntethető szingularitás. (Használjuk fel, hogy $\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=1$, ami $\sin z$ definíciójából (D 24.5) azonnal adódik.) T 24.41 szerint az $1+\frac{\pi(2k+1)}{2}\quad(k\in\mathbf{Z})$ helyek elsőrendű pólusok.

169. T **24.41** szerint a $z=0$ hely negyedrendű pólus. (Használjuk fel, hogy $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$; l. az előző feladat megoldását.)

170. A függvénynek $z=1$ az egyetlen izolált szinguláris helye és ez **T 24.41** szerint harmadrendű pólus. **D 24.5** alapján (az $n=k-3$ helyettesítést is végrehajtva):

$$\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}=\frac{e^2}{(z-1)^3}\cdot e^{2(z-1)}=\frac{e^2}{(z-1^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k(z-1)^k}{k!}=$$

$$e^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{k!}(z-1)^{k-3}=e^2\sum_{n=-3}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{(n+3)!}(z-1)^n$$

és $K=\mathbf{C}-\{1\}$.

171. A $z=0$ az egyetlen szinguláris hely, és ez harmadrendű pólus; $\frac{e^{z^2}}{z^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-3}}{n!}$; $K=\mathbf{C}-\{0\}$.

172. A függvénynek $z=-2$ az egyetlen izolált szinguláris helye. **D 24.5** szerint:

$$(z-3)\cos\frac{1}{z+2}=(z+2-5)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{z+2}\right)^{2n}=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{1}{(z+2)^{2n-1}}-\frac{5}{(z+2)^{2n}}\right).$$

$z=-2$ lényeges szingularitás (**D 24.39**); $K=\mathbf{C}-\{-2\}$.

173. A függvénynek $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris helye, amely lényeges szingularitás; $\frac{1}{z}\operatorname{ch}\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!z^{2n+1}}$; $K=\mathbf{C}-\{0\}$.

174. A függvénynek $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris helye. **D 24.5**-öt is felhasználva:

$$\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{\sin z}{z^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

$z=0$ megszüntethető szingularitás (**D 24.39**); $K=\mathbf{C}$.

175. A függvénynek $z=0$ az egyetlen izolált szinguláris helye, és ez megszüntethető szingularitás; $\frac{1-\cos z}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}z^{2n-1}$; $K=\mathbf{C}-\{0\}$.

176. **T 24.41** szerint -1 és -2 elsőrendű pólusok. Először a függvény -1 körüli Laurent-sorát adjuk meg. Legyen $u=z+1$, akkor $\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-1}{u(u+1)}$.

T 22.5 szerint:

$$\frac{u-1}{u}\cdot\frac{1}{1+u}=\left(1-\frac{1}{u}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n=-\frac{1}{u}+2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^n,\quad |u|<1,$$

ezért $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)} = -\dfrac{1}{z+1} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n$;
$K = \{z \in \mathbf{C};\quad 0 < |z+1| < 1\}$. Hasonlóan kapható meg, hogy a függvény -2 körüli Laurent-sora: $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)} = \dfrac{2}{z+2} + \sum_{n=0}^{\infty}(z+2)^n$;
$K = \{z \in \mathbf{C};\quad 0 < |z+2| < 1\}$.

177. A függvénynek $z = -1$ az egyetlen szinguláris helye. A **150.** feladat megoldásában leírt módon kapjuk, hogy

$$\frac{z}{(z+1)^3} = \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3}.$$

A jobb oldali kifejezés a függvény -1 körüli Laurent-sora; $K = \mathbf{C} - \{-1\}$.

178. Izolált szinguláris helyek: 0 és 1. Határozzuk meg a függvény 0 körüli Laurent-sorát a **T 24.36** tétel segítségével. Ha $\mathcal{G}$ a 0-t belsejében tartalmazó és a $0 < |z| < 1$ feltételt kielégítő körgyűrűben haladó zárt rektifikálható görbe pozitív forgásiránnyal, akkor $n \geq -1$ esetben **T 24.31** szerint:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{1}{z(1-z)}}{z^{n+1}}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}} \frac{\frac{1}{1-z}}{z^{n+2}}\,dz =$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\left(\frac{1}{1-z}\right)^{(n+1)}\right)_{z=0} = \left(\frac{1}{(1-z)^{n+2}}\right)_{z=0} = 1.$$

Ha viszont $n < -1$, akkor a Cauchy-féle integráltétel (**T 24.24**) szerint $c_n = 0$. Ezért:

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n; \quad K = \{z \in \mathbf{C};\quad 0 < |z| < 1\}.$$

Megjegyezzük, hogy a Laurent-sor egyszerűbben megadható a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}$$

felbontás és **T 22.5** segítségével. Hasonlóan látható, hogy a függvény 1 körüli Laurent-sora:

$$\frac{1}{z(1-z)} = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n; \quad K = \{z \in \mathbf{C};\quad 0 < |z-1| < 1\}.$$

Ez a sorfejtés is megkapható **T 22.5** és az $\dfrac{1}{z(1-z)} = \dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1+(z-1)}$ felbontás segítségével.

179. A függvénynek a 0 és a 3 izolált szinguláris helyei és ezek **T 24.41** szerint másodrendű pólusok. Először megadjuk a függvény 3 körüli Laurent-sorát. A **150.** feladat megoldásában leírt módon kapjuk, hogy

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{2}{27z} + \frac{1}{9z^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{9(z-3)^2}.$$

A függvény Laurent-sorának főrésze (D 24.34): $-\frac{2}{27(z-3)}+\frac{5}{9(z-3)^2}$, a reguláris része (D 24.34) pedig a $\frac{2}{27z}+\frac{1}{9z^2}$ komplex függvény 3 körüli Taylor-sora. Mivel $\left(\frac{2}{27z}+\frac{1}{9z^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{9z^{n+1}}\left(\frac{2}{3}+\frac{n+1}{z}\right)$, ezért T 24.32 és T 22.25 szerint:

$$\frac{2}{27z}+\frac{1}{9z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{3^{n+4}}(z-3)^n,\quad |z-3|<3,$$

ami azt jelenti, hogy

$$\frac{z}{(z+1)^3}=-\frac{2}{27(z-3)}+\frac{5}{9(z-3)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{3^{n+4}}(z-3)^n;$$

$K=\{z\in\mathbf{C};\quad 0<|z-3|<3\}$. Hasonlóan kapható meg a függvény 0 körüli Laurent-sora. Használjuk fel, hogy

$$\left(-\frac{2}{27(z-3)}+\frac{1}{9(z-3)^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(z-3)^{n+1}}\left(-\frac{2}{27}+\frac{1}{9}\cdot\frac{n+1}{z-3}\right),$$

ezért

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2}=\frac{2}{27z}+\frac{1}{9z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{3^{n+4}z^n};\quad K=\{z\in\mathbf{C};0<|z|<3\}.$$

180. A feladatot T 22.5 segítségével oldjuk meg. Bontsuk fel az f függvényt elemi törtekre (l. a **150.** feladat megoldását):

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+3}\right).$$

Ha $|z|>1$, akkor $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, ezért

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

Ha $|z|<3$, akkor $\left|\frac{z}{3}\right|<1$, ezért

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}.$$

Ez az jelenti, hogy ha $1<|z|<3$, akkor az f Laurent-sora:

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{n+1}}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n}.$$

Ha $3<|z|$, akkor $\left|\frac{3}{z}\right|<1$, s így

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}},$$

azaz ebben az esetben a Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{z^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-3^n)}{z^{n+1}}.$$

Ha $0 < |z+1| < 2$, akkor az $u = z+1$ helyettesítést alkalmazva $\left|\frac{u}{2}\right| < 1$. Emiatt az

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2u}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{2}} = \frac{1}{2u}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{u}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}u^{n-1}$$

átalakításokkal az $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}$ Laurent-sort kapjuk.

Végül ha $0 < |z| < 1$, akkor

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Ebben az esetben a Laurent-sor:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3^{n+1}-1)}{3^{n+1}}z^n.$$

Megjegyezzük, hogy a sor az f függvény 0 körüli Taylor-sora, és a $|z| < 1$ feltételt kielégítő körlapon is megadja a függvényt. Ezen a körlapon a függvény reguláris.

181. Ha $|z| < 3$, akkor a Laurent-sor az f függvény 0 körüli $f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}$ Taylor-sora. Ha $|z| > 3$, akkor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}$.

182. Bontsuk fel a függvényt elemi törtekre:

$$f(z) = \frac{2}{2-z} - \frac{1}{1-z}.$$

A feladat megoldásához a **T 22.5** tételt használjuk.

Ha $|z| < 1$, akkor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-2^n}{2^n}z^n$. (Ez a függvény Maclaurin-sora.)

Ha $1 < |z| < 2$, akkor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}.$$

Ha $|z| > 2$, akkor

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^n}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{2^n-1}{2^n}z^n.$$

Mivel $1 < |z-1|$, akkor és csak akkor ha $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$, ezért ebben az esetben:

$$\frac{2}{2-z} = \frac{2}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{2}{1-z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z-1)^{n+1}}.$$

Ebben a körgyűrűben $\frac{1}{z-1}$ Laurent-sora önmaga, ezért:

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(z-1)^{n+1}} + \frac{1}{z-1} = 2\sum_{-\infty}^{-2}(z-1)^n - (z-1)^{-1}.$$

Ha $0 < |z-2| < 1$, akkor

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-(2-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(2-z)^n.$$

Ebben a körgyűrűben $\frac{2}{2-z}$ Laurent-sora $-\frac{2}{z-2}$, ezért:

$$f(z) = -2(z-1)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$$

183. A feladatot T 22.5 segítségével oldjuk meg. Bontsuk fel az f függvényt elemi törtekre:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}\right).$$

Ha $|z| < 1$, akkor $\left|\frac{z}{i}\right| < 1$, ezért:

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{i}\frac{1}{1+\frac{z}{i}} = \frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{i^{n+1}}z^n,$$

$$\frac{1}{z-i} = -\frac{1}{i}\frac{1}{1-\frac{z}{i}} = -\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^{n+1}}.$$

Ezekből $\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$. Ez éppen a függvény Maclaurin-sora. Ha $|z| > 1$, akkor $\left|\frac{i}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < 1$. A **181.** feladat megoldásához hasonlóan kapható, hogy ebben az esetben $\frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+1}}$.

Ha $|z-3| < \sqrt{10}$, akkor az $u = z-3$ jelölést alkalmazva:

$$\frac{z}{z^2+1} = \frac{u+3}{(u+3)^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+3+i} + \frac{1}{u+3-i}\right).$$

Ha $|z-3| < \sqrt{10}$, akkor $\left|\frac{u}{3\pm i}\right| < 1$, s így:

$$\frac{1}{u+3+i} = \frac{1}{3+i}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{3+i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{(3+i)^{n+1}},$$

$$\frac{1}{u+3-i}=\frac{1}{3-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{u}{3-i}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{(3-i)^{n+1}}.$$

Ezekből:

$$\frac{z}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left((3-i)^{n+1}+(3+i)^{n+1}\right)}{2\cdot 10^{n+1}}(z-3)^n.$$

Ha $|z-3|>\sqrt{10}$, akkor

$$\frac{z}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left((3-i)^n+(3+i)^n\right)}{2\cdot(z-3)^{n+1}}.$$

184. Ha $|z|<2$, akkor **M 24.37** szerint az f függvény 0 körüli Laurent-sora megegyezik a Maclaurin-sorával, tehát az

$$\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n(n+1)!}{(z-2)^{n+2}}$$

egyenlőség felhasználásával **T 24.32** alapján

$$\frac{1}{(z-2)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n.$$

Ha $|z|>2$, akkor a **T 24.36** tételt használjuk fel a Laurent-sor együtthatóinak kiszámítására:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}}\frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2},$$

ahol $\mathcal{G}$ olyan a körgyűrűben haladó és önmagát át nem metsző zárt rektifikálható görbe, amely 0-t megkerüli pozitív forgásiránnyal. A feltétel szerint 2 is $\mathcal{G}$ belsejében van. Ha a $\mathcal{G}_1$ a 0-t, $\mathcal{G}_2$ a 2-t belsejükben tartalmazó olyan görbék, amelyek teljesítik **M 24.29** feltételeit, akkor

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}}\frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}_1}\frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2}+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}_2}\frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2}.$$

Ha $n\le -1$, akkor **T 24.24** és **T 24.31** szerint $\oint_{\mathcal{G}_1}\frac{dz}{z^{n+1}(z-2)^2}=0$, így

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}_2}\frac{\frac{1}{z^{n+1}}}{(z-2)^2}dz=\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)'_{z=2}=-\frac{n+1}{2^{n+2}}.$$

Ha $n\ge 0$, akkor

$$c_n=\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)^{(n)}_{z=0}+\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right)'_{z=2}=0.$$

Ezért a $|z|>2$ esetben a Laurent-sor: $\displaystyle\frac{1}{(z-2)^2}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n.$

185. A függvény 0 körüli Laurent-sora (**D 24.5**):

$$\frac{e^z-1}{z^3}=\frac{1}{z^3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}z^n,$$

azaz $\mathrm{Res}(0)=\frac{1}{2}$. Megoldható a feladat **T 24.45** segítségével is.

186. $\mathrm{Res}(0)=1$.

187. A függvény 0 körüli Laurent-sora (**D 24.5**):

$$\frac{1}{z^4}\sum_{n+0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n-4}}{(2n)!},$$

amiből $\mathrm{Res}(0)=0$. Megoldható a feladat a **163.** feladat megoldása és a **T 24.45** tétel segítségével is.

188. A **T 24.43** tétel szerint:

$$\mathrm{Res}(3i)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{e^{iz}}{(z-3i)(z+3i)}=\frac{e^{i\cdot 3i}}{6i}=-\frac{i}{6e^3}.$$

Hasonlóan: $\mathrm{Res}(-3i)=i\dfrac{e^3}{6}$.

189. A **T 24.44** tétel szerint:

$$\mathrm{Res}(1)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\frac{\cos 2z}{(z-1)^3}\right)''=\frac{1}{2}\lim_{z\to 1}(-2^2\cos 2z)=-2\cos 2.$$

190. A **T 24.44** tétel szerint, ha $g(z)=e^{\pi z}$ és $h(z)=z^2+1$, akkor $h'(z)=2z$ miatt:

$$\mathrm{Res}(i)=\frac{g(i)}{h'(i)}=\frac{e^{i\pi}}{2i}=\frac{i}{2}.$$

Hasonlóan: $\mathrm{Res}(-i)=-\dfrac{i}{2}$.

191. $\mathrm{Res}(0)=-\frac{5}{2}$, $\mathrm{Res}(1)=e$. **192.** $\mathrm{Res}(0)=0$.

193. $\mathrm{Res}(0)=-\frac{1}{6}$.

194. A függvény -1 és 1 elsőrendű pólusai az ellipszisen belül belül vannak, ezért a reziduum-tétel és **T 24.44** szerint:

$$\oint_G\frac{e^z}{z^2-1}\,dz=2\pi i(\mathrm{Res}(1)+\mathrm{Res}(-1))=2\pi i\left(\frac{e}{2}-\frac{e^{-1}}{2}\right)=2\pi i\,\mathrm{sh}\,1.$$

195. A függvény $k\pi i$ $(k=0,\pm1,\pm2)$ elsőrendű pólusai vannak a körön belül. A reziduumokat **T 24.44** segítségével számíthatjuk ki. Az integrál értéke: 2π.

196. **T 6.16** szerint a függvény elsőrendű pólusai: $e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$ $(k=0,1,2,3)$. Más izolált szinguláris helyei nincsenek. A körön belül a $e^{\frac{\pi i}{4}}$ és a $e^{\frac{7\pi i}{4}}$ elsőrendű pólusok vannak. A reziduumokat **T 24.44** segítségével számíthatjuk ki:

$$\int_G\frac{dz}{z^4+1}=-2\pi i\left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{\frac{\pi i}{4}}}-2\pi i\left(\frac{1}{(z^4+1)'}\right)_{z=e^{\frac{7\pi i}{4}}}=\frac{\pi i\sqrt{2}}{2}.$$

197. $\frac{2\pi i \operatorname{sh} 3}{3}$. (Felhasználtuk a $\sin iz = i \operatorname{sh} z$ összefüggést is (**T 24.6**).)

198. A függvény szinguláris helyei az 1 másodrendű, valamint a $-i$ és i elsőrendű pólusok a kör belsejében vannak. A reziduumokat **T 24.44** és **T 24.45** alapján számítjuk ki:

$$\int_{\mathcal{G}} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = -2\pi i \left(\frac{1}{z^2+1}\right)'_{z=1} -$$

$$2\pi i \left(\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right)_{z=-i} - 2\pi i \left(\frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z^2+1)'}\right)_{z=i} = 0.$$

199. A 0 ötödrendű pólus, ezért **24.45** szerint

$$\oint_{\mathcal{G}} \frac{\operatorname{ch} z}{z^5}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(0) = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(0) = \frac{i\pi}{12}.$$

Megjegyezzük, hogy pontosan ugyanazt a számítást kell elvégezni, mint a **146.** feladat megoldásában.

200. A $\mathcal{G}$ görbe belsejében csak az 1 elsőrendű pólus van. **T 24.44**-et alkalmazzuk. Megjegyezzük, hogy pontosan ugyanazt a számítást kell elvégezni, mint a **153.** feladat megoldásában. Az integrál értéke: $2\pi i \frac{e^2}{3}$.

201. A függvény 0 körüli Laurent-sora **D 24.5** alapján: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!}$. (A 0 lényeges szingularitás.) **D 24.42** szerint $\operatorname{Res}(0) = 1$, ezért az integrál értéke: $-2\pi i$.

202. **D 24.5** alapján: $e^{-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n n!}$ és $\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!}$. (A 0 lényeges szingularitás.) A reziduumot a két sor Cauchy-szorzatából (**D 22.31**) állapíthatjuk meg: $\operatorname{Res}(0) = 1$. Az integrál értéke: $2\pi i$.

203. A **172.** feladat megoldásában megmutattuk, hogy a függvénynek $z = -2$ az egyetlen izolált szinguláris helye, és ez lényeges szingularitás. A **172.** feladat megoldásában megadtuk a függvénynek -2 körüli Laurent-sorát is, amelyből: $\operatorname{Res}(-2) = -\frac{1}{2}$. Az integrál értéke: πi.

204. Az $\frac{1}{x^6+1}$ függvény páros (**D 10.9**), ezért $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6+1}$. A feladatot a **P 24.49** példában leírt módszerrel oldjuk meg. **T 6.16** szerint a függvény izolált szinguláris helyei az $e^{\frac{k\pi i}{6}}$ $(k = 1,3,5,7,9,11)$ elsőrendű pólusok, amelyek közül $e^{\frac{\pi i}{6}}, e^{\frac{3\pi i}{6}}, e^{\frac{5\pi i}{6}}$ esik a **P 24.49**-ben definiált $\mathcal{G}$ zárt görbe belsejébe. Adjuk meg a $|z| = r (> 0)$, $\operatorname{Im} z \geq 0$ egyenletű $\mathcal{G}_1$ félkör pontjait a $z = re^{i\varphi}$ $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ exponenciális alakban (**D 24.8**), akkor $r \geq \sqrt[6]{2}$ esetben

$$\left|\frac{1}{z^6+1}\right| = \left|\frac{1}{r^6 e^{i6\varphi}+1}\right| \leq \frac{1}{|r^6 e^{i6\varphi}|-1} = \frac{1}{r^6-1} \leq \frac{1}{r^6 - \frac{r^6}{2}} \leq \frac{2}{r^6}.$$

(Felhasználtuk, hogy bármely z_1 és z_2 komplex szám esetén $|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$ teljesül, ami a **T 6.6** háromszög-egyenlőtlenségből könnyen adódik.) A **P 24.49** példa megoldása alapján a számításokat elvégezve: $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^6+1} = \frac{\pi}{3}$.

205. $\sqrt{2}\pi$.

206. Oldjuk meg a feladatot a **P 24.49** példa megoldásában közölt módszerrel. Használjuk fel, hogy $|z| = r > 2$ esetén

$$\left|\frac{z^2}{(z^2+1)((z+1)^2+1)}\right| = \frac{|z|^2}{|z^2+1||(z+1)^2+1|} \leq$$

$$\frac{|z|^2}{(|z|^2-1)(|z+1|^2-1)} \leq \frac{4}{|z+1|} \leq \frac{1}{|z|-1} \leq \frac{8}{r}.$$

Az integrál értéke: $\frac{7\pi}{50}$.

207. Oldjuk meg a feladatot a **P 24.49** példa megoldása alapján! Használjuk fel, hogy $|z| = r > 4$ esetén

$$\left|\frac{ze^{i\pi z}}{z^2+2z+5}\right| = \frac{|z|}{|(z+1)^2+4|} \leq \frac{|z|}{(|z+1|-2)(|z+1|+2)} \leq$$

$$\frac{2|z|}{|z+1|^2} \leq \frac{2|z|}{(|z|-1)^2} \leq \frac{8}{|z|}.$$

Az integrál értéke: $\frac{\pi}{2e^{2\pi}}$.

208. A $\mathcal{G}$ legyen a $[-r, r]$ intervallumból és a 0 középpontú r sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörből álló zárt görbe pozitív irányítással. Ha $a < r$, akkor a $\mathcal{G}$ belsejébe esik a függvény ai harmadrendű pólusa, így a reziduum-tételt (**T 24.43**) alkalmazva:

$$\int_{-r}^{r} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3} = \oint_{\mathcal{G}} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3} -$$

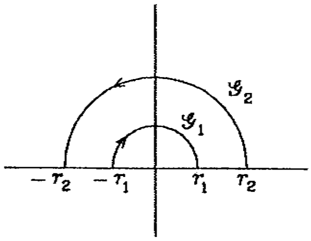
$$\int_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3} = 2\pi i \operatorname{Res}(ai) - \int_{\mathcal{G}_1} \frac{dz}{(z^2+a^2)^3}\, dz \quad (z = x + iy).$$

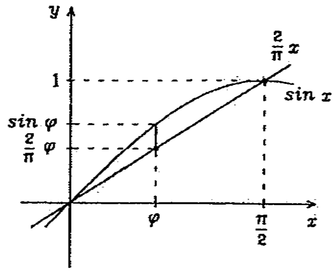
A **T 24.45** tétel szerint:

$$\operatorname{Res}(ai) = \frac{1}{2!}\left(\left(\frac{1}{(z+ai)^3}\right)''\right)_{z=ai} = \frac{3}{16a^5 i}.$$

Hasonló módon kapjuk, mint a **P 24.49**-ben, hogy $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathcal{G}_1} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\, dz = 0$, ami az jelenti, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\, dz = \frac{3\pi}{8a^5}$.

209.





A feladatot **M 24.48** és **P 24.49** alapján oldjuk meg, de a $\mathcal{G}$ zárt görbét módosítjuk a bal oldali ábrán látható módon. ($\mathcal{G}$ két félkörívből és két szakaszból álló zárt görbe pozitív irányítással.) Legyen $g(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$. Az $r_1(> 0)$ sugarú $\mathcal{G}_1$ félkörrel kizárjuk a $\mathcal{G}$ zárt görbe belsejéből a függvény egyetlen szinguláris pontját, a $z = 0$ pontot. A Cauchy-féle integráltétel (**24.24**) szerint:

$$\int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0.$$

Az első integrál $x \mapsto -x$ helyettesítéssel a következőképpen alakítható át:

$$\int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{-ix}}{x}\,dx.$$

Így az első és harmadik integrál összege: $2i\displaystyle\int_{r_1}^{r_2} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

A $|z| = r_2$, $\quad 0 \le \varphi \le \pi$ egyenletű $\mathcal{G}_2$ félkörön **T 24.22** alapján, az egyenlőtlenségnél a jobb oldali ábrát is figyelembe véve

$$\left|\int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{ir_2e^{i\varphi}}}{r_2e^{i\varphi}} ir_2e^{i\varphi}\,d\varphi\right| = \left|i\int_0^{\pi} \frac{e^{ir_2\cos\varphi}}{e^{r_2\sin\varphi}}\,d\varphi\right| =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{ir_2\cos\varphi}}{e^{r_2\sin\varphi}}\,d\varphi \le \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\frac{2r_2\varphi}{\pi}}}\,d\varphi = \frac{\pi}{2r_2}\left(1 - \frac{1}{e^{r_2}}\right).$$

Innen pedig látható, hogy $\displaystyle\lim_{r_2\to\infty}\int_{\mathcal{G}_2} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$. A második integrál határértékének kiszámítására az $\dfrac{e^{iz}}{z}$ függvény $z = 0$ körüli Laurent-sorát (**T 24.36**) használjuk fel:

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \frac{1}{z} + h(z),$$

ahol $h(z)$ a Laurent-sor reguláris részének (**D 24.34**) összegfüggvénye, ezért (akárhányszor) differenciálható, s így korlátos is a $\mathcal{G}_1$ félkörív mentén. **T 24.47** szerint $h(z)$ integrálja 0-hoz tart, ha $r_1 \to 0$. Az $\frac{1}{z}$ függvény integrálásánál $z = r_1 e^{i\varphi}$ $(\pi \geq \varphi \geq 0)$. Így:

$$\lim_{r_1 \to 0} \int_{\mathcal{G}_1} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \lim_{r_1 \to 0} \left(\int_\pi^0 \frac{i r_1 e^{i\varphi}}{r_1 e^{i\varphi}}\, d\varphi + \int_{\mathcal{G}_1} h(z)\, dz \right) = -\pi i.$$

Ily módon: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.

210. A **209.** feladat eredményét felhasználva parciális integrálással (**D 12.10**) kapjuk, hogy az integrál értéke $\frac{\pi}{2}$.

211. A $\sin\alpha \sin\beta = \sin^2 \dfrac{\alpha+\beta}{2} - \sin^2 \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ azonosság $\alpha = 2x$, $\beta = 3x$ esetre való alkalmazásával és az előző feladat eredményének felhasználásával:

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2x \sin 3x}{x^2}\, dx = \frac{5}{2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{5x}{2}}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2} \cdot \frac{5}{2}\, dx$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{5}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \pi.$$

212. Az előző feladathoz hasonló módon oldható meg. Az integrál értéke: $\frac{b\pi}{2}$.

213. A feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** alapján oldjuk meg. A $z = e^{ix}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ha $0 \leq x \leq 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - 2\cos x + \sin x} = \oint_{\mathcal{G}} \frac{2\, dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}.$$

Az $\dfrac{2}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ függvény izolált szinguláris helyei $2 - i$ és $\frac{2-i}{5}$ elsőrendű pólusok, amelyek közül csak az utóbbi esik a $\mathcal{G}$ kör belsejébe. A reziduum-tételt (**T 24.43**) és **T 24.44**-et alkalmazva, az integrál értéke: π.

214. Oldjuk meg a feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** példa alapján. Az integrál értéke: $\frac{\pi}{12}$.

215. $\frac{5\pi}{32}$.

216. A feladatot az **M 24.50** megjegyzés és a **P 24.51** alapján oldjuk meg. A $z = e^{ix}$ helyettesítést alkalmazzuk. Ha $0 \leq x \leq 2\pi$, akkor z befutja a $|z| = 1$ egyenletű $\mathcal{G}$ kör pontjait pozitív forgásiránnyal, ezért:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b\sin x} = \oint_{\mathcal{G}} \frac{2dz}{bz^2 + 2aiz - b}.$$

Az $\dfrac{2}{bz^2 + 2aiz - b}$ függvény izolált szinguláris helyei az $\dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ elsőrendű pólusok, amelyek közül csak a $\dfrac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b} i$ esik a $\mathcal{G}$ kör belsejébe. A reziduum-tételt és **T 24.44**-et alkalmazva, az integrál értéke: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}$.

217. $\dfrac{2a\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)^3}}$.

218. A T 23.29 tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens, és T 23.28 szerint az $x = m\pi \quad (m \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével mindenütt előállítja a függvényt. A T 24.52 tétel alapján:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1-e^{-ik\pi}}{2\pi ki} = \frac{1-\cos k\pi}{2\pi ki} = i\frac{(-1)^k-1}{2\pi k}, \quad \text{ha} \quad k \neq 0.$$

Ez azt jelenti, hogy ha k páratlan, akkor $c_k = -\frac{i}{\pi k}$; ha pedig k páros, de nem 0, akkor $c_k = 0$. Továbbá

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} dx = \frac{1}{2\pi}[x]_0^{\pi} = \frac{1}{2}.$$

Ezért: $f(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{i(2n+1)x}}{2n+1}$.

(Megjegyezzük, hogy a Fourier-sor komplex alakjából könnyen megkapható a Fourier-sor szokásos (valós) alakja: $a_0 = c_0, \quad a_{2n+1} = c_{2n+1} + c_{-(2n+1)} = 0$ és $b_{2n+1} = i(c_{2n+1} - c_{-(2n+1)}) = \frac{2}{\pi(2n+1)}$ $(n \in \mathbf{N})$ (T 24.52 és D 23.27).)

219. A T 23.29 tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens és T 23.28 szerint az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ helyek kivételével mindenütt előállítja a függvényt. A T 24.52 tétel szerint, a parciális integrálást kétszer alkalmazva:

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x e^{-2inx}\,dx = \left[-\frac{\cos xe^{-2inx}}{\pi}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2in}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos xe^{-2inx}\,dx =$$

$$= \frac{2in}{\pi}\left[-\sin xe^{-2inx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4n^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin xe^{-2inx}\,dx = -\frac{4in\cos n\pi}{\pi} - 4n^2c_n.$$

Ezért: $\sin x = \dfrac{4i}{\pi}\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2+1}e^{2inx}$. (T 23.28 szerint az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$ helyeken a sor összege egyenlő a függvény jobb és bal oldali határértékének számtani közepével.)

220. A T 23.29 tétel szerint a függvény Fourier-sora mindenütt konvergens és előállítja a függvényt. A T 24.52 tétel alapján:

$$e^x = \frac{e^2-1}{2e}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n(1+in\pi)}{1+n^2\pi^2}e^{in\pi x}.$$

221. A D 24.12, T 24.10 és T 24.6 szerint:

$$z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\ln z} = e^{\frac{p}{q}(\ln r + i(\varphi+2k\pi))} = e^{\frac{p}{q}\ln r}\cdot e^{ip\frac{\varphi+2k\pi}{q}} =$$

$$r^{\frac{p}{q}}(\cos p\frac{\varphi+2k\pi}{q} + i\sin p\frac{\varphi+2k\pi}{q}) = r^{\frac{p}{q}}(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{q} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{q})^p.$$

Ebből **T 6.14** és **T 6.16** alapján adódik az állítás.

222. A **14.** és a **10.264** feladatokat felhasználva:

$$|\sin(x+iy)| = |\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y| = \sqrt{\sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y} =$$

$$\sqrt{\sin^2 x(1+\operatorname{sh}^2 y) + (1-\sin^2 x)\operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}.$$

A második azonosság hasonlóan igazolható.

223. A **21.** feladatot felhasználva:

$$1 = |\cos^2 z + \sin^2 z| \le |\cos^2 z| + |\sin^2 z| = |\cos z|^2 + |\sin z|^2.$$

Ha z valós szám, akkor nyilvánvalóan egyenlőséggel igaz az állítás. Fordítva, legyen $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbf{R})$. Az előző feladat alapján:

$$|\sin z|^2 + |\cos z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = 1 + 2\operatorname{sh}^2 y \ge 1,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha $\operatorname{sh} y = 0$, amiből $y = 0$ adódik.

224. A **14.** feladatot is felhasználva:

$$\lim_{y\to\infty} e^{-y}\sin(x+iy) = \lim_{y\to\infty} e^{-y}(\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y) =$$

$$\lim_{y\to\infty}\left(\sin x\frac{1+e^{-2y}}{2} + i\cos x\frac{1-e^{-2y}}{2}\right) = \sin x + i\cos x.$$

225. A **D 24.5** definíció és a **14.** feladat segítségével:

$$\lim_{y\to\infty} \operatorname{tg}(x+iy) = \lim_{y\to\infty}\frac{\sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y}{\cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y} =$$

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\sin x + i\cos x \operatorname{th} y}{\cos x - i\sin x \operatorname{th} y} = \frac{\sin x + i\cos x}{\cos x - i\sin x} = i.$$

226. $\displaystyle\lim_{z\to 1}\frac{\sqrt{z^2+3}-2}{z-1} = \lim_{z\to 1}\frac{z+1}{\sqrt{z^2+3}+2} = \frac{1}{2}.$
Második esetben a határérték nem létezik.

227. Mivel $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \ne 0$, ezért **M 24.20** szerint az állítás igaz.

228. $g(z) = if(z)$, és reguláris függvény konstansszorosa is reguláris.

229. Ha $u(x) = ax+b$ $(x \in D_1$, és $v(y) = ay+c$ $(y \in D_2)$, akkor **T 24.16** szerint az $f(z) = u(x) + iv(y)$ komplex függvény differenciálható a D halmazon. Fordítva, tegyük fel, hogy az $f(z) = u(x) + iv(y)$ függvény differenciálható a D halmazon. Ekkor **T 24.14** alapján

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

a D halmazon. Mivel u csak x-től, v csak y-tól függ, ezért $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ is legfeljebb x-től, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ is legfeljebb y-tól függhet. Így az első differenciálegyenlet csak úgy teljesülhet, ha egyik sem függ sem x-től, sem y-tól, vagyis

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \text{konstans}.$$

Ebből nyilvánvalóan adódik az állítás.

230. Az állítás T **24.14**-ből adódik, felhasználva Szász G., Matematika II., 55. o. 15.2.3 tételét.

231. $f'(0) = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} = 0.$ **232.** Az állítás T **24.14**-ből adódik.

233. Legyen f reguláris valamely összefüggő nyílt halmazon és $|f| = c(=$ állandó$)$. Ha $c = 0$, akkor $f = 0$, és a bizonyítással készen vagyunk. Tegyük fel, hogy $c \neq 0$, és legyen $f = u + iv$. Ekkor $u^2 + v^2 = c^2$, és ebből differenciálással:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

A Cauchy-Riemann-féle differenciálegyenletek (T **24.14**) figyelembevételével ezekből

$$u^2\frac{\partial u}{\partial x} = uv\frac{\partial u}{\partial y} = -v^2\frac{\partial u}{\partial x}$$

következik, amiből $c^2\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ adódik, s így $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. T **24.14** és az előző feladat szerint igaz az állítás.

234. T **24.14**-ből és a **232.** feladatból adódik az állítás.

235. Ha $n \geq 0$, akkor a Cauchy-féle integráltétel (T **24.24**) szerint igaz az állítás. (Ebben az esetben z_0 bárhol lehet!) Ha $n < 0$, akkor a Cauchy-féle integrálformulákból (T **24.31**) adódik az állítás az $f(z) = 1$ függvény felhasználásával.

236. T **24.22** és T **24.27** szerint:

$$\int_G \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{e^{i\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)}}\,d\varphi = i\int_0^\pi e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\,d\varphi = \left[2e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)}\right]_0^\pi = 2(1-i).$$

237. A **97.** és **101.** feladat megoldását is felhasználva T **24.27** szerint:

$$\int_G \frac{\ln^3 z}{z}\,dz = \left[\frac{\ln^4 z}{4}\right]_1^i = \frac{\pi^4}{64}.$$

238. Ha z_0 nincs G belsejében, akkor a Cauchy-féle integráltétel (T **24.24**) szerint az állítás nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy z_0 a G belsejében van. Ha M az f-nek egy korlátja az E halmazon és $\mathcal{K}_r$ E-beli, G belsejében haladó r sugarú z_0 középpontú kör, akkor T **24.28** szerint:

$$\int_G f(z)\,dz = \int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz.$$

Szász G., Matematika II., 24.5.7 tételét is felhasználva:

$$\left|\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz\right| \leq M2r\pi.$$

Ebből következik, hogy $\lim\limits_{r\to 0}\int_{\mathcal{K}_r} f(z)\,dz = 0$, azaz az állítás ebben az esetben is igaz.

239. Az $\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ teljesíti az előző feladat feltételeit, ezért a **238.** feladat eredményét is felhasználva:

$$\int_{\mathcal{G}}\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=\int_{\mathcal{G}}\frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz=f(z_0)\int_{\mathcal{G}}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i f(z_0).$$

240. A szinguláris helyeket vegyük körül például olyan kis körökkel, amelyek $\mathcal{G}$ belsejében, de egymás külsejében haladnak; ekkor a reziduum definíciójából (**D 24.42**) és a **T 24.36** tételből közvetlenül adódik az állítás.

241. Az Euler-formulát (**T 24.6**) felhasználva kapjuk, hogy minden $n\in\mathbf{N}$ esetén $\cos\dfrac{n\pi x}{p}=\dfrac{e^{\frac{in\pi x}{p}}+e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2}$ és $\sin\dfrac{n\pi x}{p}=\dfrac{e^{\frac{in\pi x}{p}}-e^{-\frac{in\pi x}{p}}}{2i}$. Így

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{p}+b_n\sin\frac{n\pi x}{p}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{\frac{i\pi nx}{p}}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-\frac{in\pi x}{p}}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{\frac{in\pi x}{p}},$$

ahol $n>0$ esetben **D 23.26** szerint: $c_n=\dfrac{a_n-ib_n}{2}=$

$$\frac{1}{2p}\left(\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi x}{p}\,dx-i\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi x}{p}\,dx\right)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)e^{-\frac{in\pi x}{p}}\,dx.$$

Hasonlóan: $c_{-n}=\dfrac{a_n+ib_n}{2}=\dfrac{1}{2p}\displaystyle\int_{-p}^{p}f(x)e^{\frac{in\pi x}{p}}$, amiből $n\mapsto -n$ helyettesítéssel kapjuk az állítást negatív indexű c_n együtthatókra. Ha $n=0$, akkor $c_0=a_0$.

242. Jelöljük $\mathcal{G}$-vel a $|z|=1$ egyenletű kört. A **T 24.36** és a **T 24.22** tételek szerint:

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{G}}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{ix})}{e^{i(n+1)x}}ie^{ix}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{ix})e^{-inx}\,dx$$

($n\in\mathbf{Z}$), amelyek **24.52** szerint éppen az $f(e^{ix})$ függvény komplex alakban felírt Fourier-sorának együtthatói.

25. Laplace-transzformáció (megoldások)

1. a) $\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot te^{at}\,dt = \int_0^\infty te^{(a-p)t}\,dt$. A parciális integrálás módszerét (**D** 12.10) $f'(t) = e^{(a-p)t}$, $g(t) = t$ választással alkalmazva

$$\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \left[\frac{t\cdot e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\,dt = \left[\frac{t\cdot e^{(a-p)t}}{a-p} - \frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2}\right]_0^\infty = \tag{1}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{te^{(a-p)t}}{a-p} - \lim_{t\to\infty}\frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2} + \frac{1}{(a-p)^2}.$$

Használjuk fel, hogy tetszőleges komplex számra $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.

$\lim\limits_{t\to\infty}\left|\frac{e^{(a-p)t}}{(a-p)^2}\right| = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{|a-p|^2}e^{[\operatorname{Re}(a-p)]\cdot t} = 0$, ha $\operatorname{Re}(a-p) < 0$, azaz $\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} p < 0$, $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$.

$\lim\limits_{t\to\infty}\left|te^{(a-p)t}\right| = \lim\limits_{t\to\infty} te^{[\operatorname{Re}(a-p)]\cdot t} = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{e^{(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)t}} =$

$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{(\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} a)e^{(\operatorname{Re} p-\operatorname{Re} a)t}} = 0$ (az utolsó átalakításnál a **T** 11.12 L'Hospital szabályt alkalmazva).

Minthogy $|f(t)| \to 0$-ból $f(t) \to 0$ következik, $\mathcal{L}\{te^{at};p\} = \frac{1}{(a-p)^2}$.

b) A parciális integrálás módszerét alkalmazva (a)-hoz hasonló számítással)

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at};p\} = \int_0^\infty e^{-pt}t^n e^{at}\,dt = \int_0^\infty t^n e^{(a-p)t}\,dt =$$

$$= \left[\frac{t^n\cdot e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty - \frac{n}{a-p}\int_0^\infty t^{n-1}e^{(a-p)t} = \frac{n}{p-a}\mathcal{L}\left\{t^{n-1}e^{at};p\right\}.$$

Innen teljes indukcióval adódik

$$\mathcal{L}\{t^n e^{at};p\} = \frac{n}{p-a}\cdot\frac{n-1}{p-a}\cdot\ldots\cdot\mathcal{L}\{e^{at};p\} = \frac{n}{p-a}\cdot\frac{n-1}{p-a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p-a} =$$

$$= \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

2. $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta e^{-pt}\gamma\,dt = \frac{\gamma\left(e^{-\alpha p} - e^{-\beta p}\right)}{p}$.

3. Ennél és a következő néhány feladatnál a megoldáshoz jól használható az 1. feladat a) részéhez hasonlóan bizonyítható alábbi összefüggés:

(*) $\lim\limits_{t\to\infty}\left|t^n\cdot e^{(at+b)}\right| = 0$; $n\in\mathbf{N}$, a és b komplex szám, $\operatorname{Re} a < 0$.

$$\mathcal{L}\{g(t);p\} = \int_a^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \lim_{B\to\infty}\int_a^B e^{-pt}\cdot e^{-b(t-a)}\,dt = \frac{e^{-ba}}{p+b}.$$

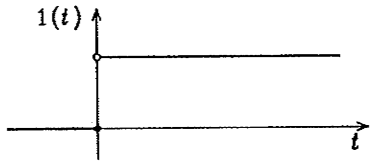
(Kihasználtuk, hogy a $(*)$ összefüggés miatt $\lim\limits_{B\to\infty}\left|\dfrac{e^{B(-p-b)+ba}}{-p-b}\right| = 0$, ha $\operatorname{Re} p > 0$ teljesül.)

4. Az ábrából leolvashatjuk, hogy $f(t) := \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le a, \\ t-a, & \text{ha } a < t \le b, \\ b-a, & \text{ha } t > b, \end{cases}$ így az előző feladat megoldásában szereplő $(*)$ összefüggést felhasználva:
$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_a^b e^{-pt}(t-a)\,dt + \int_b^\infty e^{-pt}(b-a)\,dt = \ldots = \left(e^{-ap} - e^{-bp}\right)\frac{1}{p^2}.$$

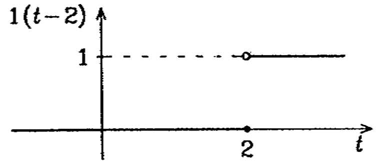
5. $\dfrac{2}{p^3}e^{-3p}$, kihasználva a **3**. feladat megoldásának $(*)$ képletét.

6. VIII. igazolása: A $\cos bt = \dfrac{1}{2}\left(e^{ibt} + e^{-ibt}\right)$ azonosság miatt
$e^{at}\cos bt = \dfrac{1}{2}\left(e^{(a+ib)t} + e^{(a-ib)t}\right)$. A III. képlet alkalmazásával adódik a VIII.
IX. igazolása: Az előzőhöz hasonlóan.
XI. igazolása: $t\cos bt = \dfrac{1}{2}\left(te^{ibt} + te^{-ibt}\right)$. Az **1a)** feladat eredményét felhasználva adódik a bizonyítandó képlet.
XII. igazolása: Az előzőhöz hasonlóan.
XIII. igazolása: A XI.-hez hasonlóan.
XIV. igazolása: A XI.-hez hasonlóan.

7.

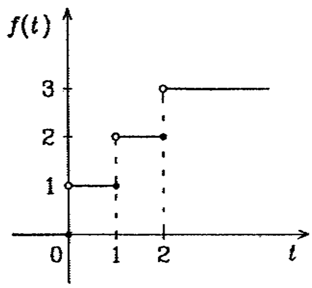


8.



9. $1(t-2)\cdot 1(t-3) = 1(t-3)$.

10.
$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < t \le 1, \\ 2, & \text{ha } 1 < t \le 2, \\ 3, & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$
$$\mathcal{L}\{f;p\} = \int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)\,dt =$$
$$= \int_0^1 e^{-pt}\,dt + \int_1^2 e^{-pt}\cdot 2\,dt + \int_2^\infty e^{-pt}\cdot 3\,dt =$$
$$= \left(1 + e^{-p} + e^{-2p}\right)\cdot\frac{1}{p}.$$



11. Mivel $\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right) = \dfrac{5}{2}\Gamma\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$, ezért $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}};p\right\} = \dfrac{15}{4}\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{p^5}}$.

12. Mivel $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos 2t}{2}$, így

$$\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1+\cos 2t}{2}\right\} = \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{\cos 2t\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+4}\right) =$$
$$= \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

13. A $\sin t \cdot \cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$ azonosság felhasználásával $\dfrac{1}{p^2+4}$.

14. Linearizálva $\sin^2 t$-t, és használva a $\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$ összefüggést, a Laplace-transzformáltra $\dfrac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$ adódik.

15. A **12.** feladat megoldásához hasonlóan adódik, hogy $f(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2a}{2}\cdot$ $\cdot\cos 2t + \dfrac{\sin 2a}{2}\cdot\sin 2t$, $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{1}{2p} + \dfrac{\cos 2a}{2}\cdot\dfrac{p}{(p^2+4)} + \dfrac{\sin 2a}{2}\cdot\dfrac{2}{p^2+4}$.

16. $\dfrac{1}{(p-a)(p-b)}$. **17.** $\dfrac{2p^2 b}{(p^2+b^2)^2}$. **18.** $\dfrac{p^2}{p^3+1}$.

19. $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ helyettesítéssel az I., III. képletekből $\mathcal{L}\{e^t \operatorname{ch} t\} = \dfrac{p-1}{(p-1)^2-1}$.

20. $\operatorname{sh}(3t-5) = \dfrac{1}{2}\left(e^{3t-5} + e^{5-3t}\right)$ helyettesítéssel $\dfrac{e^{-5}}{2(p-3)} - \dfrac{e^5}{2(p+3)}$.

21. $\mathcal{L}\{te^t\} + \mathcal{L}\{t \operatorname{ch} t\} = 2\dfrac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$ a táblázat alapján.

22. $\dfrac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.

23. A $\operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ definiáló azonosság felhasználásával $\dfrac{p^3}{p^4+1}$.

24. $\dfrac{p}{p^4+1}$. **25.** A **23.**-hoz hasonlóan $\dfrac{a}{p^2-4a^2}$.

26. A $\operatorname{ch} 3t = \dfrac{e^{3t}+e^{-3t}}{2}$ és a $\sin^2 t = \dfrac{1-\cos 2t}{2}$ azonosságok felhasználásával $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} 3t \cdot \sin^2 t\} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p}{p^2-9} + \dfrac{-p^3+5p}{p^4-10p^2+169}\right]$. (Felhasználhatjuk a **62.** feladat eredményét is; ekkor más alakban kapjuk a transzformáltat.)

27. **T 25.6** szerint megadhatók olyan K_1 és C_1 nemnegatív valós számok, hogy $|f_1(t)| \le K_1 e^{C_1 t}$; így $f(t) = a\cdot f_1(t)$-re $|f(t)| = |af_1(t)| = |a|\cdot|f_1(t)| \le |a|\cdot K_1 \cdot e^{C_1 t}$, azaz

$$|f(t)| \le K\cdot e^{Ct}, \text{ ahol } K = |a|\cdot K_1,\ C = C_1.$$

30. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ Laplace-transzformálható, vagyis megadhatók olyan K és C nemnegatív valós számok, hogy

$\left|\frac{1}{\sqrt{t}}\right| \le Ke^{Ct}$, ha $t > 0$. Az egyenlőtlenség szerint $1 \le Ke^{Ct}\sqrt{t}$ minden $t > 0$ esetén. A $t = 0$ helyen vett jobb oldali határértékre térve át az $1 \le 0$ ellentmondáshoz jutunk; tehát $\frac{1}{\sqrt{t}}$ nem Laplace-transzformálható.

31. $|f(t)| = \left|e^{3t+2}\right| = e^2 \cdot e^{3t} \le e^2 \cdot e^{3t}$, tehát $K = e^2$ és $C = 3$ választással $|f(t)| \le K \cdot e^{Ct}$ valóban teljesül.

32. $K = 1$, $C = 0$.

33. Legyen $f(t) = \frac{\ln(t+1)}{e^t}$. Ekkor $\lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = 0$, a L'Hospital szabályt alkalmazva pedig $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$ adódik. Minthogy az f függvény a $(0,\infty)$ intervallumon folytonos és a végpontokban létezik határértéke, így f korlátos is a $(0,\infty)$-n. Ezek szerint létezik olyan $K \ge 0$ szám, hogy ha $t > 0$, akkor $|f(t)| \le K$, azaz $\frac{\ln(t+1)}{e^t} \le K$, ahonnan $\ln(t+1) \le K \cdot e^{1\cdot t}$; így $C = 1$.

34. Az előző feladathoz hasonlóan járhatunk el.

35.
$$\big(f * (g+h)\big)(t) = \int_0^t f(s)\big(g(t-s) + h(t-s)\big)\,ds =$$
$$= \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds + \int_0^t f(s)h(t-s)\,ds = (f*g)(t) + (f*h)(t),$$
illetve
$$\big(f*(kg)\big)(t) = \int_0^t f(s)kg(t-s)\,ds = k\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = k(f*g)(t)$$
tetszőleges t-re.

36. A kommutativitás miatt $f*(g*h) = f*(h*g)$. Vezessük be az $a(t)$ jelölést az alábbiak szerint:
$a(t) := (h*g)(t) = \int_0^t h(u)g(t-u)\,du$. Ekkor
$$(f*(h*g))(t) = (f*a)(t) = \int_0^t f(s)a(t-s)\,ds =$$
$$= \int_0^t f(s)\int_0^{t-s} h(u)g(t-s-u)\,du\,ds = \qquad (1)$$
$$= \int_0^t \int_0^{t-s} f(s)h(u)g(t-s-u)\,du\,ds.$$

A legutóbbi kifejezés rögzített t mellett a $0 \le s \le t$, $0 \le u \le t-s$ egyenlőtlenségek által leírt D háromszögtartományon vett kettős integrál; jelöljük ezt az integrált I-vel. Az integrálás sorrendjét megcserélve
$$I = \int_0^t \int_0^{t-u} f(s)h(u)g(t-s-u)\,ds\,du =$$
$$= \int_0^t h(u)\int_0^{t-u} f(s)g(t-s-u)\,ds\,du = (h*(f*g))(t)$$
((1)-ben f és h szerepe, és az u, s változóké is felcserélhető.)
Újra a kommutativitást használva ki $(h*(f*g))(t) = ((f*g)*h)(t)$.

37. $e^t * e^t = \int_0^t e^s \cdot e^{t-s}\,ds = [e^t s]_0^t = te^t.$

38. $t^2 * t^3 = \int_0^t s^2 \cdot (t-s)^3\,ds = t^3 * t^2 = \int_0^t s^3 \cdot (t-s)^2\,ds = \frac{1}{60}t^6.$

39. $-\cos t + 1.$ **40.** $-t + \operatorname{sh} t.$

41. A $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával

$$\sin t * \cos t = \int_0^t \sin s \cdot \cos(t-s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2}[\sin t + \sin(2s-t)]\,ds =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(\sin t)\cdot s - \frac{\cos(2s-t)}{2}\right]_{s=0}^t = \frac{1}{2}t\sin t.$$

42. A $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával

$\cos t * \cos t = \frac{1}{2}(\sin t + t\cos t).$

43. A $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\big)$ azonosság alkalmazásával

$\sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$

44. A **39.** és **41.** feladatok eredményét felhasználva $-\frac{1}{2}t\sin t - \cos t + 1.$

45. $\operatorname{sh} t * \sin t = \int_0^t \operatorname{sh} s \cdot \sin(t-s)\,ds.$

A parciális integrálás módszerét először az $u(s) = \operatorname{sh} s$, $v'(s) = \sin(t-s)$ szereposztással alkalmazva (**D 12.10**, 3. típus) az

$$\int \operatorname{sh} s \cdot \sin(t-s)\,ds = \operatorname{sh} s \cdot \cos(t-s) - \int \operatorname{ch} s \cdot \cos(t-s)\,ds,$$

másodszor az $u(s) = \sin(t-s)$, $v'(s) = \operatorname{sh} s$ választást követve

$$\int \operatorname{sh} s \cdot \sin(t-s)\,ds = \operatorname{ch} s \cdot \sin(t-s) + \int \operatorname{ch} s \cdot \cos(t-s)\,ds$$

egyenleteket kapjuk. A két egyenlet megfelelő oldalait összeadva

$$\int \operatorname{sh} s \cdot \sin(t-s)\,ds = \frac{1}{2}\big(\operatorname{sh} s \cdot \cos(t-s) + \operatorname{ch} s \cdot \sin(t-s)\big),$$

és ebből $\operatorname{sh} t * \sin t = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$ adódik.

Ez a megoldás mintául szolgálhat olyan $f * g$ konvolúciók kiszámítására is, ahol $f(t)$ az $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$, e^t, illetve $g(t)$ a $\sin t$, $\cos t$ típusú függvények egyike. (Megjegyezzük, hogy ugyanakkor ezzel a módszerrel például a hasonló alakúnak tűnő $\int \sin s \cdot \sin(t-s)\,ds$, vagy $\int \operatorname{sh} s \cdot \operatorname{sh}(t-s)\,ds$ integrálása nem vezet eredményre.)

46. Az integrálban az $\operatorname{sh} t := \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ és $\operatorname{ch} t := \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ definiáló azonosságokat felhasználva a keresett konvolúció: $2t\operatorname{sh} t$.

47. A konvolúcióképzés kommutatív és disztributív, tehát

$$(\cos^2 t) * t + t * (\sin^2 t) = t * (\cos^2 t) + t * (\sin^2 t) = t * (\cos^2 t + \sin^2 t) = t * 1.$$

A **D 25.7** -ben $f(t)=t$, $g(t)=1$ választással $f(s)g(t-s)=s$, és ezért

$$(t*1)(t)=\int_0^t s\,ds=\frac{t^2}{2}.$$

48. Megfelelő azonosságok és a definíció alkalmazásával a

$$\int_0^t (\sin s+\cos s)\cdot 2\,ds$$

integrálhoz jutunk, melynek értéke $2(-\cos t+\sin t+1)$.

49. A Laplace-transzformáltak táblázatának III. képlete alapján $\mathcal{L}\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$. A **T 25.10** konvolúciótétel alapján az $f(t)=e^t$, $g(t)=e^t$ függvényekre $\mathcal{L}\{e^t*e^t\}=\dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

50. A transzformáltak táblázatának II. képlete szerint $\mathcal{L}\{t^n\}=\dfrac{n!}{p^{n+1}}$. Tehát $\mathcal{L}\{t^2*t^3\}=\mathcal{L}\{t^2\}\cdot\mathcal{L}\{t^3\}=\dfrac{2!}{p^3}\cdot\dfrac{3!}{p^4}=\dfrac{12}{p^7}$.

51. A függvényt f-fel jelölve, a konvolúció **D 25.7** definíciója szerint $f(t)=(\sin t)*e^t$, és így a **T 25.10** konvolúciótétel szerint

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-1}=\frac{1}{(p^2+1)\cdot(p-1)}.$$

52. Az előzőhöz hasonlóan $\dfrac{2}{(p^2-1)p^2}$. **53.** $\dfrac{2}{p^3(p-2)}$.

54. A $\cos t\cdot\cos s+\sin t\cdot\sin s=\cos(t-s)$ azonosság felhasználásával hozzuk a függvényt $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^t\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\cos(t-s)\,ds$ alakra, majd használjuk a **T 25.10** konvolúciótételt. A keresett transzformált: $\dfrac{p}{\sqrt{2p}(p^2+1)}$.

55. Az előzőhöz hasonlóan $\dfrac{1}{\sqrt{2p}(p^2+1)}$.

56. A III. képlet szerint $\mathcal{L}\{e^t\}=\dfrac{1}{p-1}$; így $\displaystyle\int_0^t e^s\,ds=\frac{1}{p}\mathcal{L}\{e^t\}=\frac{1}{p(p-1)}$.

57. $\dfrac{1}{p(p^2+1)}$. **58.** $\dfrac{p^2-1}{p(p^2+1)^2}$. **59.** $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

60. Mivel $e^{-t}\left(t^2*e^t\right)=e^{-t}\displaystyle\int_0^t s^2e^{t-s}\,ds$, ezért az előző feladat eredményét felhasználva a függvény Laplace-transzformáltja $\dfrac{2}{p(p+1)^3}$.

61. $f'(t)=-2\cos t\sin t=-\sin 2t$, így az V. képlet szerint

$$\mathcal{L}\{f'\}=\mathcal{L}\{-\sin 2t\}=-\mathcal{L}\{\sin 2t\}=-\frac{2}{p^2+4}.$$

Másrészt T 25.12 miatt

$$\mathcal{L}\{f'\} = p\mathcal{L}\{f\} - \lim_{t\to+0} f(t) = p\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - \lim_{t\to+0}\cos^2 t = p\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1.$$

Ezekből $p\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1 = -\dfrac{2}{p^2+4}$, azaz $\mathcal{L}\{\cos^2 t\} = \dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$.

62. $\mathcal{L}\{\sin^2 t\} = \dfrac{2}{p(p^2+4)}$.

63. A T 25.12 tétel szerint $\mathcal{L}\{f'\} = p\mathcal{L}\{f\} - f(0) = p\mathcal{L}\{f\}$, és

$$\mathcal{L}\{f''\} = p^2\mathcal{L}\{f\} - pf(0) - f'(0) = p^2\mathcal{L}\{f\}.$$

Ezek szerint $\mathcal{L}\{f'' - f' - f\} = (p^2 - p - 1)\mathcal{L}\{f\}$.

64. $(p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1)\mathcal{L}\{f\} - 5p^3 + 25p^2 + 21p - 7 + \dfrac{8}{p}$.

65. A tételt az $f(t) = \sin bt$ függvényre alkalmazva

$$\mathcal{L}\{t\sin bt\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{\sin bt\} = -\frac{d}{dp}\frac{b}{(p^2+b^2)} = \frac{2bp}{(p^2+b^2)^2}.$$

Hasonlóan adódnak a XI, XIII-XIV képletek.

66. $\mathcal{L}\{t^2\cos t\} = (-1)^2\dfrac{d^2}{dp^2}\mathcal{L}\{\cos t\} = \dfrac{d^2}{dp^2}\left[\dfrac{p}{p^2+1}\right] = \dfrac{d}{dp}\left[\dfrac{-p^2+1}{(p^2+1)^2}\right] = \dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$.

67. A táblázat alapján $\mathcal{L}\{bt\sin bt\} = b\mathcal{L}\{t\sin bt\} = \dfrac{2b^2p}{(p^2+b^2)^2}$; az előző feladatnál látott módon $\mathcal{L}\{(b^2t^2\cos bt)\} = \dfrac{2p^3b^2 - 6pb^4)}{(p^2+b^2)^3}$. Tehát a keresett Laplace-transzformált: $\dfrac{8b^4p}{(p^2+b^2)^3}$.

68. $\dfrac{p^5 - 2p^4 + 4p^3 - 5p + 2}{(p^2+1)^3}$.

69. $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} t\sin t\}$ kiszámításához használjuk fel az $\operatorname{sh} t = \dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ definiáló azonosságot. Ily módon $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} t\sin t\} = \dfrac{2p}{p^4+4}$ adódik. Ebből $\mathcal{L}\{t\operatorname{sh} t\sin t\} = -\dfrac{d}{dp}\dfrac{2p}{p^4+4} = \dfrac{6p^4-8}{(p^4+4)^2}$.

70. Az eredeti függvény T 25.12 differenciálási tétele szerint

$$\mathcal{L}\{y'\} = p\mathcal{L}\{y\} - y(0) = p\cdot Y(p) - 1, \quad \text{illetve}$$
$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2\mathcal{L}\{y\} - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - y'(0).$$

A Laplace-transzformált T 25.13 differenciálási tételét $f(t) = y''(t)$-re alkalmazva

$$\mathcal{L}\{ty''\} = -\frac{d}{dp}\mathcal{L}\{y''\} = -\frac{d}{dp}\big(p^2Y(p) - p - y'(0)\big) = -p^2Y' - 2pY + 1.$$

Az eredeti egyenlet transzformáltja

$$\mathcal{L}\{ty''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p^2\frac{dY}{dp} + 4pY - 3 = 0.$$

Utóbbit csak $Y_1(p)$ elégíti ki, tehát $Y_1(p)$ lehet az $y(t)$ transzformáltja.

71. $-p(ap+b)Y' + (ap+2b)Y - 2a = 0.$

72. Az $f(t)$ függvényre a **T 25.13** Laplace-transzformált differenciálási tétele alkalmazható, így a $g(t) = t^m f(t)$ jelöléssel

$$\mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{t^m f(t)\} = (-1)^m \frac{d^m \mathcal{L}\{f\}}{dp^m}.$$

A g függvényre most az eredeti függvény **T 25.12** differenciálási tételét alkalmazva

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{\left(t^m f(t)\right)^{(n)}\right\} &= \mathcal{L}\left\{g^{(n)}\right\} = \\ &= p^n\mathcal{L}\{g\} - p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0) = \\ &= p^n(-1)^m\frac{d^m\mathcal{L}\{f\}}{dp^m} - p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor egyezik meg $(-1)^m \frac{d^m\mathcal{L}\{f\}}{dp^m}$-mel, ha

$$p^{n-1}g(0) - p^{n-2}g'(0) - \ldots - g^{(n-1)}(0) = 0. \tag{1}$$

$g(t) = t^m f(t)$, $g'(t) = mt^{m-1}f(t) + t^m f'(t) = t^{m-1}(mf(t) + tf'(t)) = t^{m-1}f_1(t)$ alakú, ahonnan következik, hogy $g'' = t^{(m-1)-1}f_2(t) = t^{m-2}f_2(t)$ alakú, és így tovább; azaz, valamely f_k-val $g^{(k)}(t) = t^{m-k}f_k(t)$ teljesül $1 \le k \le m$-re. Ebből következően $m \ge n$ miatt nyilván $1 \le k \le (n-1)$-re is érvényes $g^{(k)}(0) = 0^{m-k}f_k(0) = 0$, így $g(0) = 0$ miatt (1) nyilvánvalóan fennáll.

73. Minthogy $f(t) = e^{-t}\sin t$ Laplace-transzformálható és

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(t)}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{e^{-t}\sin t}{t} = 1, \quad \text{valamint} \quad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0,$$

így $\frac{f(t)}{t}$ is Laplace-transzformálható. (L. a **33.** feladat megoldását.)

Mivel $\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t; p\} = \frac{1}{(p+1)^2+1^2}$ (l. IX), így a **T 25.14** tétel szerint

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}e^{-t}\sin t; p\right\} = \int_p^\infty \frac{1}{(q+1)^2+1^2}\,dq = [\operatorname{arctg}(q+1)]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(p+1).$$

74. $$\mathcal{L}\left\{\frac{1-e^{at}}{te^t}; p\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{(a-1)t}}{t}; p\right\} = \int_p^\infty \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{q-a+1}\right) dq = \left[\ln\frac{q+1}{q-a+1}\right]_p^\infty = \ln\frac{p-a+1}{p+1}.$$

75. Az előző feladat megoldásához hasonló számítással, felhasználva, hogy $\int \frac{h'(q)}{h(q)}\,dq = \ln h(q) + C$, a keresett Laplace-transzformált: $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2+a^2}{p^2+b^2}$.

76. $\mathcal{L}\{\mathrm{sh}^2\,t\}$ meghatározásánál induljunk ki $\mathrm{sh}\,t$ definíciójából. A keresett Laplace-transzformált: $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$.

77. Az előző feladat szerint $\frac{\mathrm{sh}^2\,t}{t}$ Laplace-transzformáltja $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2}{p^2-4}$. Az eredeti függvény **T 25.11** integrálási tételét alkalmazva

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\mathrm{sh}^2\,s}{s}\,ds\right\} = \frac{1}{4p}\ln\frac{p^2}{p^2-4}.$$

78. **T 25.14**, majd **T 25.11** egymás utáni alkalmazásával: $\frac{1}{p}\ln\frac{p-\beta}{p-\alpha}$.

79. Induljunk ki $1-\cos t$ transzformáltjából, majd számítsuk ki rendre $\frac{1-\cos t}{t}$, $e^{-t}\frac{1-\cos t}{t}$, $\int_0^t e^{-s}\frac{1-\cos s}{s}\,ds$ transzformáltját! $F(p) = \frac{-1}{p}\ln\frac{p+1}{\sqrt{(p+1)^2+1}}$.

80. Az $f(t) = e^{-t} - 1 + t$ és $F(p) = \mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{p^2(p+1)}$ jelölésekkel **T 25.15** szerint

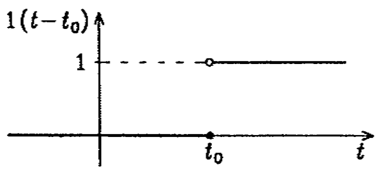
$$\mathcal{L}\{e^{-at} - 1 + at; p\} = \mathcal{L}\{f(at);p\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \frac{1}{a}\frac{1}{\left(\frac{p}{a}\right)^2\left(\frac{p}{a}+1\right)} =$$

$$= \frac{a^2}{p^2(p+a)}.$$

81. $\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{a^2}{p^2}\right)$.

82. $\mathcal{L}\{\mathrm{sh}\,bt\} = \frac{b}{p^2-b^2}$.

83. Az általánosított egységfüggvény grafikonja az ábrán látható. A táblázatunk I. képlete szerint $\mathcal{L}\{1(t);p\} = \frac{1}{p}$, **T 25.16**-ból $\mathcal{L}\{1_{t_0}(t);p\} = \mathcal{L}\{1(t-t_0);p\} = e^{-t_0p}\mathcal{L}\{1(t);p\} = \frac{1}{p}e^{-t_0p}$.



84. $f(t) := 1(t) - 1(t-\tau)$; az előző feladat megoldását felhasználva

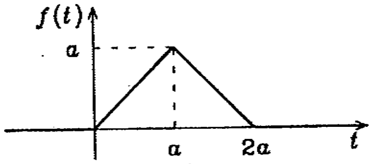
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1(t)\} - \mathcal{L}\{1(t-\tau)\} = \frac{1}{p} - \frac{e^{-p\tau}}{p} = \frac{1-e^{-p\tau}}{p}.$$

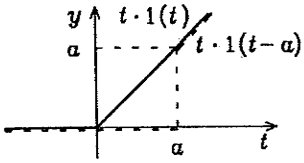
Megjegyzés. A definíció alapján történő megoldás:

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,dt = \int_0^\tau e^{-pt}\,dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\tau = \frac{-e^{-p\tau}+1}{p}.$$

85. $f(t) := \gamma\cdot 1(t-\alpha) - \gamma\cdot 1(t-\beta)$ miatt $\mathcal{L}\{f(t)\} = \gamma\dfrac{e^{-\alpha p}-e^{-\beta p}}{p}$, (l. 83.)

86. $f(t) = [t\cdot 1(t-0) - t\cdot 1(t-a)] + [(2a-t)\cdot 1(t-a) - (2a-t)\cdot 1(t-2a)]$. (Lásd a baloldali ábra.) A felírás helyessége az első két tagra vonatkozóan a jobboldali ábrából is kiolvasható.





Átalakítással $f(t) = t\cdot 1(t) + (2a-t-t)1(t-a) + (t-2a)1(t-2a)$, tehát $f(t) = t\cdot 1(t) - 2(t-a)\cdot 1(t-a) + (t-2a)\cdot 1(t-2a)$. A táblázat II. képlete szerint $f_2(t) = t\cdot 1(t)$-re $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{p^2}$, így a **T 25.16** eltolási tétel szerint $\mathcal{L}\{f_2(t-t_0)\} = \mathcal{L}\{(t-t_0)\cdot 1(t-t_0)\} = e^{-t_0 p}\mathcal{L}\{f_2(t)\} = \dfrac{1}{p^2}e^{-t_0 p}$. Az utóbbi összefüggést alkalmazva

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\cdot 1(t)\} - 2\cdot\mathcal{L}\{(t-a)\cdot 1(t-a)\} + \mathcal{L}\{(t-2a)\cdot 1(t-2a)\} =$$
$$= \frac{1}{p^2} - 2e^{-ap}\frac{1}{p^2} + e^{-2ap}\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(1-2e^{-ap}+e^{-2ap}\right) = \frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)^2.$$

(A definíció szerint is számolhatunk, az $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \int_0^{2a} e^{-pt}\cdot f(t)\,dt =$
$= \int_0^a e^{-pt}\cdot t\,dt + \int_a^{2a} e^{-pt}(2a-t)\,dt$ integráljai parciálisan kiszámíthatóak.)

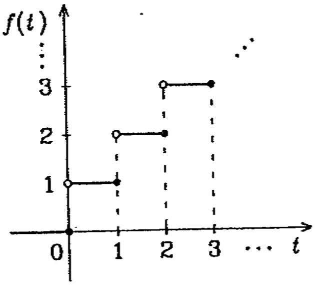
87. $\dfrac{\left(1-e^{-p}\right)^2}{p}$.

88. $e^{-ap}\dfrac{1}{p+b}$.

89. Felírhatjuk, hogy $g(t) = f_1(t) + f_2(t)$, ahol $f_1(t) = t\cdot 1(t) - t\cdot 1(t-a)$, $f_2(t) = a\cdot 1(t-a)$, ahonnan **T 25.16** alkalmazásával Laplace-transzformáltként $\dfrac{1-e^{-ap}}{p^2}$ adódik.

90. $f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \big((t-a)\cdot 1(t-a) - (t-a)\cdot 1(t-b)\big) + (b-a)\cdot 1(t-b) =$
$(t-a)\cdot 1(t-a) - (t-b)\cdot 1(t-b)$.
A Laplace-transzformált: $\left(e^{-ap}-e^{-bp}\right)\dfrac{1}{p^2}$.

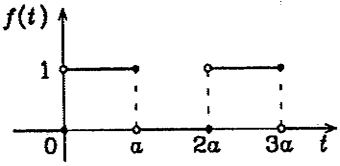
91. $f(t) = [1\cdot 1(t) - 1\cdot 1(t-1)] + [2\cdot 1(t-1) - 2\cdot 1(t-2)] + [3\cdot 1(t-2) - 3\cdot 1(t-3)] + \ldots = 1(t) + 1(t-1) + 1(t-2) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} 1(t-n)$, ezért $\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np}\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p(1-e^{-p})}$, ha $\left|e^{-p}\right| = e^{-\mathrm{Re}\,p} < 1$, így $\mathrm{Re}\,p > 0$.



92. $\frac{2}{p^3}e^{-3p}$.

93. Alkalmazzuk a **T 25.15** hasonlósági, majd az eredeti függvényre vonatkozó **T 25.16** eltolási tételt. $\mathcal{L}\{g(t);p\} = \frac{1}{a}e^{\frac{-bp}{a}} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$.

94. **1. megoldás.** A felső ábra szerint f periódusa $h = 2a$, így **T 25.17** (1) képlete szerint



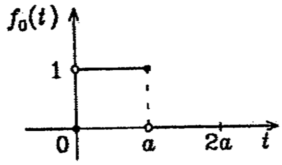
$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\int_0^{2a} e^{-pt}f(t)\,dt,$$

$$\int_0^{2a} e^{-pt}f(t)dt = \int_0^a e^{-pt}\cdot 1dt + \int_a^{2a} e^{-pt}\cdot 0dt = \frac{-e^{-pa}+1}{p},$$

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\frac{1-e^{-ap}}{p} = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}.$$

2. megoldás. **T 25.17** (2) képlete szerint $\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2ap}}\mathcal{L}\{f_0;p\}$, ahol

$$f_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > a. \end{cases}$$



Esetünkben a periódus: $h = 2a$, és $f_0(t)$ ábráját lásd oldalt. A 84. feladat eredménye szerint $\mathcal{L}\{f_0(t);p\} = \frac{1-e^{-pa}}{p}$. A megoldás innen azonos az előzővel.

95. **1. megoldás.** Az f függvény 2π szerint periodikus, így **T 25.17** (1) szerint

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi} e^{-pt}f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t\,dt =$$
$$= \frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{1-e^{-\pi p}}.$$

2. megoldás. Táblázatunk V. képlete szerint $\mathcal{L}\{\sin t \cdot 1(t)\} = \frac{1}{p^2+1}$, így **T 25.16** (az eredeti függvény eltolási tétele) miatt

$$\mathcal{L}\{\sin(t-\pi)\cdot 1(t-\pi)\} = e^{-\pi p}\cdot\frac{1}{p^2+1}, \text{ tehát}$$

$$\mathcal{L}\{f_0\} = \mathcal{L}\{\sin t\cdot 1(t)\} + \mathcal{L}\{\sin(t-\pi)\cdot 1(t-\pi)\} = \left(e^{-\pi p}+1\right)\frac{1}{p^2+1}.$$

A periódus $h = 2\pi$, így **T 25.17** (2) képlete szerint

$$\mathcal{L}\{f;p\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\frac{1+e^{-\pi p}}{p^2+1} = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

96. $\mathcal{L}\{f\} = \dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1-e^{-\pi p}}{1+e^{-\pi p}}$. **97.** $\dfrac{b-(b+ap)e^{\frac{-ap}{b}}}{ap^2\,(1-e^{-ap})}$.

98. **1. megoldás.** A függvény Laplace-transzformáltja **T 25.17** (1) szerint:

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_0^{\pi} e^{-pt}\sin t\,dt = \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{1+p^2}.$$

2. megoldás. A **T 25.17** (2) szerint: $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{\mathcal{L}\{f_0(t;p\}}{1-e^{-\pi p}}$, ahol

$$f_0(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{ha } 0 < t \le \pi, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > \pi. \end{cases}$$

Felhasználva, hogy $f_0(t) = \sin t\cdot 1(t) + \sin(t-\pi)1(t-\pi)$, a **T 25.17** tétel (2) és a **T 25.16** alkalmazásával $\mathcal{L}\{f(t);p\} = \dfrac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}\cdot\dfrac{1}{1+p^2}$.

99. A táblázat VII. képlete szerint $\mathcal{L}\{\operatorname{sh} bt;p\} = \dfrac{b}{p^2-b^2}$. Így a **T 25.18** eltolási tétel szerint $\mathcal{L}\{e^{-at}\operatorname{sh} bt;p\} = \dfrac{b}{(p+a)^2-b^2}$.

100. Az $\operatorname{sh} bt = \frac{1}{2}\left(e^{bt}-e^{-bt}\right)$ definíció és a II. képlet felhasználásával a keresett Laplace-transzformált

$$\frac{(p+b)^{n+1}-(p-b)^{n+1}}{2(p^2-b^2)^{n+1}}.$$

101. Az előző feladat eredményének felhasználásával vagy megoldási menetének megismétlésével

$$\frac{1}{2}\frac{(p-a+b)^{n+1}-(p-a-b)^{n+1}}{[(p-a)^2-b^2]^{n+1}}.$$

102. Induljunk ki a $\sin t = \dfrac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ azonosságból.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}};p\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\mathcal{L}\left\{e^{it}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}};p\right\} - \mathcal{L}\left\{e^{-it}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}};p\right\}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}};p-i\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}};p+i\right\}\right).$$

Ebből a transzformáltak táblázatának XV képlete alapján

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}};p\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 2i}\left(\sqrt{\frac{\pi}{p-i}} - \sqrt{\frac{\pi}{p+i}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}i}\cdot\frac{\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i}}{\sqrt{p^2+1}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{-1}}\frac{\sqrt{(\sqrt{p+i}-\sqrt{p-i})^2}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}.$$

103. T 25.21 szerint és a táblázat V., IV., XII. képleteinek felhasználásával

$$\sin t * \cos t = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{\sin t\}\cdot\mathcal{L}\{\cos t\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{p}{p^2+1}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2p}{(p^2+1)^2}\right\} = \frac{1}{2}t\sin t.$$

104. Az előzőhöz hasonló számítással te^t.

105. T 25.21 és VII. szerint $\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2-1)^2}\right\}$. P 25.30 többszöri alkalmazásával

$$\frac{1}{(p^2-1)^2} = \left[\frac{1}{(p-1)(p+1)}\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)(p+1)} =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{p-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{p+1}.$$

(Ezt azt eredményt úgy is megkaphatjuk, ha a racionális törtfüggvények integrálásánál megszokott módon a résztörteket az alábbi alakban keressük meg.

$$\frac{1}{(p^2-1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2(p+1)^2} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D}{p-1}.)$$

Az előállításnak megfelelően

$$\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t = \frac{(e^t-e^{-t})^2}{4}\cdot t = (\operatorname{sh}^2 t)\cdot t = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}te^{-2t} + \frac{1}{4}te^{2t}.$$

106. Az elemi törtekre bontás szokott módszerével, vagy a P 25.30 azonosságot $x=p^2$-re, $\alpha=0$-ra és $\beta=-1$-re alkalmazva

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

A táblázat felhasználásával

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} = t - \sin t.$$

Megjegyezzük, hogy ezt az inverzet megkaphatjuk konvolúcióképzéssel is (lásd Szász G., Matematika II., 408. o. 3. példájának megoldását).

107. A nevező másodfokú és nincs valós gyöke. Ilyenkor legcélszerűbb azonos átalakításokkal a táblázat VIII. és IX. képletéből adódó képletekre visszavezetni az inverz Laplace-transzformált képzését. A jelen esetben

$$F(p) = \frac{2p+1}{p^2-2p+5} = \frac{2p+1}{(p-1)^2+4} = \frac{2(p-1)+3}{(p-1)^2+2^2} =$$

$$= 2\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + 3\frac{1}{(p-1)^2+2^2} = 2\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2} + \frac{3}{2}\frac{2}{(p-1)^2+2^2},$$

tehát

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\right\} + \frac{3}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right\} =$$
$$= 2e^t\cos 2t + \frac{3}{2}e^t\sin 2t.$$

108. 1. megoldás (elemi törtekre bontással).

$$\frac{p}{(p-1)^3} = \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p-1)^3}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3}\right\} = te^t + \frac{t^2}{2}e^t.$$

2. megoldás (a kifejtési tétel **T 25.31** általános alakjából).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3};t\right\} = \frac{1}{(3-1)!}\cdot\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}e^{pt}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{p\to 1} te^{pt}(2+pt) = te^t\left(1+\frac{t}{2}\right).$$

3. megoldás. (a kifejtési tétel **T 25.32** speciális alakjából).

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3};t\right\} = \frac{1}{0!}\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^2}{2!}\cdot e^{1\cdot t}+$$
$$+\frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^1}{1!}\cdot e^{1\cdot t}+$$
$$+\frac{1}{2!}\cdot\lim_{p\to 1}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-1)^3\frac{p}{(p-1)^3}\right]\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{1\cdot t} = \frac{t^2}{2}e^t + te^t.$$

109. 1. megoldás. $\dfrac{2}{(p-1)^2(p^2+1)} = -\dfrac{1}{p-1} + \dfrac{1}{(p-1)^2} + \dfrac{p}{p^2+1}$ miatt:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)};t\right\} = -e^t + te^t + \cos t.$$

2. megoldás. A számlálót $F_1(p)$-vel, a nevezőt $F_2(p)$-vel jelölve

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}.$$

A **T 25.31** kifejtési tételt alkalmazva:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\} = \frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}e^{pt}\right]+$$
$$+\frac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{p\to i}\left[(p-i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}e^{pt}\right]+$$
$$+\frac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{p\to -i}\left[(p+i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}e^{pt}\right];$$

és a három határérték rendre $te^t - e^t$, $\frac{1}{2}e^{it}$, $\frac{1}{2}e^{-it}$.

3. megoldás (a T 25.32 speciális alak szerint:) A $p_1 = 1$ gyöknek megfelelő tagok

$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^1}{1!}\cdot e^t+$$
$$+\frac{1}{1!}\cdot\lim_{p\to 1}\left[(p-1)^2\frac{2}{(p-1)^2(p^2+1)}\right]'\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^t=$$
$$=\frac{2}{2}te^t+\lim_{p\to 1}\left(\frac{2}{p^2+1}\right)'\cdot e^t = te^t - e^t.$$

A $p_2 = i$ és $p_3 = -i$ gyököknek megfelelő tagok összegének kiszámításánál használjuk a $z+\overline{z} = 2\cdot \operatorname{Re} z$ azonosságot:

$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to i}\left[(p-i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{it}+$$
$$\frac{1}{0!}\cdot\lim_{p\to -i}\left[(p+i)\frac{2}{(p-1)^2(p-i)(p+i)}\right]^{(0)}\cdot\frac{t^0}{0!}\cdot e^{-it}=$$
$$=2\operatorname{Re}\left[\left(\lim_{p\to i}\frac{2}{(p-1)^2(p+i)}\right)e^{it}\right]=2\cdot\operatorname{Re}\left[\frac{2}{-4i\cdot 2i}e^{it}\right]=\operatorname{Re}(e^{it})=$$
$$=\operatorname{Re}(\cos t + i\sin t) = \cos t.$$

A tagok összege $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\right\} = te^t - e^t + \cos t.$

110. $1 - e^t + 2e^{-2t}$.

111. $\frac{1}{2}(e^{-t} - \cos t + \sin t)$.

112. $\frac{1}{2}(e^t + \cos t + \sin t)$.

113. Mivel $\frac{1}{p^2+4}, \frac{p}{p^2+4}, \frac{1}{p^2-1}, \frac{p}{p^2-1}$ inverz Laplace-transzformáltja is kiolvasható a táblázatból, az elemi törtek összegeként való előállítás helyett a

$$\frac{-5p}{(p^2+4)(p^2-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+4}+\frac{Cp+D}{p^2-1}$$

előállítással is dolgozhatunk. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{(p^2+4)(p^2+1)};t\right\} = \cos 2t - \operatorname{ch} t.$

114. $e^t + e^{-t}\left(-\cos 2t + \frac{3}{2}\sin 2t\right)$.

115. $$\frac{1}{p^3-8} = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+4}{p^2+2p+4}=$$
$$=\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{1}{12}\cdot\frac{p+1}{(p+1)^2+(\sqrt{3})^2}-\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{3}}{(p+1)^2++(\sqrt{3})^2}\text{-ból}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^3-8}\right\}=\frac{1}{12}e^{2t}-\frac{1}{12}e^{-t}\cos\sqrt{3}t-\frac{\sqrt{3}}{12}e^{-t}\sin\sqrt{3}t.$$

116. $e^t + 2te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$. **117.** $te^t + \frac{1}{2}t^2e^t$.

118. Elemi törtekre bontással, vagy a **106**. feladat megoldásához hasonlóan, $\frac{p}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-1} - \frac{p}{p^2+1}\right)$ átalakítással: $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$.

119. A $\frac{p^3}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+1} + \frac{p}{p^2-1}\right)$ azonosság alapján:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^3}{p^4-1}\right\} = \frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t).$$

120. $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3} = \frac{1}{(p-2)^3} + \frac{-2}{(p-2)^2} + \frac{3}{p-2} - \frac{1}{(p-1)^2} + \frac{-3}{p-1}$ miatt

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - 2te^{2t} + 3e^{2t} - te^t - 3e^t.$$

121. T 25.21 szerint

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\};$$

így a táblázat V. képlete és a **42**. feladat eredménye szerint

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2};t\right\} = \sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

122. Használjuk fel az előző feladat eredményét!

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\cdot\frac{1}{p^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^2}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t) * \sin t;$$

ebből, parciális integrálással,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+1)^3}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin s - s\cos s)\sin(t-s)\,ds = \frac{1}{8}(3-t^2)\sin t - \frac{3}{8}t\cos t.$$

123. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+9}\cdot\frac{p}{p^2+4};t\right\} = (\cos 3t) * (\cos 2t) = \frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$.

124. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\cdot\frac{1}{p+1};t\right\} = (te^{-2t}) * (e^{-t}) = -(t+1)e^{-2t} + e^{-t}$.

125. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p-1};t\right\} = (\sin t) * (e^t) = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t)$. (A konvolúciós integrál kiszámításához lásd a **51**. feladat megoldását.)

126. Az előző feladat eredményét felhasználva

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)(p^2+1)}\cdot\frac{1}{p}\right\} = \frac{1}{2}(-\sin t - \cos t + e^t) * 1(t) =$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2}(-\sin s - \cos s + e^s)\cdot 1\,ds = \frac{1}{2}(e^t + \cos t - \sin t - 2).$$

127. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2-1}\cdot\frac{1}{p^2+1};t\right\} = \operatorname{ch} t * \sin t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$. (Az integrálást illetően l. a **45**. feladat megoldását.)

128. Az előző feladat eredményét felhasználva

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^4-1}\cdot\frac{1}{p^2}\right\} = \frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{2} * t = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} t + \cos t - 2).$$

129. $\frac{p}{(p-1)^3} = p\cdot F(p)$ alakú, ahol $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3}$ és a X képlet szerint $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{t^2}{2}e^t$. Így T 25.23 szerint

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{(p-1)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\{p\cdot F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f'\} + f(0)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f'\}\} =$$

$$= f' = \left(\frac{t^2}{2}e^t\right)' = e^t\left(\frac{t^2}{2} + t\right).$$

130. Az előző feladatra visszavezetve, vagy a T 25.23-ból adódó $\mathcal{L}^{-1}\{p^2\cdot\mathcal{L}\{f\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{f''\} - p\cdot f(0) - f'(0)\}$ összefüggést felhasználva $e^t\left(\frac{t^2}{2} + 2t + 1\right)$ adódik. (Lásd még a **116**. feladat megoldását.)

131. 1. megoldás. $\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}\right)$ miatt az inverz transzformált: $\frac{1}{2}(1-\cos 2t) = \sin^2 t$.

2. megoldás. $\frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{1}{p}F(p)$, ahol $F(p) = \frac{2}{p^2+4}$.
Az V. szerint $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sin 2t$. T 25.22 szerint

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{p(p^2+4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\} = \int_0^t f(s)\,ds = \int_0^t \sin 2s\,ds =$$

$$= (-\cos 2t + 1)\cdot\frac{1}{2} = \sin^2 t.$$

132. A $\frac{2b}{(p^2+b^2)^2} = \frac{1}{p}\cdot\frac{2bp}{(p^2+b^2)^2} = \frac{1}{p}\cdot F(p)$ egyenlőségből $F(p) = \frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}$.
A keresett inverz Laplace-transzformált: $\frac{-t\cos bt}{b} + \frac{\sin bt}{b^2}$.

133. Legyen $F(p) = \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2+1}$. Ekkor $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = -\sin t$.
T 25.25-t alkalmazva

$$-\frac{\sin t}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\operatorname{arctg}\frac{1}{q}\right]_p^\infty\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right\}.\ \text{Így}\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{p}\right\} = \frac{\sin t}{t}.$$

134. Legyen $F(p) = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right]' = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p}$. Ekkor

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \cos t - 1.$$

T 25.25-t alkalmazva

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{\cos t - 1}{t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty F(q)\,dq\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{q^2}\right)\right]_p^\infty\right\} =$$

$$= -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\}.$$

Így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\right\} = \frac{1-\cos t}{t}$.

135. $\frac{e^t - t - 1}{t}$.

136. $\frac{2e^{-p}}{p^3} = e^{-p}\cdot\frac{2}{p^3} = e^{-p}\cdot F(p)$, ahol $F(p) = \frac{2}{p^3}$. A II.-ből $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = t^2$, így **T 25.27** révén

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-p}}{p^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-1\cdot p}\cdot F(p)\right\} = f(t-1)\cdot 1(t-1) =$$

$$= (t-1)^2\cdot 1(t-1) = \begin{cases} (t-1)^2, & \text{ha } t > 1, \\ 0, & \text{ha } t \le 1. \end{cases}$$

137. Használjuk fel a **131.** feladat megoldását $\frac{2}{p(p^2+4)}$ inverzének meghatározására. A keresett inverz:

$$\cos^2 t\cdot 1\left(t-\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos^2 t, & \text{ha } t > \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{ha } t \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

138. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\} = \operatorname{sh} t$. A **136.** feladat megoldásához hasonlóan

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-p}}{p^2}\right\} = (t-1)\cdot 1(t-1),\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2p}}{p^2-1}\right\} = \operatorname{sh}(t-2)\cdot 1(t-2), \text{ így}$$

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & \text{ha } 0 \le t < 1, \\ (\cos 2t) - t + 1, & \text{ha } 1 \le t < 2, \\ (\cos 2t) - t + 1 - \operatorname{sh}(t-2), & \text{ha } 2 \le t. \end{cases}$$

139. Hozzuk az $F(p) = \frac{1}{p(1+e^{-ap})}$ kifejezését $\frac{F_0(p)}{1-e^{-hp}}$ alakúra (l. **T 25.28**).

$$F(p) = \frac{1-e^{-ap}}{p\cdot(1+e^{-ap})\cdot(1-e^{-ap})} = \frac{1-e^{-ap}}{p(1-e^{-2ap})} = \frac{(1-e^{-ap})/p}{1-e^{-2ap}},$$

tehát a periódus $h = 2a$, és

$$F_0(p) = \frac{1}{p} - e^{-ap}\frac{1}{p}, \quad f_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot\frac{1}{p}\right\}.$$

$F_1(p) = \dfrac{1}{p}$-re $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = 1(t)$. **T 25.27** szerint

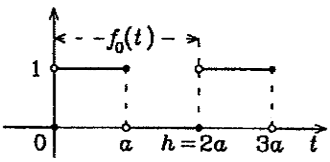
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot\frac{1}{p}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-ap}\cdot F_1(p)\right\} = f_1(t-a)\cdot 1(t-a) = 1(t-a).$$

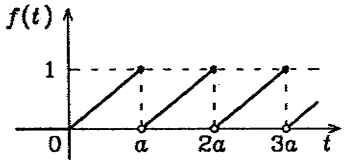
$$f_0(t) = 1(t) - 1(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \le 0, \\ 1, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t > a, \end{cases}$$

és **T 25.28** szerint

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } 0 < t \le h = 2a, \\ f(t-2a), & \text{ha } t > h = 2a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$$

Az $f(t)$ fv. grafikonját a következő baloldali ábra tartalmazza. Megjegyezzük, hogy eredményünk összhangban áll (sőt ekvivalens) a **94**. feladat eredményével.





140. A tört számlálóját és nevezőjét $-e^{-ap}$-vel megszorozva hozzuk ezt az $F(p)$ kifejezést $\dfrac{F_0(p)}{1-e^{-hp}}$ alakúra, majd állítsuk elő $F_0(p)$ inverz Laplace-transzformáltját.

$$f_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{a}, & \text{ha } 0 < t \le a, \\ 0, & \text{ha } t \le 0, \text{ vagy } t > a, \end{cases} \qquad f(t) = \begin{cases} f_0(t), & \text{ha } t \le a, \\ f(t-a), & \text{ha } t > a. \end{cases}$$

Az f görbéje az előző jobboldali ábrán látható.

141. **T 22.5** szerint $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$, ha $|q| < 1$.

Így $\displaystyle\frac{p^5}{p^6-1} = \frac{\frac{1}{p}}{1-\frac{1}{p^6}} = \frac{1}{p}\frac{1}{1-\frac{1}{p^6}} = \frac{1}{p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p^6}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{6n+1}}$ és

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p^5}{p^6-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p^{6n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{6n+1}}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{6n}}{(6n)!}. \text{ (L. X.)}$$

142. e^z definícióját (**D 24.5**) felhasználva $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{k!(2k)!}$.

143. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)^2} \cdot t^{2k}$. **144.** $\frac{ap^2}{p^4 + 4a^4}$.

145. Linearizáljuk $\cos^2 t$-t. A keresett Laplace-transzformált:

$$\frac{3}{8p} + \frac{p}{2(p^2+4)} + \frac{p}{8(p^2+16)}.$$

146. A $\sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}$ azonosság felhasználásával: $\frac{1}{8p} - \frac{p}{8(p^2+16)}$.

147. Használjuk az indirekt bizonyítási módszert. Ha lenne olyan K és C valós szám, hogy $e^{t^2} \le Ke^{Ct}$ a $(0, \infty)$ intervallumon, akkor $e^{t^2 - Ct} \le K$ is teljesülne, ellentmondásban azzal, hogy $e^{t^2 - Ct}$ felülről nem korlátos.

148.

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt = \int_0^{\infty} e^{-pt-\frac{t^2}{2}}\,dt = e^{\frac{p^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{\frac{-(p+t)^2}{2}}\,dt.$$

Az utóbbi integrálban vezessünk be új változót a $p+t = \tau$ összefüggés alapján. A τ integrálási változó határai p és ∞ lesznek,

$$\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = e^{\frac{p^2}{2}} \int_p^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau, \quad \text{de} \quad \int_0^p e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(p), \quad \text{és}$$

$$\int_p^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau - \int_0^p e^{-\frac{\tau^2}{2}}\,d\tau = \lim_{u\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(u) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\Phi(p).$$

Így adódik $\mathcal{L}\left\{e^{\frac{-t^2}{2}};p\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{p^2}{2}}[1 - \Phi(p)]$.

149. T 25.11 révén $\mathcal{L}\{\Phi(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right\} = \frac{1}{p} e^{p^2/2}\big(1 - \Phi(p)\big)$.

150. Legyen f és g Laplace-transzformálható. Ekkor léteznek olyan K_1, C_1 és K_2, C_2 nemnegatív konstansok, hogy

$$|f(t)| \le K_1 e^{C_1 t} \quad \text{és} \quad |g(t)| \le K_2 e^{C_2 t}.$$

Ezért, ha $C \ge C_1 + C_2$, akkor

$$|(f * g)(t)| = \left|\int_0^t f(s)g(t-s)\,ds\right| \le \int_0^t |f(s)||g(t-s)|\,ds \le K_1 K_2 \int_0^t e^{Ct}\,ds =$$
$$= K_1 K_2 t e^{Ct} \le K_1 K_2 e^{(C+1)t},$$

mert a $(0, \infty)$ intervallumon $t \le e^t$.

151. $\mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} \cdot \mathcal{L}\{h\}$. **152.** $\mathcal{L}\{f_1\}\mathcal{L}\{g_1\}\mathcal{L}\{f_2\}\mathcal{L}\{g_2\}$.

153. Elég belátni, hogy a két oldal Laplace-transzformáltjai egyenlőek. Ezek kiszámításához támaszkodjunk a T 25.10, illetve T 25.11 tételekre.

154. Térjünk át a Laplace-transzformáltakra. A bal oldalon alkalmazzuk $(n+1)$-szer a T 25.11 tételt, a jobb oldalon pedig alkalmazzuk a T 25.10 tételt. A T 25.19 következménye alapján következik az állítás helyessége.

155. **T 25.11** és **T 25.14** miatt

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\left\{\frac{\sin 7t \cdot \sin 3t}{t};p\right\} = \frac{1}{p}\int_p^\infty \mathcal{L}\left\{\sin 7t \cdot \sin 3t; q\right\}\, dq.$$

A $\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2}\Big(\cos(u-v) - \cos(u+v)\Big)$ azonosságot és a IV. képletet felhasználva

$$\mathcal{L}\left\{\sin 7t \cdot \sin 3t; p\right\} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2+16} - \frac{p}{p^2+100}\right).$$

Ezekből

$$\mathcal{L}\{f(t);p\} = \frac{1}{4p}\left[\ln\frac{q^2+16}{q^2+100}\right]_p^\infty = \frac{1}{4p}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}.$$

156. Vezessük be a $g(t) = f^{(n)}(t)$ jelölést. Fejezzük ki $t^m g(t)$ Laplace-transzformáltját a **T 25.13** tétel szerint, majd g-re alkalmazzuk az **T 25.12** tételt. Végül vegyük figyelembe, hogy $\dfrac{d^m p^k}{dp^m} = 0$, ha $0 \le k \le n-1$.

157. A definiáló $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt = \int_{a_1}^{a_2} e^{-pt} m(t-a_0)\, dt$ integrált kiszámítva, vagy a **86**. feladat megoldásához hasonló

$$\begin{aligned} f(t) &= m(t-a_0)1(t-a_1) - m(t-a_0)1(t-a_2) = \cdots \\ &= m\Big[(t-a_1)+(a_1-a_0)\Big]1(t-a_1) - m\Big[(t-a_2)+(a_2-a_0)\Big]1(t-a_2) = \\ &- m(a_2-a_0)1(t-a_2) \end{aligned}$$

átalakításokkal a keresett transzformált:

$$\mathcal{L}\left\{f(t);p\right\} = m\frac{1}{p^2}\left(e^{-a_1p} - e^{-a_2p}\right) + m\frac{1}{p}\Big[(a_1-a_0)e^{-a_1p} - (a_2-a_0)e^{-a_2p}\Big].$$

158. Legyen

$$f_1(t) := \begin{cases} \sin at, & \text{ha } \dfrac{2n\pi}{a} < t \le \dfrac{(2n+1)\pi}{a}, \\ 0, & \text{ha } \dfrac{(2n+1)\pi}{a} < t \le \dfrac{(2n+2)\pi}{a}, \\ 0, & \text{ha } t \le 0. \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{L}\{f_1(t);p\} = \mathcal{L}\{f(at);p\}$, ahol f az **95**. feladatbeli függvény. A **T 25.16** tétel szerint pedig $\mathcal{L}\{g(t);p\} = e^{-\frac{\pi p}{a}}\mathcal{L}\{f_1(t);p\}$. Ezekből, **T 25.15** figyelembevételével

$$\mathcal{L}\{g(t);p\} = e^{\frac{-\pi}{a}p}\frac{a}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi}{a}p}} = \frac{a}{p^2+a^2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{a}p}-1}.$$

159. A $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\Big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\Big)$ azonosság felhasználásával a keresett Laplace-transzformált $\dfrac{p}{p^4+4} + \dfrac{5p}{p^4+48p^2+676}$.

160. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{p^2+4}\cdot\frac{1}{p^2-1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-5p}{p^2+4}\right\}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2-1}\right\} =$

$$= (-5\cos 2t) * (\operatorname{sh} t) = -5\cdot\int_0^t \cos 2s\cdot\operatorname{sh}(t-s)\,ds = \cos 2t - \operatorname{ch} t.$$

161. $\mathcal{L}\{\operatorname{ch} t * \sin t\} = \mathcal{L}\{\operatorname{sh} t * \cos t\}$; így a **T 25.19** tétel következménye szerint $\operatorname{ch} t * \sin t = \operatorname{sh} t * \cos t$, ha $t \geq 0$.

162. $t\sin t$. Megjegyezzük, hogy az inverz Laplace-transzformált közvetlenül kiolvasható a transzformáltak XII. képletéből, hiszen $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2pb}{(p^2+b^2)^2}\right\} = t\sin bt$.

163. $(t^2e^{3t}) * e^{-4t} = \left(\frac{t^2}{7} - \frac{2t}{49} + \frac{2}{343}\right)e^{3t} + \left(\frac{-2}{343}\right)e^{-4t}$.

164. $\frac{1}{3}(\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} t)$, mert pl. $F(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)} = \left(\frac{p}{p^2-4} - \frac{p}{p^2-1}\right)\cdot\frac{1}{3}$.

165. Célszerűen **T 25.30** felhasználásával $\frac{1}{p^4-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2-1} - \frac{1}{p^2+1}\right)$ adódik, ezért

$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^4-1}\right\} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$. Így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^4-1)^2}\right\} = \left(\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)\right) * \left(\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)\right)$, ami **T 25.9** szerint a **43.** és **45.** feladat és $\operatorname{sh} t * \operatorname{sh} t$ konvolúcióira vezet.

166. Vegyük észre, hogy a megadott $F(p)$ könnyen integrálható, és alkalmazzuk a Laplace-transzformált integrálási tételét, **T 25.25**-t:

$$f(t) = t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_p^\infty \frac{q^3}{(q^4-1)^2}\,dq\right\} = t\cdot\frac{1}{4}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^4-1};t\right\} = \frac{1}{8}\cdot t(\operatorname{sh} t - \sin t)$$

az előző feladat egyik részeredményének felhasználásával.

167.

$$\frac{1}{p^3\cdot(p+1)^3} = \left(\frac{1}{p(p+1)}\right)^3 = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)^3.$$

Végezzük el a kijelölt hatványozást és ismételten $\frac{1}{p(p+1)}$-nek $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)$-gyel történő helyettesítését mindenhol.

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = e^{-t}\left(\frac{-t^2}{2} - 3t - 6\right) + \left(\frac{t^2}{2} - 3t + 6\right).$$

168. $Q(p)$-t szorzatként deriválva $\frac{Q'(p)}{Q(p)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p-p_i}$, így $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q'(p)}{Q(p)};t\right\} = \sum_{i=1}^{n} e^{p_it}$.

169. $\frac{t^2-1}{8}\operatorname{sh} t + \frac{t}{8}\operatorname{ch} t$.

170. Határozzuk meg először $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)}\right\}$-t.

$$\frac{1}{p(p+1)(p^2+4)} = \frac{1}{4}\frac{1}{p} - \frac{1}{5}\frac{1}{p+1} - \frac{1}{20}\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{p^2+4}.$$

Az inverz Laplace-transzformált:

$$f(t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}e^{-(t-1/2)} - \frac{1}{20}\cos 2(t-\frac{1}{2}) - \frac{1}{10}\sin 2(t-\frac{1}{2})\right), & \text{ha } t > \dfrac{1}{2}, \\ 0, & \text{ha } t \le \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

171. $e^t \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot t^k.$

172. 1. megoldás. A **T 25.21** konvolúciótétel szerint $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\} =$

$$e^{-t} * \sin 2t = \sin 2t * e^{-t} = \int_0^t (\sin 2s) \cdot e^{-(t-s)}\, ds = e^{-t} \int_0^t e^s \sin 2s\, ds.$$

2. megoldás. Alkalmazzuk **T 25.29**-t $k = -1$ választással, majd **T 25.22**-t.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p^2+4)}\right\} = e^{-t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1+1)[(p-1)^2+4]}\right\} =$$

$$e^{-t} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{(p-1)^2+4}}{p}\right\} = e^{-t} \cdot \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-1)^2+4}; s\right\} ds =$$

$$\frac{1}{2}e^{-t} \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p-1)^2+2^2}; s\right\} ds = \frac{1}{2}e^{-t} \int_0^t e^{1\cdot s} \cdot \sin 2s\, ds.$$

173. $\dfrac{1}{a} e^{\frac{-b}{a}t} f\left(\dfrac{t}{a}\right).$

26. Egyismeretlenes egyenletek közelítő megoldása (megoldások)

1. $f(0) = -10.8$, $f(2.5) \approx 4$.

a) Jelöljük a szükséges iterációs lépések számát k-val. Ha a gyököt legalább négy tizedes pontossággal akarjuk meghatározni, akkor $\frac{2.5-0}{2^k} < 0.00005$-ből $k \geq 16$, azaz 16 lépés szükséges. Kössük ki azt is, hogy $|f(x_k)| < 0.0001$ legyen.

k	x	$f(x)$	k	x	$f(x)$
	0.0	-10.8	9	1.2451172	-0.34
	2.5	4.0	10	1.2475586	0.001
1	1.25	0.04	11	1.2463379	-0.016
2	0.625	-1.49	12	1.2469483	-0.007
3	0.9375	-3.12	13	1.2472534	-0.002
4	1.09375	-2.07	14	1.2474060	-0.0002
5	1.171875	-1.09	15	1.2474823	0.0008
6	1.2109375	-0.53	16	1.2474442	0.0002
7	1.2304688	-0.25	17	1.2474251	-0.0000015
8	1.2402344	-0.11			

A táblázatból látható, hogy ha a függvényértékre kirótt pontosságot el akarjuk érni, nem elég a gyököt csak négy tizedesig ismerni.

b) Vizsgáljuk meg, tudunk-e mondani valamit a konvergencia gyorsaságáról. A derivált $f'(x) = 12x^2 - 34.4x + 24 + 15\cos 5x$, ez $x = 0$-ban pozitív. Az első három tagból álló másodfokú kifejezés ill. $\cos 5x$ minimumát vizsgálva rögtön látjuk, hogy ez lehet negatív is, pl. $f'(0.6) < -7$, ami azt jelenti, hogy a $[0;2.5]$ intervallumon valahol biztosan nulla, így a konvergencia gyorsaságát az adott képlettel nem tudjuk becsülni.

k	x	$f(x)$
0	0.0	-10.8
1	2.5	4.0010343
2	1.824196	0.9232889
3	1.680528	2.5009644
4	1.364540	1.6271721
5	1.1858712	-0.8960475
6	1.2493218	0.0279647
7	1.2474015	-0.0003494
8	1.2474252	0.000000023

c) A függvény a $[0;2.5]$ intervallumon nem tesz eleget a Newton-módszernél közölt elégséges feltételek egyikének sem, de $f'(2.5) > 27$, $f''(2.5) > 30$ és $f(2.5)f''(2.5) > 0$, így 2.5 közelében az első feltételek teljesülnek. Próbálkozzunk tehát az $x_0 = 2.5$ választással.

k	x	$f(x)$
0	2.5	4.0010343
1	2.3569372	0.4770204
2	2.3333563	0.0213643
3	2.3321950	0.0000551
4	2.3321920	0.0000002

Így egy másik gyökét kaptuk az egyenletnek.

d) Az intervallumfelezési eljárással már az első lépésnél, 1.25-nél, –egyébként teljesen véletlenül,– egészen kicsi helyettesítési értéket kaptunk. Mivel $f'(1.25) > 14$ és $f''(1.25) > 1.9$, joggal feltételezhetjük, hogy a függvénygörbe 1.25 közelében "nem fordul vissza", azaz egy zérushely közelében vagyunk. Mivel $f(1.25)f''(1.25) > 0$, próbálkozzunk a Newton módszerrel.

k	x	$f(x)$
1	1.25	0.0379624
2	1.2474248	-0.0000059
3	1.2474252	0.00000002

Az a) és c) részfeladatokban különböző gyököket kaptunk, és f' értéke mindkét helyen pozitív, tehát a kettő között is kell legalább még egy gyöknek lennie.
Határozzuk meg az egyenletnek az (1.24743;2.33219) intervallum belsejébe eső gyökét.
Egyszerű behelyettesítéssel $f(1.3) > 0$ és $f(2.3) < 0$, így akár az intervallumfelezés, akár a húrmódszer működik. Mivel a derivált az [1.3;2.3] intervallumon a nulla értéket is felveszi, a feltételekhez kötött módszerekkel csak kísérletezhetünk, és csak akkor lesznek konvergensek, ha sikerül a gyökhöz elég közel indulni. Pl. a Newton-módszerhez az $x_0 = 2$ választás elég jó, $f(1.893757) = 0.0000025$ adódik.

2. Ez $\cos x = g(x)$ választással $g(x) = x$ alakú, és $|g'(x)| = |-\sin x| \le q < 1$, ha x nincs nagyon közel $\frac{\pi}{2}$-höz. Viszont a gyök biztosan a [0;1] intervallumba esik, és itt $0 \le \sin x \le 0.8415$.

$x_0 = 0.0$	$x_8 = 0.7221$	$x_{16} = 0.7383$
$x_1 = 1.0$	$x_9 = 0.7504$	$x_{17} = 0.7396$
$x_2 = 0.5403$	$x_{10} = 0.7314$	$x_{18} = 0.7387$
$x_3 = 0.8575$	$x_{11} = 0.7442$	$x_{19} = 0.7393$
$x_4 = 0.6543$	$x_{12} = 0.7356$	$x_{20} = 0.7389$
$x_5 = 0.7935$	$x_{13} = 0.7414$	$x_{21} = 0.7392$
$x_6 = 0.7014$	$x_{14} = 0.7375$	$x_{22} = 0.7390$
$x_7 = 0.7639$	$x_{15} = 0.7402$	$x_{23} = 0.7391$

26.2

3. Az $f(x) = e^x + 2x^3$ függvénynek csak negatív x esetén lehet zérushelye, és $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$. Írjuk át az egyenletet $x = g(x) = \lambda f(x) + x$ alakba. Mivel $|g'(x)| = |\lambda f'(x) + 1| \le q$, feltételként a $-1 - q \le \lambda f' \le q - 1$ egyenlőtlenséget kapjuk. Itt λ-t és q-t is meg kell határoznunk. Mivel teljesülnie kell a $q - 1 < 0$ egyenlőtlenségnek és $f'(x) = e^x + 6x^2 > 0$, λ negatív, és a triviálisan adódó $\frac{1}{e} < |e^x| \le e^x + 6x^2 = |f'(x)| \le 1 + 6 = 7$ egyenlőtlenségekből $-\frac{1+q}{7} \le \lambda \le \frac{q-1}{\frac{1}{e}}$. Bármilyen q és λ jó, ami kielégíti a fenti feltételeket. A konvergencia gyorsasága persze függ ezek választásától. Legegyszerűbb, ha mindenhol egyenlőség teljesül. Ebből $q = \frac{7-\frac{1}{e}}{7+\frac{1}{e}}$ és $\lambda = -\frac{2}{7+\frac{1}{e}} \approx -0.2058$ adódik. Azaz az iterációs sorozat: $x_{k+1} = -0.2058(e^{x_k} + 2x_k^3) + x_k$.

	x	$f(x)$
0	$-1.$	
1	-0.6641	-0.0710
2	-0.6495	-0.0256
3	-0.6442	-0.0096
4	-0.6422	-0.0036
5	-0.6415	-0.0015
6	-0.6412	-0.00058
7	-0.64108	-0.00022
8	-0.64103	-0.00007
9	-0.64101	-0.000013

4. Akár 0-ból, akár (-1)-ből, akár az intervallum más pontjából indulva 5-6 lépés után $x^* = -0.64101$ adódik.

5. $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$, ennek két zérushelye -0.1547 és 2.1547. Mivel f mindkét helyen pozitív, azaz f lokális maximuma és minimuma azonos előjelű, a harmadfokú polinomnak csak egy zérushelye van, és az -0.1547-nél kisebb. Rövid próbálkozás után látjuk, hogy f a $[-2; -1]$ intervallumon előjelet vált. Ezen az intervallumon mindegyik módszer konvergens. Ha a fokozatos közelítést választjuk, $8 \le |f'(x)| \le 23$ miatt az **26.3** feladatban közölt módon számolva $\lambda = -\frac{2}{31}$. Az intervallum bármely pontjából indulhatunk. $f(-1.5251) = 0.000034$

6. Mivel $f'(x) = 5x^4 - 1$, ennek két zérushelyei ± 0.6687.
$f(-0.6687) = 0.9950$, $f(0.6687) = -0.0745$. Ennek az ötödfokú polinomnak tehát két szélsőértéke van, és ezek különböző előjelűek; így pontosan három zérushelye van, az egyik a $(-0.6687; 0.6687)$ intervallumban. Egy-két egész értéket behelyettesítve kapjuk, hogy $f(-2) < 0$ és $f(1) > 0$, így a további zérushelyek a $(-2; -0.6687)$ és $(0.6687; 1)$ intervallumokban vannak. A derivált a ± 0.6687 helyeken nulla. Ezért, ha a Newton módszert alkalmazzuk, célszerű a -2 ill. 1 pontból kiindulni, vagy a $(-0.6687; 0.6687)$ intervallum egy belső pontjából.
Ha viszont a $g(x) = x^5 + 0.46 = x$ alakot tekintjük, a (-0.6687;0.6687) intervallumon $|g'(x)| < 1$, így ezen az intervallumon közvetlenül alkalmazhatjuk a

fokozatos közelítés módszerét, az intervallum bármely pontjából indulva.
$f(-1.09187) = 0.0000023$, $f(0.4875) = 0.000034$, $f(0.8111) = 0.000047$.

7. $f'(x) = e^x + 3x^2 + 4x + 1$, és $3x^2 + 4x + 1$ csak a $(-1; -\frac{1}{3})$ intervallumon vesz fel negatív értéket, mégpedig legkisebb értéke $-\frac{1}{3}$, az e^x viszont ezen az intervallumon legalább 0.3678. Így $f'(x) > 0.03 \neq 0$, tehát f szigorúan monoton növekvő, amiből következik, hogy az egyenletnek egyetlen gyöke lehet.
$f(x) > 0$, ha $x > 0$, így ez a gyök csak negatív lehet. Rövid próbálkozással azt kapjuk, hogy $f(-1) > 0$ és $f(-2) < 0$, tehát a gyököt a $[-2; -1]$ intervallumban keressük. Minden módszer konvergens. $f(-1.4145) = 0.00002$.

27. Differenciálegyenletek (megoldások)

1. Explicit, elsőrendű, inhomogén, lineáris.
2. Implicit, harmadrendű, inhomogén, lineáris.
3. Implicit, harmadrendű, inhomogén, lineáris.
4. Explicit, másodrendű, inhomogén, másodfokú.
5. Implicit, másodrendű, inhomogén, lineáris.
6. Explicit, ötödrendű, homogén, lineáris.
7. Explicit, másodrendű; fokszáma nincs.
8. Implicit, harmadrendű; fokszáma nincs.
9. Implicit, másodrendű, homogén, lineáris.
10. Implicit, másodrendű; fokszáma nincs.
11. Explicit, ötödrendű, homogén, lineáris.
12. Implicit, negyedrendű, homogén, lineáris.
13. Implicit, elsőrendű, inhomogén, másodfokú.
14. Implicit, másodrendű, homogén, lineáris.
15. Implicit, másodrendű, homogén, másodfokú.
16. Implicit, elsőrendű, inhomogén, másodfokú.
17. Az $f(x,y,y') = 2x + 4y - 3y'$ függvény az egész $\mathbf{R}^3$ téren folytonos, ezért a Cauchy-Peano-féle egzisztenciatétel miatt a differenciálegyenlethez és az $\mathbf{R}^3$ tér bármely (ξ, η_0, η_1) pontjához tartozó kezdetiérték-probléma megoldható. Mivel $f'_x(x,y,y') = 2$, $f'_y(x,y,y') = 4$, $f'_{y'}(x,y,y') = -3$, és e parciális deriváltak az $\mathbf{R}^3$ téren korlátosak, ezért az f függvény mindhárom változójában eleget tesz a Lipschitz-feltételnek (l. T 27.11). Tehát a Picard-Lindelöf-tétel szerint a differenciálegyenlethez és az $\mathbf{R}^3$ tér bármely (ξ, η_0, η_1) pontjához tartozó kezdetiérték-robléma egyértelműen oldható meg.
18. Az $f(x,y) = \frac{x-1}{y}$ függvény a $\mathbf{R}^2$ tér $P(x,0)$ pontjaiban nincs értelmezve. Minden más pontban viszont folytonos. Ha valamely y függvény megoldása lenne a differenciálegyenlethez és egy $(\xi, 0)$ ponthoz tartozó kezdetiérték-problémának, akkor teljesülni kellene az $y(\xi) = 0$ feltételnek, valamint annak, hogy y megoldása a differenciálegyenletnek a ξ valamely teljes környezetében. Ezen utóbbi feltételhez viszont szükséges, hogy $y(\xi) \neq 0$ teljesüljön. Ez ellentmondás, tehát a differenciálegyenlethez és a (ξ, η_0) pontokhoz tartozó kezdetiérték-probléma akkor és csak akkor oldható meg, ha $\eta_0 \neq 0$.
    Az f függvény parciális deriváltjai $f'_x = \frac{1}{y}$, illetve $f'_y = \frac{1-x}{y^2}$. Ezek az $\mathbf{R}^2$ tér bármely olyan korlátos résztartományán korlátosak, amelyek nem tartalmazzák a $P(x,0)$ pontokat. Igy a differenciálegyenlethez és a (ξ, η_0) $(\eta_0 \neq 0)$ pontokhoz tartozó kezdetiérték-probléma egyértelműen oldható meg.

19. Mivel az $f(x, y, y') = x - \sin y + \cos y'$ függvény az egész $\mathbf{R}^3$ téren folytonos, és ott korlátos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkezik, ezért a differenciálegyenlet teljesíti mindkét tétel feltételeit. Így a differenciálegyenlethez és az $\mathbf{R}^3$ tér bármely pontjához tartozó kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

20. Mivel az $f(x, y) = x^2 + y^2$ függvény az $\mathbf{R}^2$ téren folytonos, és annak bármely résztartományán eleget tesz a Lipschitz-feltételnek (parciális deriváltjai az $\mathbf{R}^2$ bármely résztartományán korlátosak), ezért a differenciálegyenlethez és az $\mathbf{R}^2$ tér bármely pontjához tartozó kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

21. Az $f(x, y) = y \operatorname{tg} x$ függvény azokban a $P(x, y)$ pontokban nincs értelmezve, amelyek esetén $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$. A $P_0(0,0)$ pontnak viszont megadható olyan teljes környezete, ahol f folytonos. Tehát a differenciálegyenlethez és a P_0 ponthoz tartozó kezdetiérték-probléma megoldható.
$f'_x = \frac{y}{\cos^2 x}$, $f'_y = \operatorname{tg} x$; ezek a P_0 alkalmasan választott teljes környezetében korlátosak, így ott teljesítik a Lipschitz-feltételt. A differenciálegyenlethez és a P_0 ponthoz tartozó kezdetiérték-probléma tehát egyértelműen oldható meg.

22. Az $f(x, y) = x \ln y$ függvény a $P_0(0,0)$ pontban nincs értelmezve, így a differenciálegyenletnek nincs az adott kezdeti feltételt is teljesítő megoldása.

23. Mivel az $f(x, y) = \ln x + \cos y$ függvény a $P_0(1,0)$ pont valamely teljes környezetében folytonos, és eleget tesz a Lipschitz-feltételnek (mert parciális deriváltjai korlátosak), ezért a feladatbeli kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható.

24. Az $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ függvény az $\mathbf{R}^2$ tér $P_0(1,0)$ pontjának bármely teljes környezetében folytonos, ezért a feladatbeli kezdetiérték-probléma megoldható. Az f függvény parciális deriváltjai: $f'_x \equiv 0$, $f'_y = \frac{\operatorname{sgn} y}{\sqrt{|y|}}$. Mivel f'_y nincs értelmezve a P_0 pontban, ezért a **T 27.11** tétel alapján nem tudjuk eldönteni, hogy az f függvény teljesíti-e a Lipschitz-feltételt a P_0 pont valamely teljes környezetében. Mivel minden N pozitív egész számhoz és P_0 bármely teljes környezetéhez megadhatók olyan $y^* > y^{**}$ pozitív számok, amelyekre $\sqrt{y^*} + \sqrt{y^{**}} < \frac{1}{N}$, azaz $\frac{1}{\sqrt{y^*}+\sqrt{y^{**}}} > N$, és így a $\sqrt{y^*} - \sqrt{y^{**}}$ különbséggel való szorzás után $\sqrt{y^*} - \sqrt{y^{**}} > N(y^* - y^{**})$ teljesül, ezért az f függvény (az y változóban) nem tesz eleget a Lipschitz-feltételnek a P_0 pont egyetlen teljes környezetében sem. Így az említett teljes környezetek egyikében sem teljesíti az f függvény a Picard-Lindelöf-tétel feltételeit.

25. Az adott $y = cx^2$ egyenletet differenciálva: $y' = 2cx$. Ebből (az $x \neq 0$ esetben) a c paramétert kifejezve azt kapjuk, hogy $c = \frac{y'}{2x}$. Ezt az adott egyenletbe behelyettesítve, majd rendezve a görbesereg differenciálegyenlete adódik:

$$xy' - 2y = 0.$$

Az $x = 0$ esetben az eredeti egyenlet szerint $y = 0$; a kapott differenciálegyenlet tehát akkor is érvényes. Megjegyezzük, hogy az x-re vonatkozó esetmegkülönböztetést elkerülhetjük úgy, hogy az $y' = 2cx$ egyenletből nem a c-t, hanem a cx-et fejezzük ki ($cx = \frac{y'}{2}$), és ezt helyettesítjük a görbesereg paraméteres egyenletébe.

26. Az adott egyenletet differenciálva: $2x+2yy' = c$. Ezt a c-t az adott egyenletbe beírva az összevonások és rendezés után a görbesereg differenciálegyenlete a következő:

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

27. $yy' + x = 0.$

28. Az egyenletet differenciálva: $y' = e^{\frac{x}{a}}$, azaz $\ln y' = \frac{x}{a}$ (tehát $\ln y' = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = 0$). Az $x \neq 0$ esetben az $a = \frac{x}{\ln y'}$ kifejezést a görbesereg paraméteres egyenletébe behelyettesítve

$$xy' - y \ln y' = 0$$

adódik. Ez az egyenlet az $x = \ln y' = 0$ esetben is teljesül.

29. Az egyenletet differenciálva $2(x - a) + 2yy' = 0$ adódik, amelyből $yy' = -(x - a)$. Ezt behelyettesítve a görbesereg egyenletébe az $(yy')^2 + y^2 = 1$ differenciál-
egyenlet adódik. Figyelembe véve, hogy $yy' = -(x - a)$, az előbbi egyenlet átalakítható így:

$$yy' - \sqrt{1 - y^2} = 0, \text{ ha } a - 1 \leq x \leq a,$$

$$yy' + \sqrt{1 - y^2} = 0, \text{ ha } a \leq x \leq a + 1.$$

(A görbesereg egyenletéből adódik, hogy $|x - a| \leq 1$, tehát bármely a esetén $a - 1 \leq x \leq a + 1$.)

30. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$

31. Az $x - u + (y - v)y' = 0$ és $1 + y'^2 + (y - v)y'' = 0$ egyenletekből az $y'' \neq 0$ esetben $y - v$, majd $x - u$ kifejezésével a görbesereg differenciálegyenlete:

$$2y''^2 = (1 + y'^2)^3.$$

32. Az $y' = 2c_1x + 2c_2e^{2x}$ és $y'' = 2c_1 + 4c_2e^{2x}$ egyenletekből az $x \neq \frac{1}{2}$ esetben (pl. Cramer-szabállyal)

$$c_1 = \frac{2y' - y''}{4x - 2}, \quad c_2 = \frac{xy'' - y'}{e^{2x}(4x - 2)};$$

ezeket az eredeti egyenletbe behelyettesítve átrendezés után

$$(x^2 - x)y'' - (2x^2 - 1)y' + (4x - 2)y = 0.$$

Közvetlen számolással ellenőrizhető, hogy ez a differenciálegyenlet az $x = \frac{1}{2}$ esetben is érvényes.

33. Használjuk a $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ képletet. Az egyenletet kétszer differenciálva:

$$y' = a(1 + \operatorname{tg}^2(ax + b)); \; y'' = a^2 2\operatorname{tg}(ax + b)(1 + \operatorname{tg}^2(ax + b)),$$

azaz

$$y' = a(1 + y^2); \quad y'' = 2a^2 y(1 + y^2)$$

adódik. Az a paramétert kiküszöbölése és rendezés után a görbesereg differenciálegyenlete:

$$y''(1 + y^2) - 2y'^2 y = 0.$$

34. $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0.$ **35.** $y'' + y = 0.$

36. $y'' - y = 0.$ **37.** $y'' + y = 0.$

38. $y'' - 2y' + y = 0.$ **39.** $y''' = 0.$

40. $y'' = 0.$

41. $y''y + y'^2 = 0.$ **42.** $y' - y^2 - 1 = 0.$

43. $y''(y^2 - 1) - y'^2 y = 0.$ **44.** $y''y - y'^2 = 0.$

45. A feladatbeli körsereg egyenlete: $x^2 + (y - c)^2 = c^2$ (c paraméter), differenciálegyenlete pedig:

$$y'(x^2 - y^2) - 2xy = 0.$$

46. A körsereg egyenlete: $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ (c: paraméter), differenciálegyenlete pedig:

$$2xyy' + x^2 - y^2 = 0.$$

47. A körsereg egyenlete : $(x - c)^2 + y^2 = \frac{1}{2}c^2$ (c: paraméter), differenciálegyenlete pedig:

$$y'^2 y^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

48. A körsereg egyenlete: $(x - c)^2 + (y - r)^2 = r^2$ (c paraméter, r adott pozitív szám), differenciálegyenlete pedig:

$$(y'^2 + 1)(y - r)^2 = r^2.$$

49. A körsereg egyenlete: $(x - r)^2 + (y - c)^2 = r^2$ (c paraméter, r adott pozitív szám), differenciálegyenlete pedig :

$$y'^2(x^2 - 2rx) + (x - r)^2 = 0.$$

50. A parabolasereg egyenlete: $y = cx(x - a)$ (c paraméter, a adott valós szám), differenciálegyenlete pedig:

$$y'x(x - a) - y(2x - a) = 0.$$

51. A parabolasereg egyenlete: $x = cy(y - a)$ (c paraméter, a adott valós szám), differenciálegyenlete pedig:

$$y'x(2y - a) - y(y - a) = 0.$$

52. A csúcspont két koordinátája egyenlő; ezt c_1-gyel jelölve a parabolasereg egyenlete: $y-c_1 = c_2(x-c_1)^2$ (c_1, c_2 paraméterek), differenciálegyenlete pedig:

$$2y''(y-x) - y'^2 + 2y' = 0.$$

53. A parabolasereg egyenlete: $x - c_1 = c_2(y-c_1)^2$ (c_1, c_2 paraméterek), differenciálegyenlete pedig:

$$2y''(x-y) - 2y'^2 + y' = 0.$$

54. Az ellipszissereg egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (a, b paraméterek), differenciálegyenlete pedig:

$$y''xy + y'^2x - y'y = 0.$$

28. Elsőrendű közönséges differenciálegyenletek (megoldások)

1. A változók szétválasztása után az

$$\int \frac{dy}{y} = 3 \int \frac{dx}{2x+1}$$

egyenlethez jutunk. Integrálás után

$$\ln|y| = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \ln c; \quad x \neq -\frac{1}{2},\ y \neq 0,\ c > 0.$$

Az általános megoldás tehát:

$$y^2 = c_1(2x+1)^3, \quad c_1 : \text{tetszőleges valós szám.}$$

Ez a megoldás az $x = -\frac{1}{2}$ helyen is érvényes; az $y = 0$ megoldás $c_1 = 0$ választással benne van az általános megoldásban.

2. Szétválasztva:

$$\int \frac{y}{y^2-1}dy = \int \frac{dx}{x+2}; \quad x \neq -2,\ y \neq \pm 1.$$

Ebből az általános megoldás:

$$y^2 - c(x+2)^2 = 1; \quad c : \text{tetszőleges valós szám.}$$

Megjegyzés. Az integrálgörbék:
$c = 0$ esetén az $y = \pm 1$ egyenletű párhuzamos egyenespár,
$c < 0$ esetén ellipszisek,
$c > 0$ esetén y valós tengelyű hiperbolák.

3. Az általános megoldás:

$$y = c(x^2 - 2x) - 1,$$

és ez érvényes az (átmenetileg kizárandó) $x = 0, x = 2$ helyeken is; az (átmenetileg szintén kizárandó) $y = -1$ megoldás is benne van az általános megoldásban.

4. $(x^2+6)(y^2-1) = c$.

5. $y = ce^{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Az általános megoldás:

$$y = \sin(\operatorname{arsh} x + c).$$

Szinguláris megoldások: $y = 1$, $y = -1$.

7. Az általános megoldás:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = c,$$

vagy mindkét oldal tangensét véve, és $\operatorname{tg} c = c_1$ jelöléssel:

$$x + y = c_1(1 - xy).$$

8. $x(2y+3) = cy$. 9. $y^3 + 3y = 9\ln x + c$.

10. $y = \begin{cases} \sin(\operatorname{arth} x + c), & \text{ha } |x| < 1, \\ \sin(\operatorname{arcth} x + c), & \text{ha } |x| > 1, \\ \pm 1, & \text{ha } |x| = 1. \end{cases}$

Szinguláris megoldásként az $y = \pm 1$ párhuzamos egyenespár adódik.

11. $y = \operatorname{tg}(\ln \frac{c}{\sqrt{1+x^2}})$.

12. $y^2 = 1 - \frac{c}{x^2}$ vagy $y = \pm\sqrt{1 - \frac{c}{x^2}}$.

13. Általános megoldás:

$$x \sin y = c, \quad x \neq 0.$$

Szinguláris megoldások az $y = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ konstans függvények.

14. Az általános megoldás:

$$\cos x \cos y = c, \quad \text{ha} \quad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; \ k \in \mathbf{Z}.$$

Szinguláris megoldások (a $\cos y = 0$ egyenletből):

$$y = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

15. $\ln x = t$ helyettesítéssel $\int(\sin \ln x + \cos \ln x + a)dx = x \sin \ln x + ax$, így az általános megoldás:

$$y = ce^{x(\sin \ln x + a)}.$$

16. A differenciálegyenletet explicit alakra hozzuk:

$$y' = \frac{x+y}{x-y}$$

$(x - y \neq 0$, mert $y = x$ esetén az eredeti differenciálegyenletből $y = -x$ adódna, ami bármely $x \neq 0$ helyen ellentmondást jelent.) Mivel minden nem negatív valós k-ra

$$\frac{kx+ky}{kx-ky} = \frac{x+y}{x-y},$$

új változót vezetünk be az $y = ux$ helyettesítéssel, amikor is $y' = u'x + u$. A differenciálegyenlet tehát $u'x + u = \frac{1+u}{1-u}$, vagyis $u'x = \frac{1+u^2}{1-u}$ alakú lesz, s ez már szétválasztható. Általános megoldása:

$$\operatorname{arctg} u = \ln \frac{x\sqrt{1+u^2}}{c}.$$

Az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel és átrendezéssel adódik az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\sqrt{x^2+y^2} = ce^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}; \quad x \neq 0.$$

Megjegyzés: Az explicit alakra való áttérés csak azt a célt szolgálta, hogy a 28-2 oldali (5) feltétel teljesülését belássuk. Ha ennek teljesülése átalakítás nélkül is belátható, akkor az eredeti egyenletben is elvégezhetjük az $y = ux$ helyettesítést.

17. Az $\operatorname{arsh} u = \ln(u + \sqrt{u^2+1})$ azonosság alkalmazásával $y + \sqrt{x^2+y^2} = cx^2$.

18. $y = \begin{cases} x\sqrt[3]{\ln cx^3}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

19. $y^2 = x^2 \ln |\frac{c}{x}|$.

20. $x^2 - y^2 = cx$.

21. $xe^{\sin \frac{y}{x}} = c$.

22. $y \cos \frac{y}{x} - x \sin \frac{y}{x} = c$.

23. $x^2 + 2xy = c$.

24. Általános megoldás:

$$\operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \left| \frac{c}{x} \right|.$$

Szinguláris megoldások (a $\cos u = 0$ egyenletből):

$$y = (2k+1)\frac{\pi}{2}x; \quad k \in \mathbf{Z}.$$

25. Általános megoldás:

$$x^2 + xy^2(c^2x - 2c) = 0.$$

Szinguláris megoldások: (az $u = 0$ egyenletből) $y = 0$, (az $u^2 - 1 = 0$ egyenletből): $y = x$.

26. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|cx| = 0$.

27. Az $\frac{y}{x} = u$, $y' = u'x + u$ helyettesítés és rendezés után

$$u'x = \frac{2 + 2u^2e^u}{1 - 2ue^u}$$

adódik. A változók szétválasztásával az

$$\int \frac{1 - 2ue^u}{1 + u^2e^u} du = 2 \int \frac{dx}{x}$$

egyenlethez jutunk. A bal oldali integrálást e^{-u}-val való bővítés után végezzük el:

$$\int \frac{e^{-u} - 2u}{e^{-u} + u^2} du = -\int \frac{-e^{-u} + 2u}{e^{-u} + u^2} du = -\ln(e^{-u} + u^2).$$

Az általános megoldás tehát $e^{-u} + u^2 = \frac{c}{x^2}$, vagyis

$$x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 = c.$$

28. Az általános megoldás:

$$x^2 = 2y^2 \ln |cy|.$$

Szinguáris megoldás: $y = 0$.

29. Tekintsük most az x változót az y függvényének: $x = x(y)$. Az $u(y) = \frac{x(y)}{y}$ változó bevezetésével, vagyis az $x = uy$ helyettesítéssel a differenciálegyenlet szeparálhatóvá válik, ugyanis

$$\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}y + u,$$

és így az $u' = \frac{du}{dy}$ jelöléssel

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u'y+u},$$

feltéve, hogy az x az y-nak szakaszonként invertálható függvénye. Feladatunkra rátérve:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + ye^{-\frac{x}{y}}}{(x+2y)e^{-\frac{x}{y}}} = \frac{2\frac{x}{y} + e^{-\frac{x}{y}}}{(\frac{x}{y}+2)e^{-\frac{x}{y}}},$$

$$\frac{1}{u'y+u} = \frac{2u+e^{-u}}{(u+2)e^{-u}},$$

$$u'y + u = \frac{ue^{-u}+2e^{-u}}{2u+e^{-u}},$$

$$u'y = -2\frac{u^2-2e^{-u}}{2u+e^{-u}}.$$

A változók szétválasztása után:

$$\int \frac{2u+e^{-u}}{u^2-e^{-u}}du = -2\int \frac{dy}{y}.$$

Az általános megoldás tehát: $u^2 - e^{-u} = \frac{c}{y^2}$, $y^2(u^2-e^{-u}) = c$, vagyis

$$x^2 - y^2e^{-\frac{x}{y}} = c.$$

Az $u+2=0$ egyenletből nem adódik szinguláris megoldás.

30. Az előző feladat mintájára:

$$\frac{1+u^2e^u}{u'y+u} = (1+u)e^u,$$

$$u'y = \frac{1-ue^u}{e^u+ue^u}.$$

A változók szétválasztása után:

$$\int \frac{e^u+ue^u}{ue^u-1}du = -\int \frac{dy}{y}.$$

Az általános megoldás: $y(ue^u-1) = c$, vagyis

$$xe^{\frac{x}{y}} - y = c.$$

31. $y \ln \frac{x}{y} + x = c.$ **32.** $x \sin \frac{x}{y} + y = c.$

33. $y \operatorname{ch} \frac{x}{y} + x = c.$ **34.** $x \cos \frac{x}{y} - y = c.$

35. Az $r' = \frac{dr}{d\phi}$ helyettesítés után a változókat szétválasztjuk:

$$\int \frac{dr}{r} = \int \frac{-2\sin\phi}{\cos\phi},$$

az $r = 0$ esetet egyelőre figyelmen kívül hagyva. Az integrálásokat elvégezve, átrendezés után az általános megoldás:

$$r = c\cos^2\phi.$$

Ez a megoldás $r = 0$ esetén is érvényes.

36. $r = \frac{c}{\cos\phi}$, ha $\phi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

37. $r^2 = \frac{1}{\cos\phi} + c$, ha $\phi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

38. A változók szétválasztása után:

$$\int \frac{a}{r\sqrt{r^2-a^2}}dr = \int d\phi = \phi + c, \quad \text{ha} \quad r \neq a.$$

A továbbiakban két esetet különböztetünk meg.

a) Ha $r > a$, akkor a bal oldali integrál:

$$\int \frac{a}{r^2\sqrt{1-(\frac{a}{r})^2}}dr = \arccos\frac{a}{r};$$

ez esetben $\frac{a}{r} = \cos(\phi + c)$ és így

$$r = \frac{a}{\cos(\phi+c)}; \quad 0 < \phi + c < \frac{\pi}{2}.$$

b) Ha $r < -a$, akkor a bal oldali integrál:

$$\int \frac{a}{-r^2\sqrt{1-(\frac{a}{r})^2}}dr = -\arccos\frac{a}{r}.$$

Mivel a koszinusz függvény páros, ezért most is

$$r = \frac{a}{\cos(\phi+c)}, \quad \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} < \phi + c < \pi.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$r = \frac{a}{\cos(\phi+c)}, \quad 0 < \phi + c < \pi.$$

39. Az egyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{1}{1-cx}.$$

Ha az $x = 2$ és az $y = -3$ értéket behelyettesítjük, akkor

$$c = \frac{2}{3}$$

adódik. Az $y(2) = -3$ kezdeti feltételnek eleget tevő partikuláris megoldás tehát:

$$y = \frac{3}{3-2x}.$$

40. Az általános megoldás: $x^2 + y^2 = c$, a partikuláris megoldásban $c = 20$.

41. $y = \begin{cases} \frac{c}{x} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0; \end{cases} \quad c = 12.$

42. $y = \ln(1 + ce^{-x})$, amiből az $1 + ce^{-x} = \frac{e^x+c}{e^x}$ átalakítással $y = \ln(e^x + c) - x$; $c = 1$.

43. Az általános megoldás: $2(y^3 - x^3) + 3(y^2 - x^2) = c$, a partikuláris megoldás pedig $2(y^3 - x^3) + 3(y^2 - x^2) = 0$, vagyis $(y - x)(2y^2 + 2xy + 2x^2 + 3y + 3x) = 0$, ami pedig az $(1, 1)$ pontban csak úgy teljesülhet, ha $y = x$.

44. $x \sin y = c$; $c = 1$.

45. $\ln(e^y + 1) = e^x(x - 1) + c$; $c = \ln 2$.

46. $y = e^{cx}$; $c = 1$.

47. $y = e^{c|\operatorname{tg}\frac{x}{2}|}$; $c = 1$.

48. $x^2 + y^2 = cx$; $c = 2$.

49. $y^2\sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$; $c = 6$.

50. $x + y = cx(x - y)$; $c = -3$.

51. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln|x| = c$; $c = 1$.

52. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = c$; $c = 1$.
Megjegyzés: Szinguláris megoldások: $y = 1$ és $y = -1$; az előbbi eleget tesz az előírt kezdeti feltételnek is.

53. Szétválasztás, integrálás és rendezés után az általános megoldásra azt kapjuk, hogy

$$y^2 = 2\ln(e^x + 1) + 2\ln c.$$

A kezdeti feltétel alapján c-re teljesül az alábbi egyenlőség:

$$2\ln c = 1 - 2\ln(e + 1).$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y^2 = 2\ln\frac{e^x + 1}{e + 1} + 1.$$

54. $y^2 + xy = cx^3$; $c = 2$.

55. A **29**. feladathoz hasonlóan legyen az x változó az y változó függvénye: $x = x(y)$; az $u(y) = \frac{x(y)}{y}$ változó bevezetésével oldjuk meg a feladatot. Az általános megoldás: $y \sin\frac{x}{y} = c$. A partikuláris megoldásban $c = 2$.

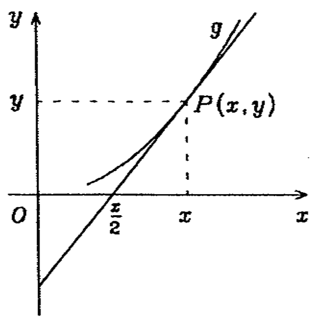
56. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = c$; $c = e$.

57. $y \operatorname{ch}\frac{x}{y} - x \operatorname{sh}\frac{x}{y} = c$, $c = 1$.

58. Tudjuk, hogy a g görbe (x, y)-pontbeli érintőjének iránytangense az y és $\frac{x}{2}$ hányadosa (l. az ábrát). Tehát a G görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Ennek megoldása, $y = cx^2$ adja a görbesereg egyenletét.



28.6

59. A G görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = ax,$$

ahol a az arányossági tényező. A megoldás:

$$y = c_1x^2 + c_2.$$

60. Az ábra szerinti jelölésekkel $PX = PY$. Ezért

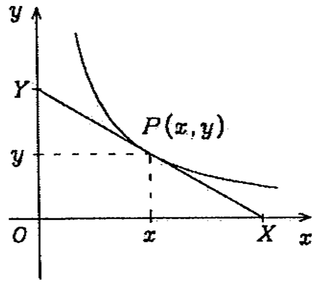
$$OX = 2x, \quad OY = 2y$$

és így

$$y' = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Ebből:

$$y = \frac{c}{x}.$$



61. A főnormális merőleges az érintőre, iránytangense tehát

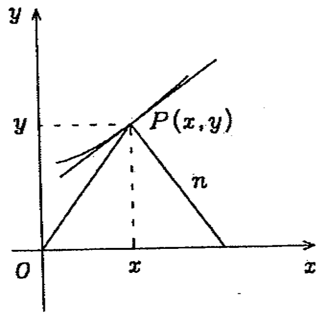
$$-\frac{1}{y'}.$$

Ezért a görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{x}{y}$$

(l. az ábrát, amelyen n jelöli a főnormális egyenest). Ennek megoldása:

$$x^2 - y^2 = c.$$



62. Használjuk az ábra jelöléseit. A feladat szerint

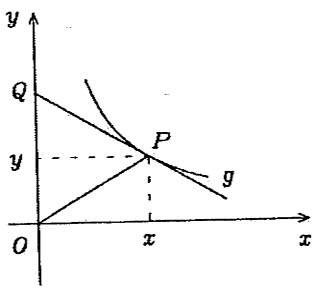
$$PO = PQ.$$

A görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = -\frac{y}{x},$$

melynek megoldása:

$$y = \frac{c}{x}.$$

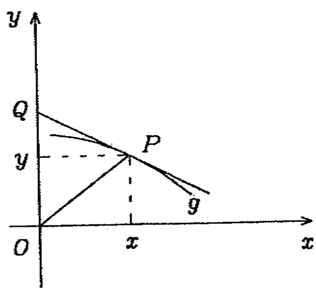


63. Használjuk az ábra jelöléseit. A P ponton átmenő érintőegyenes egyenlete:

$$Y - y = y'(X - x),$$

ahol X, Y az egyenes tetszőleges pontjának koordinátái. Ez az egyenes az y-tengelyt az $X = 0$, $Y = y - xy'$ koordinátájú Q pontban metszi. Tehát

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad OQ = y - xy'.$$



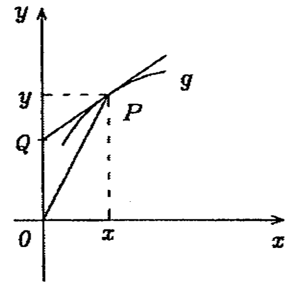
Igy a görbesereg differenciálegyenlete:

$$\sqrt{x^2+y^2} = y - xy'.$$

Ennek megoldása ($y = ux$ helyettesítéssel):

$$x^2 = c^2 - 2cy.$$

64. Használjuk az ábra jelöléseit. A Q pont koordinátáit az előző feladatban felírtuk, ennek felhasználásával $QO = y - xy'$ és $QP = \sqrt{x^2 + x^2y'^2}$. A görbesereg differenciálegyenlete tehát:



$$y - xy' = \sqrt{x^2 + x^2y'^2},$$

vagy átalakítás után:

$$2xyy' = y^2 - x^2.$$

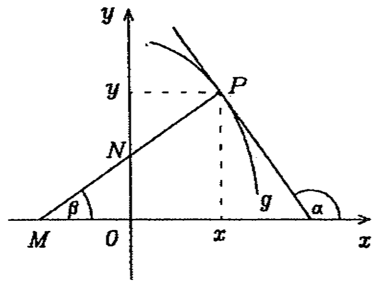
Ennek megoldása:

$$x^2 + y^2 = cx$$

(lásd a 28.48. feladatot).

65. Használjuk az ábra jelöléseit. A

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{2x} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{y'}$$



összefüggés miatt a görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = -\frac{2x}{y},$$

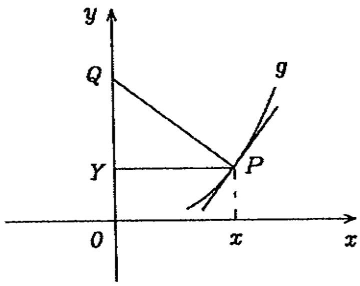
ennek megoldása:

$$2x^2 + y^2 = c.$$

66. Az ábra jelöléseit használva:

$$Q(0, y + \frac{x}{y'}),\ YQ = \frac{x}{y'}.$$

Mivel a PQY háromszög területe állandó (jelöljük ezt k-val), ezért $x\frac{x}{y'}\frac{1}{2} = k$, és ebből a görbesereg differenciálegyenlete:



$$y' = \frac{x^2}{2k}.$$

Ennek általános megoldása:

$$y = \frac{x^3}{6k} + c.$$

A kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$y = x^3.$$

67. Legyen a g görbe $y = y(x)$ egyenlettel megadva. Az ábra jelöléseit használva:

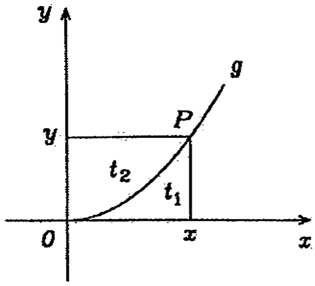
$$t_1 = \int_0^x y(t)dt, \ t_2 = xy - \int_0^x y(t)dt.$$

a) eset: $t_2 = 2t_1$:

$$xy - \int_0^x y(t)dt = 2\int_0^x y(t)dt,$$

azaz

$$xy = 3\int_0^x y(t)dt.$$



Mindkét oldalt x szerint differenciálva: $y + xy' = 3y$, vagyis $xy' = 2y$. Ez a görbesereg differenciálegyenlete, melynek megoldása: $x^2 = c_1 y$.
b) eset: $t_1 = 2t_2$. Ebben az esetben a megoldás: $y^2 = c_2 x$.

68. A $t_2 = 3t_1$ esetben a megoldás: $y^3 = c_1 x$.
A $t_1 = 3t_2$ esetben a megoldás: $x^3 = c_2 y$.

69. Bármely g görbe polárkoordinátás egyenlete $r = r(\phi)$ alakú. Mivel (l. az ábrát)

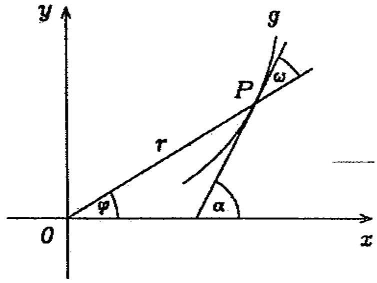
$$x = r(\phi)\cos\phi, \quad y = r(\phi)\sin\phi,$$

ezért az érintő α irányszögére:

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{\frac{dy}{d\phi}}{\frac{dx}{d\phi}} = \frac{r'\operatorname{tg}\phi + r}{r' - r\operatorname{tg}\phi}.$$

Innen

$$r' = r\frac{1 + \operatorname{tg}\phi\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\phi}.$$



E feladatban $\alpha = 2\phi$, tehát a görbesereg differenciálegyenlete: $r' = r\operatorname{ctg}\phi$. Ennek megoldása a görbesereg polárkoordinátás egyenlete:

$$r = c\sin\phi.$$

70. Itt $\alpha = 3\phi$, tehát $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}3\phi$. Felhasználva azt, hogy

$$\operatorname{tg}3\phi = \frac{3\operatorname{tg}\phi - \operatorname{tg}^3\phi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\phi},$$

a görbesereg differenciálegyenleteként

$$r' = r\frac{1 - \operatorname{tg}^2\phi}{2\operatorname{tg}\phi},$$

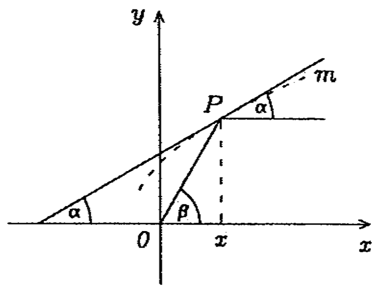
azaz

$$r' = r\operatorname{ctg}2\phi$$

adódik. Ennek megoldása:

$$r^2 = c_2\sin 2\phi.$$

71. A feladatbeli alakzatot helyezzük el a térbeli derékszögű koordináta-rendszerbe úgy, hogy az adott pont az origóba, az adott egyenes pedig az x-tengelyre essék (l. az ábrát). A fényvisszaverődés törvényéből következik, hogy a tükörfelület csak olyan forgásfelület lehet, amelynek tengelye az x-tengely; ennek a forgásfelületnek az xy-síkkal való m metszésgörbéjét (xy-síkbeli meridiángörbéjét) határozzuk meg $y = y(x)$ alakban. Az ábra jelöléseit használva egyrészt $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}$, másrészt $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ és $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Tehát



$$\frac{2y'}{1-y'^2} = \frac{y}{x}.$$

Explicit alakban

$$y' = \frac{-1 \pm \sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}}{\frac{y}{x}}.$$

Ebből $y = ux$ helyettesítéssel

$$u'x = \frac{\pm\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)}{u}$$

adódik. A változók szétválasztásával:

$$\int \frac{u}{\pm\sqrt{1+u^2} - (1+u^2)} du = \int \frac{1}{x} dx.$$

A bal oldali integrálást $u = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel oldjuk meg. Így

$$-\ln(\pm 1 - \operatorname{ch} t) = \ln x - \ln c.$$

Tehát

$$\frac{1}{\pm 1 - \operatorname{ch} t} = \frac{x}{c}.$$

Innen

$$x(\pm 1 - \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}) = c,$$

valamint $\operatorname{sh} t$ helyébe $\frac{y}{x}$-et visszaírva és x-szel beszorozva,

$$\pm x - \sqrt{x^2+y^2} = c$$

adódik. Ebből

$$y^2 = \pm 2c(x \pm \frac{c}{2}).$$

Ez parabola egyenlete, melynek tengelye az x-tengely pozitív, illetve negatív fele, attól függően, hogy $c > 0$, illetve $c < 0$.

72. Az inhomogén differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$Y' - \frac{2}{x}Y = 0.$$

Ez szeparálható, általános megoldása pedig:

$$Y = cx^2.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldását $y = c(x)x^2$ alakban keressük. Ezért

$$y' = c'(x)x^2 + 2c(x)x.$$

Ezeket az eredeti differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$$c'(x)x^2 = x^2 + 1.$$

Innen

$$c'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Integrálás után:

$$c(x) = x - \frac{1}{x} + k.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$y = (x - \frac{1}{x} + k)x^2,$$

vagyis:

$$y = x^3 + kx^2 - x.$$

73. $y = e^{-x^2}(x^2 + c)$.

74. $y = \frac{1}{2}x^3 + cx$.

75. $y = ce^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$.

76. $y = (\cos 2x + c)\operatorname{tg} x$.

77. $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

78. $y = e^{-x}(x + c)$.

79. $y = x^2(1 + ce^{\frac{1}{x}})$.

80. $y = cxe^x + x^2$.

81. $y = \frac{c + \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

82. $y = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{6}x^4$.

83. $y = \frac{c}{x} + e^x(\frac{1}{x} - 1)$.

84. $y = cx + \frac{1}{2}x^3 - 1$; $c = 1$.

85. A differenciálegyenlet általános megoldása a 84. feladat szerint: $y = cx + \frac{1}{2}x^3 - 1$. Ebbe az x helyebe 0-át beírva, függvényértékként -1-et kapunk. Így differenciálegyenletnek nincs olyan partikuláris megoldása, amely eleget tenne az $y(0) = 2$ kezdeti feltételnek.

86. $y = ce^{-\sin x} + \sin x - 1$; $c = 2$.

87. Az általános megoldás: $y = c\cos x + \sin x$. Megjegyezzük, hogy ez a megoldás akkor is jó, ha $\cos x = 0$, mert ebben az esetben $\sin x = \pm 1$ és így $\sin x = \frac{1}{\sin x}$. A differenciálegyenletből adódóan pedig $y = \frac{1}{\sin x}$, s így $y = \sin x$. Ez a megoldás a fenti általános megoldásból a $c = 0$ választással adódik. Mivel $y(\frac{\pi}{2}) = 1$, ezért a kezdetiérték-problémának nincs megoldása.

88. $y = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} + x^2 - 2$; $c = \sqrt{2}$.

89. $y = ce^x - x - 1 + \cos x + \sin x$; $c = 1$.

90. $y = \frac{c}{1+x^2} - \frac{\ln|\cos x|}{1+x^2}$; $c = 2$. 91. $y = c\cos x - 2\cos^2 x$; $c = 3$.

92. Az általános megoldás: $y = c\sin x + e^x \sin x$. A partikuláris megoldásban $c = e^{\frac{\pi}{6}}$.

93. $y = ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$; $c = \frac{1}{2}$. 94. $y = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$; $c = 1$.

95. $y = c\,\mathrm{ch}\,x + 2x\,\mathrm{ch}\,x - 2\,\mathrm{sh}\,x$; $c = 2$. 96. $y = ce^{5x} + x^2e^{5x}$; $c = -1$.

97. Az $y'' = f(x)$ típusú differenciálegyenlet kétszeri integrálással megoldható. Az általános megoldás tehát: $y = x^3 - \sin x + c_1x + c_2$.

98. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c_1x + c_2$, 99. $y = -\frac{2}{1+\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}} + c_1x + c_2$.

100. $y = \frac{1}{2}\ln^2 x + c_1x + c_2$. 101. $y = (x-2)e^x + c_1x + c_2$.

102. Az $y'' = f(y)$ típus esetén az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $2y'$-vel, majd mindkét oldalt integráljuk x szerint. Mivel

$$2y'y'' = \frac{dy'^2}{dx},$$

ezért integrálás után

$$y'^2 = \int f(y)2y'dx = \int 2f(y)dy$$

adódik. Ez pedig szeparálható differenciálegyenlet (y-ra nézve). A jelenlegi feladatban $f(y) = \frac{1}{y^3}$. Igy a fenti képlet alapján y-ra a következő szeparálható differenciálegyenlet adódik:

$$y'^2 = -\frac{1}{y^2} + c_1.$$

Ebből y'-t kifejezve:

$$y' = \frac{\pm\sqrt{c_1y^2 - 1}}{y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\int \frac{y}{\sqrt{c_1y^2-1}}dy = \pm\int dx.$$

Az integrálás elvégzése és átalakítások után kapjuk az eredeti differenciálegyenlet általános megoldását:

$$c_1y^2 = 1 + c_1^2(c_2 \pm x)^2.$$

103. Az $y' = p(y)$ helyettesítés után a feladatbeli differenciálegyenlet $p'p = e^y$ alakú lesz. A változók szétválasztása után

$$\int p\,dp = \int e^y dy$$

adódik. Ennek megoldása: $p = \pm\sqrt{c_1 + 2e^y}$. Ez y-ra az

$$y' = \pm\sqrt{c_1 + 2e^y}$$

differenciálegyenlet teljesülését jelenti. A változók szétválasztásával az

$$\int \frac{1}{\sqrt{c_1 + 2e^y}} dy = \pm \int 1 dx$$

egyenlőséghez jutunk. A bal oldali integrál kiszámításához alkalmazzuk a $c_1 + 2e^y = t^2$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{1}{\sqrt{c_1 + 2e^y}} dy = 2 \int \frac{1}{t^2 - c_1} dt.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $c_1 > 0$. Ekkor

$$2 \int \frac{1}{t^2 - c_1} dt = -\frac{2}{c_1} \int \frac{1}{1 - (\frac{t}{\sqrt{c_1}})^2} dt =$$

$$-\frac{2}{c_1} \sqrt{c_1} \operatorname{arcth} \frac{t}{\sqrt{c_1}} = -\frac{2}{\sqrt{c_1}} \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{c_1 + 2e^y}}{\sqrt{c_1}},$$

felhasználva, hogy $|t| > \sqrt{c_1}$. Így, a jobb oldali integrálást is elvégezve,

$$\operatorname{arcth} \frac{\sqrt{c_1 + 2e^y}}{\sqrt{c_1}} = -\frac{\sqrt{c_1}}{2}(c_2 \pm x)$$

adódik, amiből e^y kifejezhető a következő alakban:

$$e^y = \frac{1}{2} c_1 (\operatorname{cth}^2 \frac{\sqrt{c_1}}{2}(c_2 \pm x) - 1) = \frac{c_1}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\sqrt{c_1}}{2}(c_2 \pm x)}.$$

Tehát

$$y = \ln \frac{c_1}{2} - 2 \ln \operatorname{sh} (\frac{\sqrt{c_1}}{2}(c_2 \pm x))$$

Tegyük most fel, hogy $c_1 < 0$. Akkor $c_1 = -k_1$, ahol $k_1 > 0$. Ebben az esetben

$$\int \frac{1}{\sqrt{2e^y + c_1}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{2e^y - k_1}} dy.$$

Alkalmazzuk a $2e^y - k_1 = t^2$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{1}{\sqrt{2e^y - k_1}} dy = 2 \int \frac{1}{k_1 + t^2} dt = \frac{2}{k_1} \int \frac{1}{1 + (\frac{t}{\sqrt{k_1}})^2} dt =$$

$$\frac{2}{\sqrt{k_1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{k_1}} = \frac{2}{\sqrt{k_1}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2e^y - k_1}}{\sqrt{k_1}}.$$

A differenciálegyenletben a jobb oldali integrálást is elvégezve,

$$\frac{\sqrt{2e^y - k_1}}{\sqrt{k_1}} = \operatorname{tg} (\frac{\sqrt{k_1}}{2}(k_2 \pm x)).$$

Innen

$$e^y = \frac{k_1}{2} (\operatorname{tg}^2 (\frac{\sqrt{k_1}}{2}(k_2 \pm x)) + 1) = \frac{k_1}{2} \frac{1}{\cos^2 (\frac{\sqrt{k_1}}{2}(k_2 \pm x))}.$$

Végül

$$y = \ln \frac{k_1}{2} - 2 \ln \cos\left(\frac{\sqrt{k_1}}{2}(k_2 \pm x)\right).$$

104. Mivel x hiányzik a differenciálegyenletből, az $y' = p(y)$ és az ennek megfelelő $y'' = p'(y)p$ helyettesítést alkalmazva $p'p(1+y^2) = yp^2$.
Ha $p \neq 0$, akkor

$$p'(1+y^2) = yp, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{y}{1+y^2} dy.$$

Ebből

$$p = c_1\sqrt{1+y^2}.$$

Másrészt $p = y'$, tehát $y' = c_1\sqrt{1+y^2}$; $\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = c_1 \int dx$. Integrálás után: $\operatorname{arsh} y = c_1x + c_2$; $y = \operatorname{sh}(c_1x + c_2)$.
Ha $p = 0$, akkor $y' = 0$, $y = k$ ($k \in \mathbf{R}$); ezek a megoldások azonban $c_1 = 0$-val benne vannak az általános megoldásban.

105. $y' = p(y)$ helyettesítéssel $2ypp' = p^2$.
Ha $p \neq 0$, akkor $p' = \frac{p}{2y}$, és ebből $p = c_1\sqrt{y}$. Az általános megoldás ebből adódóan tehát

$$y = \frac{1}{4}(c_1x + c_2)^2.$$

Ha $p = 0$, akkor $y' = 0$, $y = k$ ($k \in R$); ezek a megoldások $c_1 = 0$-val benne vannak az általános megoldásban.

106. Általános megoldás:

$$y = 1 - \frac{1}{c_1x + c_2}.$$

Szinguláris megoldások: $y = k$ ($k \in \mathbf{R}$).

107. $(x + c_2)^2 + y^2 = c_1^2$.

108. Az egyenlet $y'' = f(x, y')$ típusú, tehát y-t nem tartalmaz. Ez esetben $y' = p(x)$ helyettesítéssel redukáljuk az egyenletet elsőrendűre: $p' = \frac{x}{x^2-1}p$. A változók szétválasztása után

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{x}{x^2-1} dx, \quad \text{feltéve, hogy } p \neq 0.$$

Ebből $p = c\sqrt{x^2-1}$, azaz $y' = c\sqrt{x^2-1}$;

$$y = c \int \sqrt{x^2-1}\, dx,$$

tehát az általános megoldás:

$$y = c_1(x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{arch} x) + c_2,$$

ahol $c_1 = \frac{c}{2}$.
A $p = 0$ egyenletből adódó megoldások konstansfüggvények, és így benne vannak az általános megoldásban.

109. $y = (\frac{x^2}{2} + c_1x)\ln x - (\frac{x^2}{4} + c_1x) + c_2$.

110. Ez az egyenlet $y'' = f(y')$ típusú, ezért akár $y' = p(x)$, akár $y' = p(y)$ helyettesítéssel elsőrendűre redukálható.

1. megoldás: Az $y' = p(x)$ helyettesítéssel $p' = \sqrt{p}$; ebből $p = \frac{1}{4}(x + c_1)^2$. Így

$$y = \frac{1}{12}(x + c_1)^3 + c_2.$$

2. megoldás: Az $y' = p(y)$ helyettesítéssel $pp' = \sqrt{p}$; ebből $\frac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} = y + c_1$, azaz $p = [\frac{3}{2}(y + c_1)]^{\frac{2}{3}}$. A változók szétválasztása után

$$\int \frac{dy}{(y + c_1)^{\frac{2}{3}}} = (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}} \int dx.$$

Ennek megoldása $3\sqrt[3]{y + c_1} = (\frac{3}{2})^{\frac{2}{3}}(x + c_2)$, melyből y-t kifejezve:

$$y = \frac{1}{12}(x + c_2)^3 - c_1.$$

111. Az $y' = p(x)$ helyettesítést elvégezve: $2p' = -p^3$; ebből $p = \pm\frac{1}{\sqrt{x+c_1}}$. Integrálva:

$$y = \pm 2\sqrt{x + c_1} + c_2.$$

112. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = 1$.

113. Az $y' = p(x)$ helyettesítéssel p-re a következő differenciálegyenletet kapjuk: $p' = 1 - p^2$. Ebből $|p| < 1$ esetén $p = \operatorname{th}(x + c_1)$, azaz $y = \ln \operatorname{ch}(x + c_1) + c_2$, a $|p| > 1$ esetben pedig $p = \operatorname{cth}(x + k_1)$, azaz $y = \ln \operatorname{sh}(x + k_1) + k_2$ adódik megoldásként. Ha $|p| = 1$, akkor $y = \pm x + b$; ez szinguláris megoldás.

114. Az $y' = p(x)$ helyettesítéssel p-re a következő differenciálegyenletet kapjuk: $p' = -(1-p^2)$. Ebből $|p| < 1$ esetén $p = \operatorname{th}(c_1 - x)$, azaz $y = -\ln \operatorname{ch}(c_1 - x) + c_2$, a $|p| > 1$ esetben pedig $p = \operatorname{cth}(k_1 - x)$, azaz $y = -\ln|\operatorname{sh}(x + k_1)| + k_2$ adódik megoldásként. Ha $|p| = 1$, akkor $y = \pm x + b$; ez szinguláris megoldás.

115. Az általános megoldás: $y = e^x(x^2 - 4x + 6) + c_1x + c_2$.
A kezdeti feltételekből: $c_1 = -2$, $c_2 = -6$.

116. Az általános megoldás: $y = -x\cos x + c_1x + c_2$.
A kezdeti feltételekből: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$.

117. Az általános megoldás: $y = (x^2 + 2)\ln(x^2 + 2) + c_1x + c_2$.
A kezdeti feltételekből: $c_1 = 1$, $c_2 = \ln 2$.

118. $y' = p(y)$ helyettesítést alkalmazunk.
Ha $p = 0$, akkor $y' = 0$, tehát $y = k$ ($k \in \mathbf{R}$). Ez nem elégíti ki a megadott kezdeti feltételeket.
Ha $p \neq 0$, akkor $y' = c_1y(\ln y - 1)^2$ és $\ln y = 1 - \frac{1}{c_1x+c_2}$; $c_1 = 1$, $c_2 = -1$.

119. $y = \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2 - x\sin x - \cos x$; $c_1 = 2$, $c_2 = \frac{\pi}{2}$.

120. Akár $y' = p(x)$, akár $y' = p(y)$ helyettesítés alkalmazható.
Az $y' = p(x)$ helyettesítéssel

$$p' = \sqrt{p^2 - 4}, \quad p = 2\operatorname{ch}(x + c_1),$$

$$y = 2\,\mathrm{sh}(x + c_1) + c_2.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ adódik.
Az $y' = p(y)$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$pp' = \sqrt{p^2 - 4}, \; p = \sqrt{(y + c_1)^2 + 4},$$

$$y = 2\,\mathrm{sh}(x + c_2) - c_1.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ adódik.
A keresett partikuláris megoldás tehát mindkét esetben:

$$y = 2\,\mathrm{sh}\,x + 1.$$

Megjegyezzük, hogy a $p = 2$-ből adódó $y = 2x + 1$ szinguláris megoldás is kielégíti a kezdeti feltételeket.

121. Az általános megoldás: $y = -2\cos(x + c_1) + c_2$ azokon az intervallumokon, ahol $\cos(x + c_1) \geq 0$.
A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y = 1 - 2\cos x; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

122. Az általános megoldás: $y = (x + c_1)^3 + c_2$. A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y = x^3 + 1.$$

123. A differenciálegyenlet explicit alakja: $y'' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ha $y > 0$. Ebből

$$y'^2 = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y} + c_1,$$

$$y' = \pm\sqrt{2\sqrt{y} + c_1}.$$

A kezdeti feltételeket felhasználva (a jobb oldalon a mínusz jel veendő figyelembe), $-2 = -\sqrt{2\sqrt{4} + c_1}$, amiből $c_1 = 0$. Az így adódó $y' = -\sqrt{2}y^{\frac{1}{4}}$ differenciálegyenletet szétválasztva:

$$\int y^{-\frac{1}{4}} dy = -\sqrt{2} \int dx,$$

melynek megoldása: $\frac{4}{3}y^{\frac{3}{4}} = -\sqrt{2}x + c_2$. Ismét figyelembe véve a kezdeti feltételeket, $c_2 = 3\sqrt{2}$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{3\sqrt[3]{3}}{4}(3 - x)^{\frac{4}{3}}.$$

124. $y' = p(y)$ helyettesítéssel $ypp' = 1 + p^2$; szétválasztva

$$\int \frac{p}{1 + p^2} dp = \int \frac{dp}{y}.$$

Ebből

$$1 + p^2 = c_1^2 y^2, \; p = \pm\sqrt{c_1^2 y^2 - 1},$$

vagyis

$$y' = \pm\sqrt{c_1^2 y^2 - 1}.$$

A kezdeti feltételeket figyelembe véve $0 = \pm\sqrt{c_1^2 - 1}$, amiből $c_1^2 = 1$. Az így adódó

$$y' = \pm\sqrt{y^2 - 1}$$

differenciálegyenletet szétválasztva:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm \int dx,$$

amiből $\operatorname{arch} y = c_2 \pm x$, vagyis $y = \operatorname{ch}(c_2 \pm x)$.
A kezdeti feltételeket ismét figyelembe véve, $c_2 = 0$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y = \operatorname{ch} x.$$

125. A kezdeti feltételek miatt y' nem lehet a zérusfüggvény, így az $y' = p(y)$ helyettesítéssel

$$y' = c_1(y-1)^2.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, az így adódó $y' = (y-1)^2$ differenciálegyenletet szétválasztva:

$$\int \frac{dy}{(y-1)^2} = \int dx,$$

amiből $y = 1 - \frac{1}{x+c_2}$ adódik.
A kezdeti feltételeket ismét figyelembe véve $c_2 = 1$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{x}{x+1}.$$

126. Az $y' = p(y)$ helyettesítéssel

$$pp' = 2yp.$$

Mivel $p \neq 0$ (a kezdeti feltételek miatt), így $p' = 2y$, vagyis $y' = y^2 + c_1$.
A kezdeti feltételeket figyelembe véve $c_1 = 1$. Az így adódó differenciálegyenletet szétválasztva

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx,$$

amiből $\operatorname{arctg} y = x + c_2$, vagyis $y = \operatorname{tg}(x + c_2)$.
A kezdeti feltételeket ismét figyelembe véve $c_2 = 0$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y = \operatorname{tg} x.$$

127. A lakosság számának növekedési sebessége a lakosság számának az idő szerinti deriváltja: $\frac{dA}{dt}$; s ez arányos a lakosság számával:

$$\frac{dA}{dt} = kA.$$

E differenciálegyenlet általános megoldása:

$$A(t) = ce^{kt}.$$

A lakosság száma egy év múlva:

$$A = \frac{100+a}{100}A_0$$

lesz. Ha a differenciálegyenletbe az $A = A_0$ és $t = 0$ értékeket behelyettesítjük, a c intregrációs konstansra $c = A_0$ adódik; így a megoldás $A(t) = A_0e^{kt}$ alakú lesz. A t és $A = A_0\frac{100+a}{100}$ helyettesítés után kifejezhetjük e^k-t: $e^k = (\frac{100+a}{100})^t$. Ebből Magyarország lakóinak száma 1996 *I*. 1-én (5 év elteltével):

$$A(5) = 10^7(1,015)^5 \approx 10772840,$$

2001 *I*. 1-én pedig (10 év elteltével):

$$A(10) = 10^7(1,015)^{10} \approx 11605408.$$

128. A bomlási sebesség az egységnyi idő alatt elbomló mennyiséggel mérhető. Egy adott t időpillanatban a tömeg legyen m, az arányossági tényező pedig $-k$. (Az arányossági tényező azért negatív, mert az anyag fogy.) Így

$$\frac{dm}{dt} = -km.$$

Ennek általános megoldása:

$$m = ce^{-kt}.$$

Az $m = m_0$, $t = 0$ kezdeti feltételből $c = m_0$, a keresett partikuláris megoldás tehát:

$$m = m_0e^{-kt}.$$

A k arányossági tényező meghatározható ebből a kifejezésből a felezési idő ismeretében ($t = 1590$ és $m = \frac{1}{2}m_0$ behelyettesítésével): $k = 0,00044$. A keresett függvény:

$$m(t) = m_0e^{-0,00044t}.$$

A 200 év múlva fel nem bomlott rádium mennyisége:

$$m(200) = m_0e^{00,00044\dot{2}00} = m_0e^{-0,088} = m_0 0,915.$$

200 év alatt a rádiumnak csak a 8,5%-a bomlik el.

129. A mozgó csónakra az $F = -kv$ erő hat, ahol k az arányossági tényező. Newton törvénye szerint az erő egyenlő a tömeg és a gyorsulás szorzatával, tehát $F = m\frac{dv}{dt}$, vagyis

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$v(t) = ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

A kezdeti feltételből ($v(0) = 20\ (km/h)$): $c = 20$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$v(t) = 20e^{-\frac{k}{m}t}.$$

A $t = 40s = \frac{1}{90}h$ behelyettesítéssel: $v(\frac{1}{90}) = 8$, amiből $e^{\frac{k}{m}} = (\frac{5}{2})^{90}$. Ha ezt visszaírjuk a mozgást leíró képletbe, akkor

$$v(t) = 20[(\frac{2}{5})^{90}]^t$$

adódik. Ha ide a $t = 2\text{min} = \frac{1}{30}\text{h}$ értéket beírjuk, megkapjuk a feladatbeli kérdésre a választ: $v(\frac{1}{30} = 20((\frac{2}{5})^{90})^{\frac{1}{30}} = 20(\frac{2}{5})^3 = \frac{32}{25} \approx 1,28\ km/h$.

130. Newton második törvénye szerint

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

ahol $\frac{dv}{dt}$ a mozgás gyorsulása, F pedig a testre a mozgás irányában ható erő. Az F erő két összetevője az mg nehézségi erő és a levegő $-kv$ ellenállása. Eszerint

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$v(t) = \frac{m}{k}g - \frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t}.$$

Jelöljük a $-\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}c}$ kifejezést c^*-al. Ekkor

$$v(t) = \frac{m}{k}g + c^*e^{-\frac{k}{m}t}$$

adódik. Legyen a ledobott test kezdeti sebessége v_0, vagyis $v(0) = v_0$. Akkor $c^* = v_0 = \frac{m}{k}g$. A keresett $v(t)$ függvény tehát:

$$v(t) = \frac{m}{k}g + (v_0 - \frac{m}{k}g)e^{-\frac{k}{m}t}.$$

131. A test a nehézségi erő hatására állandó g gyorsulással mozog; a gyorsulás pedig az útnak az idő szerinti második deriváltja. Ezért a differenciálegyenlet:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg, \quad \text{vagy} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = -g.$$

Ennek megoldása kétszeri integrálás után:

$$s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2.$$

A kezdeti feltételek:

$$v(0) = 0, \quad \frac{ds(0)}{dt} = v_0.$$

Ezekből $c_2 = 0$, $c_1 = v_0$. Tehát a test útja és az idő közötti összefüggés:

$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

132. A dinamika második törvényének megfelelően a mozgás differenciálegyenlete:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{x^3}; \quad k \text{ arányossági tényező,}$$

vagy $\frac{k}{m} = a^2$ jelöléssel:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a^2\frac{1}{x^3}.$$

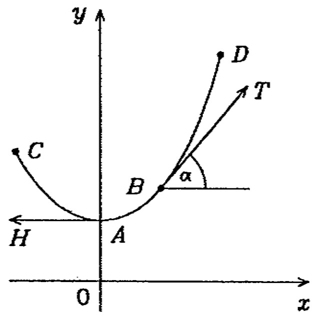
Ez egy hiányos másodrendű differenciálegyenlet. A megoldáshoz szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $2\frac{dx}{dt}$-vel; így a bal oldal $\frac{d[(\frac{dx}{dt})^2]}{dt}$ lesz. Ebből pedig

$$\frac{dx}{dt} = \pm\frac{a}{\sqrt{c_1}}\frac{\sqrt{x^2 - c_1}}{x},$$

a megoldás pedig:

$$x(t) = \frac{a^2}{c_1}(t + c_2)^2 - c_1.$$

133. Vegyük fel a koordináta-rendszert a fonal síkjában úgy, hogy a görbe legalsó A pontja az origó felett legyen (l. az ábrát). A görbe AB darabjára a következő erők hatnak. Az A pontban a vízszintes H húzóerő, a B pontban az érintőirányú T húzóerő és a fonal AB darabjának súlya, amely arányos az AB fonal hosszával. E fonaldarab súlya ps, ahol p az egységnyi hosszú fonal súlya, s pedig az AB ív hossza. A statikai egyensúly feltétele szerint a függőleges, illetve a vízszintes összetevők összegének nullának kell lennie. Ha az összes erőt az x- ;s ax y-tengelyre vetítjük, akkor a következőket kapjuk:



$$H = T\cos\alpha \quad \text{és} \quad ps = T\sin\alpha.$$

Ebből $\operatorname{tg}\alpha = \frac{ps}{H}$, vagyis $y' = \frac{ps}{H}$. Innen

$$y'' = \frac{p}{H}\frac{ds}{dx} = \frac{p}{H}\sqrt{1 + y'^2}.$$

A differenciálegyenlet hiányos másodrendű, amelyet $y' = z$ helyettesítéssel megoldva

$$\ln(2 + \sqrt{1 + z^2}) = \frac{x}{a} + c_1$$

adódik, ahol $a = \frac{p}{H}$. A $z(0) = 0$ feltételből $c_1 = 0$. Igy a megoldás

$$z(x) = \frac{e^{\frac{2x}{a}} - 1}{2e^{\frac{x}{a}}} = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2}.$$

Tehát

$$z(x) = \operatorname{sh} \frac{x}{a},$$

s ebből

$$y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} + c_2.$$

Megjegyezzük, hogy $OA = a$ esetén $c_2 = 0$.

134. Az $y^{(4)} = a$ differenciálegyenlet általános megoldását négyszeri integrálással kapjuk:

$$y = \frac{a}{24}x^4 + \frac{b}{6}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx + e.$$

A kezdeti feltételek ($y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y(l) = 0$, $y'(0) = 0$) figyelembe vételével b, c, d és e kiszámítható:

$$b = -\frac{a}{2}l, \quad c = \frac{a}{12}l^2, \quad d = e = 0.$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \frac{a}{24}x^4 - \frac{a}{12}x^3 l + \frac{a}{24}x^2 l^2 = \frac{a}{24}x^2(x^2 - 2xl + l^2),$$

vagyis

$$y_p = \frac{a}{24}x^2(l - x)^2.$$

135. a) eset: A megoldandó differenciálegyenlet elsőrendű, lineáris, inhomogén. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$I_h = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$I = \frac{v}{R},$$

tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$I = \frac{V}{R} + ce^{-\frac{R}{T}t}.$$

A kezdeti feltételből ($I(0) = I_0$) $c = I_0 - \frac{V}{R}$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$I_p = \frac{V}{R} + (I_0 - \frac{V}{R})e^{-\frac{R}{L}t}.$$

b) eset: A homogén rész általános megoldása ebben az esetben is

$$I_h = ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

Az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásához számoljuk ki $c(x)$-et.

$$c(x) = \int \frac{V_0}{L} e^{\frac{R}{L}t} \sin 2\pi ntdt =$$

$$\frac{V_0}{R^2 + L^2 4\pi^2 n^2}(R \sin 2\pi nt - 2\pi nL \cos 2\pi nt) e^{\frac{R}{L}t}.$$

Ennek felhasználásával az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$I = \frac{V_0}{R^2 + 4\pi^2 n^2 L^2}(R \sin 2\pi nt - 2\pi nL \cos 2\pi nt) + ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

A kezdeti feltételből ($I(0) = I_0 = \frac{-2\pi n V_0 L}{R^2+4\pi^2n^2L^2}$) $c = 0$ adódik, így a keresett partikuláris megoldás

$$I_p = A(R \sin 2\pi nt - 2\pi nL \cos 2\pi nt),$$

ahol $A = \frac{V_0}{R^2+4\pi^2n^2L^2}$.

136. A folyó sebességvektora: $\mathbf{c} = c\mathbf{j}$, a csónak sebességvektora pedig $\mathbf{v} = v\frac{PL}{|PL|}$. Mivel $PL = (l-x)\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, ezért $\mathbf{v} = v\frac{(l-x)\mathbf{i}-y\mathbf{j}}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}$. Az egyenlőre még ismeretlen egyenletű görbe P pontbeli érintőjének $\mathbf{e}$ irányvektora a $\mathbf{v} + \mathbf{c}$ összeg, amely rendezés után a következő alakban írható:

$$\mathbf{e} = \frac{v(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{c\sqrt{(l-x)^2+y^2} - vy}{\sqrt{(l-x)^2+y^2}}\mathbf{j}.$$

Az r vektor iránytangense a $\mathbf{j}$ és $\mathbf{i}$ vektorok együtthatóinak hányadosa:

$$\frac{c\sqrt{(l-x)^2+y^2} - vy}{v(l-x)} = \frac{c}{v}\sqrt{1 + (\frac{y}{l-x})^2} - \frac{y}{l-x},$$

amely egyenlő a keresett görbe P pontbeli érintőjének iránytangensével, az $y'(x)$-el. A megoldandó differenciálegyenlet tehát:

$$y' = \frac{c}{v}\sqrt{1 + (\frac{y}{l-x})^2} - \frac{y}{l-x}.$$

Vezessük be az $u = \frac{y}{l-x}$ új ismeretlent. Ekkor $y = u(l-x)$, $y' = u'(l-x) - u$. Így $u'(l-x) - u = \frac{c}{v}\sqrt{1+u^2} - u$, vagyis $u'(l-x) = \frac{c}{v}\sqrt{1+u^2}$. A változókat szétválasztva:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \frac{c}{v} \int \frac{1}{l-x} dx.$$

Integrálás után:

$$\operatorname{arsh} u = -\frac{c}{v} \ln(l-x) + \ln k,$$

vagyis

$$\ln(u + \sqrt{1+u^2}) = \ln \frac{k}{(l-x)^{\frac{c}{v}}}.$$

Tehát
$$u+\sqrt{1+u^2}=k(l-x)^{-\frac{c}{v}},$$
azaz
$$y+\sqrt{(l-x)^2+y^2}=k(l-x)^{1-\frac{c}{v}}.$$
A csónak az origóból indul, a kezdeti feltétel tehát $y(0)=0$. Ebből $k=l^{\frac{c}{v}}$. Így a keresett megoldás:
$$y+\sqrt{(l-x)^2+y^2}=l^{\frac{c}{v}}(l-x)^{1-\frac{c}{v}}.$$
Explicit alakban:
$$y=\frac{1}{2}l^{\frac{c}{v}}(l-x)^{1-\frac{c}{v}}-\frac{1}{2l^{\frac{c}{v}}}(l-x)^{1+\frac{c}{v}}.$$
a) eset: $v=c$ esetén a görbe egyenlete:
$$y=\frac{1}{2}l-\frac{1}{2l}(l-x)^2,$$
amelynek grafikonja egy $x=l$ tengelyű konkáv parabola.
b) eset: $v=2c$ esetén a görbe egyenlete :
$$y=\frac{1}{2}l^{\frac{1}{2}}(l-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2l^{\frac{1}{2}}}(l-x)^{\frac{3}{2}},$$
vagyis
$$y=\frac{1}{2\sqrt{l}}x\sqrt{l-x}.$$
c) eset: $v=\frac{1}{2}c$ esetén a görbe egyenlete:
$$y=\frac{1}{2}l^2(l-x)^{-1}-\frac{1}{2l^2}(l-x)^3,$$
vagyis
$$y=\frac{l^2}{2}\frac{1}{l-x}-\frac{1}{2l^2}(l-x)^3.$$
Az $x=0$ esetén az $y=0$; $x\to l$ esetén $y\to\infty$. A csónak tehát ebben az esetben nem éri el a tulsó partot, hanem elúszik.

137. A D28.10-beli jelölések szerint
$$P=2x+2\sin y,\quad Q=2x\cos y-\sin y.$$
Tehát
$$P'_y=2\cos y,\quad Q'_x=2\cos y.$$
A T 28.11-beli folytonossági és parciális differenciálhatósági feltételek az egész xy-síkon teljesülnek, továbbá $P'_y=Q'_x$. Tehát az egyenlet egzakt. Az általános megoldást $u(x,y)=c$ alakban keressük. Akkor
$$u(x,y)=\int(2x+2\sin y)dx=x^2+2x\sin y+c(y),$$

ahol $c(y)$ az y-nak egyelőre ismeretlen függvényét jelöli. Mivel $u'_y = Q$, ezért

$$2x\cos y + c'(y) = 2x\cos y - \sin y.$$

Ebből

$$c'(y) = -\sin y, \qquad c(y) = \cos y$$

(az integrációs konstanst 0-nak választjuk). Az általános megoldás ezek szerint:

$$x^2 + 2x\sin y + \cos y = c.$$

138. Az egyenlet egzakt, az általános megoldás: $e^{x^2} + y\,\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,2y = 0$.

139. Az egyenlet egzakt, az általános megoldás: $x\ln y + ye^x + 2x - \mathrm{sh}\,y = c$.

140. Az egyenlet egzakt, az általános megoldás: $\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3 = c$.

141. Az egyenlet egzakt, az általános megoldás: $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$.

142. Az egyenlet az $y = -x$, az $y = 0$ és az $x = 0$ egyenletű egyeneseken nincs értelmezve. Ezek az egyenesek az xy-síkot hat olyan egyszeresen összefüggő részre bontják, amelyek mindegyikében a T **28.11**-beli feltételek teljesülnek. Ezért az egyenlet egzakt, az általános megoldás: $\ln x - \frac{y^2}{x+y} + y - \ln y = c$.

143. $P'_y = -x$, $Q'_x = y - 2x$; a differenciálegyenlet nem egzakt. Mivel (eltekintve az $y = x$ egyenletű egyenestől) $\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{x-y}{xy-x^2} = -\frac{1}{x}$, vagyis $\frac{P'_y-Q'_x}{Q}$ csak x-től függ, van csak x-től függő multiplikátor:

$$\ln|M_1| = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x + c.$$

A legegyszerűbb alakú multiplikátort a $c = 0$ választással kapjuk (és ezért a további feladatmegoldásokban integrációs konstanst nem is írunk):

$$M_1(x) = \frac{1}{x} \text{ vagy } M_1(x) = -\frac{1}{x};$$

a kettő közül persze az előbbit választjuk. Ezzel való szorzás után (mivel az eredeti egyenlet az $x = 0$ helyen értelmetlen) az eredetivel ekvivalens

$$\left(\frac{1}{x} - y\right) + (y - x)y' = 0$$

differenciálegyenlet adódik; ez már egzakt. Az általános megoldás:

$$\frac{1}{2}y^2 - xy + \ln x = c.$$

144. $P'_y = 2x\cos y - 2xy\sin y + \ln y + 1 + \cos x$, $Q'_x = 1 - 2xy\sin y$. A differenciálegyenlet nem egzakt. Csak x-től függő multiplikátor nincs. Csak y-tól függő multiplikátor azonban található:

$$\ln|M_2| = \int \frac{-2x\cos y - \ln y - \cos x}{2xy\cos y + y\ln y + y\cos x}dy = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y,$$

$$M_2(y) = \frac{1}{y}.$$

Ezzel való szorzás után az eredetivel ekvivalens

$$(2x\cos y + \ln y + \cos x) + (\frac{x}{y} - x^2 \sin y - \operatorname{sh} y)y' = 0$$

differenciálegyenlet adódik, s ez már egzakt. Az általános megoldás:

$$x^2 \cos y + x \ln y + \sin x - \operatorname{ch} y = c.$$

145. $P'_y = \operatorname{tg} x$, $Q'_x = 0$; a differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = \frac{1}{\cos x}$. Az általános megoldás:

$$\operatorname{tg} x - y\frac{1}{\cos x} = c.$$

146. $P'_y = 1$, $Q'_x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x - 12y \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; a differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. Az általános megoldás:

$$y \operatorname{th} x + e^{2x} - 3y^2 = c.$$

147. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$x^3 - 3x^2 y + y^3 = c.$$

148. $P'_y = 2x^2 e^{-y}$, $Q'_x = 4x$; a differenciálegyenlet nem egzakt. Mivel $(P'_y - Q'_x)$-nek sem a P-vel, sem a Q-val képzett hányadosa nem egyváltozós, ezért e differenciálegyenletnek nincs egyváltozós multiplikátora. Így ilyen módon nem tudjuk megoldani.

149. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$\sin x + e^{-x} \sin y = c.$$

150. $P'_y = \ln y + 1 + \operatorname{sh} x$, $Q'_x = 1$; a differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = \frac{1}{y}$. Ennek segítségével az általános megoldás:

$$x \ln y + \operatorname{ch} x + e^y = c.$$

151. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$2x + 3y + 4e^{xy} = c.$$

152. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$(x-1)\ln(y^2+1) = c.$$

153. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = e^{-x}$. Az általános megoldás:

$$\frac{1}{2}y^2 - ye^{-x} = c.$$

154. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = y$. Az általános megoldás:

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^3 = c.$$

155. A differenciálegyenlet nem egzakt. Egyváltozós multiplikátor nem található hozzá.

156. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$xe^y - y^2 = c.$$

157. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$. Mivel $y^2 + 1 \neq 0$, a multiplikátorral megszorzott egyenlet ekvivalens az eredetivel. Az általános megoldás:

$$x\sqrt{y^2+1} + \operatorname{arsh} y = c.$$

158. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $(x \neq 0)$. Az általános megoldás:

$$2\sqrt{|x|}(\operatorname{sgn} x)(\frac{1}{7}x^3 + y^4) = c \quad x \neq 0.$$

Mivel c tetszőleges konstans, ezért az általános megoldás a következőképpen is felírható:

$$2\sqrt{|x|}(\frac{1}{7}x^3 + y^4) = c \quad x \neq 0.$$

159. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = e^{2y}$. Az általános megoldás:

$$xe^y - y^2 = c.$$

160. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = \cos x$. Az általános megoldás:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x - y\cos x = c.$$

161. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = \frac{1}{(y^2+1)^2}$. Az általános megoldás:

$$\frac{x^2-1}{y^2+1} = c.$$

162. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = e^y$. Az általános megoldás:

$$\frac{x^2}{2}e^{2y} + y^2 = c.$$

163. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = e^x$. Az általános megoldás:

$$ye^x(y^2 + 3x^2) = c.$$

164. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_2(y) = y$. Az általános megoldás:

$$xy^2 + y\operatorname{arctg} x = c,$$

de a $c = 0$ értéknél az $y = 0$ konstansfüggvény nem megoldása az eredeti differenciálegyenletnek, de az $y = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$ $(x \neq 0)$ függvény igen.

165. A differenciálegyenlet egzakt, általános megoldása:

$$e^x \sin y + e^y \cos x = c.$$

166. A differenciálegyenlet nem egzakt. $M_1(x) = e^x$. Az általános megoldás:

$$e^x y\cos y + e^x(x-1)\sin y = c.$$

167. $x^2 + x\cos y = 2.$ 168. $x^3 + 2y\operatorname{ch} x = 4.$
169. $x\operatorname{tg} y - y\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{12}(3\sqrt{3} - 4).$ 170. $y^2 - y\operatorname{sh} x = 1.$
171. $x^2 \ln y + ye^x = 2.$ 172. $x^3y^2 - x^2y = 2.$
173. $\frac{1}{2}y^2\cos^2 x - y\sin x = 2.$ 174. $x^2y + y^2\cos x = 4.$
175. $y^2\operatorname{sh} x + x^2\operatorname{ch} y = 4.$ 176. $\ln xy + xy = 1.$

177. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Az $\omega = \frac{\pi}{2}$ esetben y' helyébe $\frac{-1}{y'}$-t írva az ortogonális trajektóriák differenciálegyenletéhez jutunk:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \text{ vagyis } y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

E differenciálegyenlet megoldása:

$$x^2 + y^2 - c_1 y = 0;$$

ez az ortogonális trajektóriák egyenlete.
Ha $\omega = \frac{\pi}{4}$, akkor $\operatorname{tg}\omega = 1$. Ezért az adott görbesereg differenciálegyenletében az y' helyébe a $\frac{y'+1}{1-y'}$ kifejezést írjuk:

$$\frac{y' + 1}{1 - y'} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}.$$

Ebből átrendezéssel az

$$y' = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{y^2 - x^2 + 2xy}$$

differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása szolgáltatja az $x^2 + y^2 - 2cx = 0$ egyenletű görbesereg egyes görbéit $\omega = \frac{\pi}{4}$ szögben metsző izogonális trajektóriák egyenletét:

$$x^2 + y^2 - c_2(x + y) = 0.$$

178. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete, illetve egyenlete:
$\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad \text{illetve} \quad xy = c_1;$$

$\omega = \frac{\pi}{3}$ esetén

$$y' = \frac{x - \sqrt{3}y}{y + \sqrt{3}x}, \quad \text{illetve} \quad y^2 + 2\sqrt{3}xy - x^2 = c_2;$$

$\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad \text{illetve} \quad y^2 + 2xy - x^2 = c_3.$$

179. $x^2 + y^2 - 2\ln x = c_1$.

180. $\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén: $x^2 + y^2 = c_1$, $\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén: $\sqrt{x^2+y^2}e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} = c_2$.

181. $x^2 + 2y^2 = c^2$.

182. $y^2 - x^2 = c_1$, ha $\omega = \frac{\pi}{2}$, $y^2 - 2xy - x^2 = c_2$, ha $\omega = \frac{\pi}{4}$.

183. $y = -\frac{2}{3}x\sqrt{2x} + c_1$.

184. $x^2 + 3y^2 = c_1^2$, ha $\omega = \frac{\pi}{2}$ és $\sqrt{x^2 - 2xy + 3y^2}e^{\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3y-x}{\sqrt{2}x}} = c_2$, ha $\omega = \frac{\pi}{4}$.

185. $x^2 + ny^2 = c_1^2$.

186. $e^{x^2+y^2} - c_1x^2 = 0$.

187. $x^2(\ln x^2 - 1) + 2y^2 = c_1$.

188. $y^2 = \ln \frac{c_1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

189. $\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén $y = c_1x$, $\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén $\sqrt{x^2+y^2} = ce^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$.

190. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}{x}.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{-x}{y \pm \sqrt{x^2+y^2}}.$$

Alkalmazzuk az $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést. Ekkor az

$$u'x + u = \frac{-1}{u \pm \sqrt{1+u^2}}$$

differenciálegyenlethez jutunk. A változók szétválasztása után

$$\int \frac{u \pm \sqrt{1+u^2}}{(1+u^2) \pm \sqrt{1+u^2}}du = \int -\frac{1}{x}dx$$

adódik. A bal oldali integrál meghatározásához alkalmazzuk az $u = \operatorname{sh} t$ helyettesítést. Ekkor

$$\int \frac{\operatorname{sh} t \pm \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch}^2 t \pm \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t}\operatorname{ch} t dt = -\int \frac{1}{x}dx,$$

amiből

$$\ln(\operatorname{ch} t \pm \operatorname{sh} t) = \ln \frac{c_1}{x},$$

$$x^2 = c_1^2 \pm 2c_1y,$$

vagy

$$x^2 = c_1(c_1 \pm 2y).$$

191. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y(y^2 - 3x^2)}{x(3y^2 - x^2)}.$$

Az ortogonális trajektória differenciálegyenlete:

$$y' = -\frac{x(3y^2 - x^2)}{y(y^2 - 3x^2)}.$$

$u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel, majd a változók szétválasztásával az

$$\int \frac{u^3 - 3u}{u^4 - 1} du = -\int \frac{1}{x} dx.$$

egyenlőséghez jutunk. Elemi törtek összegére való bontás után:

$$\int \left(\frac{2u}{u^2+1} - \frac{u}{u^2-1}\right) du = -\int \frac{1}{x} dx,$$

$$\frac{u^2+1}{\sqrt{|u^2-1|}} = \frac{c_1}{x}; \quad c_1 > 0,$$

$$(x^2 + y^2)^2 = c_2(y^2 - x^2); \quad c_2 = c_1^2.$$

192. Először a c paraméter kiküszöbölésével felírjuk a görbesereg differenciálegyenletét:

$$r' = -r \operatorname{tg} 2\phi.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:
$\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén

$$-\frac{r^2}{r'} = -r \operatorname{tg} 2\phi, \quad \text{azaz} \quad \frac{r'}{r} = \operatorname{ctg} 2\phi,$$

melynek megoldása:

$$r^2 = c_1 \sin 2\phi;$$

$\omega = \frac{\pi}{3}$ esetén

$$r\frac{r' - r\sqrt{3}}{r + r'\sqrt{3}} = -r \operatorname{tg} 2\phi, \quad \text{amiből} \quad \frac{r'}{r} = \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} 2\phi}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 2\phi},$$

azaz

$$\frac{r'}{r} = -\operatorname{tg}(2\phi - \frac{\pi}{3}),$$

melynek megoldása:

$$r^2 = c_2 \cos(2\phi - \frac{\pi}{3});$$

$\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén

$$r\frac{r' - r}{r' + r} = -r \operatorname{tg} 2\phi, \text{ azaz } r' = r\frac{1 - \operatorname{tg} 2\phi}{1 + \operatorname{tg} 2\phi},$$

melynek megoldása:

$$r^2 = c_3 \cos(2\phi - \frac{\pi}{4}).$$

193. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$r' = -r\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:
$\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén

$$-\frac{r^2}{r'} = -r\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}, \text{ azaz } r' = r\frac{1+\cos\phi}{\sin\phi},$$

melynek megoldása:

$$r = c_1(1-\cos\phi);$$

$\omega = \frac{\pi}{3}$ esetén

$$r\frac{r' - \sqrt{3}r}{r+\sqrt{3}r'} = -r\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}, \quad \text{azaz } r' = r\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\cos\phi - \sin\phi}{1+\cos\phi+\sqrt{3}\sin\phi},$$

melynek megoldása:

$$r = c_2(2-\cos\phi+\sqrt{3}\sin\phi);$$

$\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén

$$r\frac{r'-r}{r'+r} = -r\frac{\sin\phi}{1+\cos\phi}, \text{ azaz } r' = r\frac{1+\cos\phi-\sin\phi}{1+\cos\phi+\sin\phi},$$

melynek megoldása:

$$r = c_3(1+\sin\phi).$$

194. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$r' = r\,\mathrm{ctg}\,\phi.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete, illetve egyenlete:
$\omega = \frac{\pi}{2}$ esetén $r' = -r\,\mathrm{tg}\,\phi$, illetve $r = c_1\cos\phi$ (vagy $r = k_1\sin(\phi - \frac{\pi}{2})$);
$\omega = \frac{\pi}{3}$ esetén $r' = r\frac{\cos\phi+\sqrt{3}\sin\phi}{\sin\phi-\sqrt{3}\cos\phi}$, illetve $r = c_2(\sin\phi - \sqrt{3}\cos\phi)$
(vagy $r = c_{21}\sin(\phi - \frac{\pi}{3})$);
$\omega = \frac{\pi}{4}$ esetén $r' = r\frac{\cos\phi+\sin\phi}{\sin\phi-\cos\phi}$, illetve $r = c_3(\sin\phi - \cos\phi)$
(vagy $r = c_{31}\sin(\phi - \frac{\pi}{4})$).

195. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$r' = 1 + r^2.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete, illetve egyenlete:

$$r' = -\frac{r^2}{r^2+1}, \text{ illetve } r - \frac{1}{r} = c_1 - \phi.$$

196. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$r' = -r\frac{2\sin\phi}{1+2\cos\phi}.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete, illetve egyenlete:

$$r' = r\frac{1+2\cos\phi}{2\sin\phi}, \quad \text{illetve} \quad r = c_1 \sin\phi\sqrt{|\operatorname{tg}\frac{\phi}{2}|}.$$

197. A görbesereg differenciálegyenlete:

$$r' = -r\operatorname{tg}\phi.$$

Az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete, illetve egyenlete:

$$r' = r\operatorname{ctg}\phi, \text{ illetve } r = c_1\sin\phi.$$

198. Jelen esetben $\xi = 0$ és $\eta = 1$. A közelítő sorozat keresett elemei:

$y_0 = 1$,

$y_1 = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + [t + \frac{1}{2}t^2]_0^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$,

$y_2 = 1 + \int_0^x (1 + t + \frac{1}{2}t^2 + t)dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3!}$,

$y_3 = 1 + \int_0^x (1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3!} + t)dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!}$,

$y_4 = 1 + \int_0^x (1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4!} + t)dt = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{5!}$.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $y = 2e^x - x - 1$ fuggvény Maclaurin-sorának negyedfokú tagjáig vett tagok összege megegyezik y_4-gyel. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk róla, hogy az $y = 2e^x - x - 1$ függvény a differenciálegyenletnek az adott kezdeti feltételeket is kielégítő (pontos) megoldása.

199. Jelenleg $\xi = 0$, $\eta = 1$. A közelítő sorozat keresett elemei:

$y_0 = 1$,

$y_1 = 1 + \int_0^x (1 - 1 - t + 1)dt = 1 + x - \frac{x^2}{2}$,

$y_2 = 1 + \int_0^x [(1 + t - \frac{t^2}{2})^2 - (1 + t - \frac{t^2}{2})(t+1) + 1]dt = 1 + \int_0^x (1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{4})dt =$
$1 + x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{20}$.

200. $y_0 = 0$,

$y_1 = \frac{x^2}{2}$,

$y_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20}$,

$y_3 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}$.

201. $y_0 = 0$,

$y_1 = \frac{x^3}{3}$,

$y_2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}$,

$y_3 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60}$,

$y_4 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} - \frac{x^6}{360}$.

A feladat pontos megoldása $y = -2e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)$. Az y_4 éppen ennek a függvénynek a 0 helyhez tartozó 6-odik Taylor-polinomja.

202. $y_0 = 0,$

$y_1 = \frac{x^3}{3},$

$y_2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$

$y_3 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$

203. Jelenleg $f(x,y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Válasszuk először h értékeként 0.1-et. Ekkor

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4
y_k	1	1.1	1.22	1.362	1.5282
$hf(x_k, y_k)$	0.1	0.12	0.142	0.1662	0.19282

A $h = -0.1$ választással pedig táblázatunk a következő:

k	0	1	2	3	4
x_k	0	−0.1	−0.2	−0.3	−0.4
y_k	1	0.9	0.82	0.758	0.7122
$hf(x_k, y_k)$	−0.1	−0.08	−0.062	−0.0458	−0.03122

204. A $h = 0.1$-hez tartozó táblázat:

k	0	1	2	3
x_k	0	0.1	0.2	0.3
y_k	1	1.1	1.2	1.3
$hf(x_k, y_k)$	0.1	0.109	0.1169	0.12359

A $h = -0.1$ értékhez tartozó táblázat pedig:

k	0	1	2	3
x_k	0	−0.1	−0.2	−0.3
y_k	1	0.9	0.811	0.7339
$hf(x_k, y_k)$	−0.1	−0.089	−0.0771	−0.06439

205. A $h = 0.1$-hez tartozó táblázat:

k	0	1	2	3
x_k	1	1.1	1.2	1.3
y_k	1	1.2	1.444	1.75136
$hf(x_k, y_k)$	0.2	0.244	0.30736	...

A $h = -0.1$ értékhez tartozó táblázat pedig:

k	0	1	2	3
x_k	0	0.9	0.8	0.7
y_k	1	0.8	0.636	0.49631
$hf(x_k, y_k)$	−0.2	−0.164	−0.13969	...

206. A $h = 0.1$-hez tartozó táblázat:

k	0	1	2	3
x_k	1	1.1	1.2	1.3
y_k	0	0.1	0.211	0.33632
$hf(x_k, y_k)$	0.1	0.111	0.12532	...

A $h = -0.1$ értékhez tartozó táblázat pedig:

k	0	1	2	3
x_k	1	0.9	0.8	0.7
y_k	0	−0.1	−0.191	−0.27672
$hf(x_k, y_k)$	−0.1	−0.091	−0.08572	...

207. A $h = 0.1$-hez tartozó táblázat:

k	0	1	2	3
x_k	1	1.1	1.2	1.3
y_k	1	1.2	1.465	1.8236225
$hf(x_k, y_k)$	0.2	0.265	0.3586225	...

A $h = -0.1$ értékhez tartozó táblázat pedig:

k	0	1	2	3
x_k	0	0.9	0.8	0.7
y_k	1	0.8	0.655	0.5480975
$hf(x_k, y_k)$	−0.2	−0.145	−0.1069025	...

208. A $h = 0.2$ választás mellett táblázatunk a következő:

k	0	1	2	3
x_k	0	0.2	0.4	0.6
y_k	1	1.22	1.4884	1.8158485
a_k	–	0.1	0.3	0.5
b_k	–	1.1	1.342	1.63724
$\frac{1}{2}hf(x_k, y_k)$	0.1	0.122	0.14884	...
$hf(a_k, b_k)$	–	0.22	0.2684	0.327448

A $h = -0.2$ értékhez tartozó táblázat pedig a következő:

k	0	1	2	3
x_k	0	−0.2	−0.4	−0.6
y_k	1	0.82	0.6724	0.551368
a_k	–	−0.1	−0.3	−0.5
b_k	–	0.9	0.738	0.60516
$\frac{1}{2}hf(x_k, y_k)$	−0.1	−0.082	−0.06724	...
$hf(a_k, b_k)$	–	−0.18	−0.1476	−0.121032

209. A $h = 0.2$ választás mellett táblázatunk a következő:

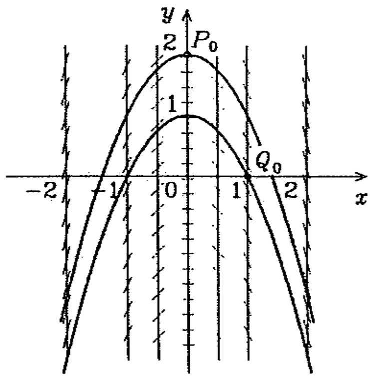
k	0	1	2	3
x_k	0	0.2	0.4	0.6
y_k	1	1.24	1.5768	2.031696
a_k	–	0.1	0.3	0.5
b_k	–	1.1	1.384	1.77448
$\frac{1}{2}hf(x_k, y_k)$	0.1	0.144	0.19768	...
$hf(a_k, b_k)$	–	0.24	0.3368	0.454896

A $h = -0.2$ értékhez tartozó táblázat pedig a következő:

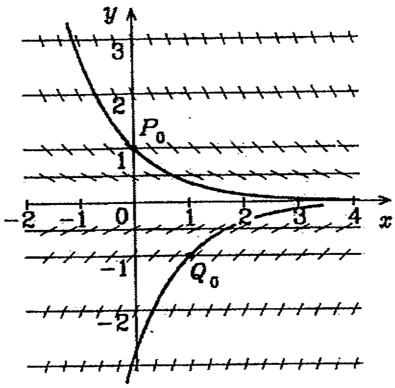
k	0	1	2	3
x_k	0	−0.2	−0.4	−0.6
y_k	1	0.84	0.7448	0.697936
a_k	–	−0.1	−0.3	−0.5
b_k	–	0.9	0.776	0.71032
$\frac{1}{2}hf(x_k, y_k)$	−0.1	−0.064	−0.03448	...
$hf(a_k, b_k)$	–	−0.16	−0.0952	−0.042064

Ezt a feladatot korábban (l. **205**. feladat) Euler-módszerrel is megoldottuk, továbbá a pontos megoldást is ismerjük: $y = 2e^x - x - 1$. Az adatok összehasonlítása jól mutatja, hogy a Runge – Kutta-módszer pontosabb eredményt ad, mint az Euler-módszer.

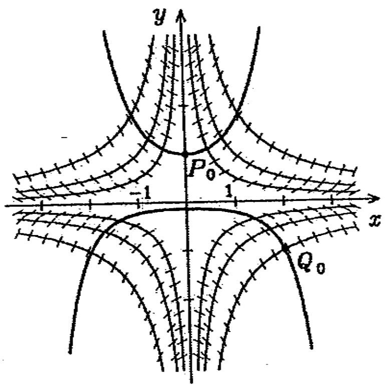
210. Az iránymező olyan, hogy az (x, y) ponthoz rendelt irány tangense csak az x koordinátától függ, az $m = -2x$ képlet alapján. Az izoklín vonalak egyenlete: $x = -\frac{1}{2}m$. Az izoklín vonalak tehát az y-tengellyel párhuzamos egyenesek. Az iránymező berajzolása után a P_0, illetve Q_0 ponton átmenő integrálgörbék is megrajzolhatók (l. az ábrát, amelyen az $m = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$ értékekhez tartozó izoklín vonalak vannak feltüntetve).



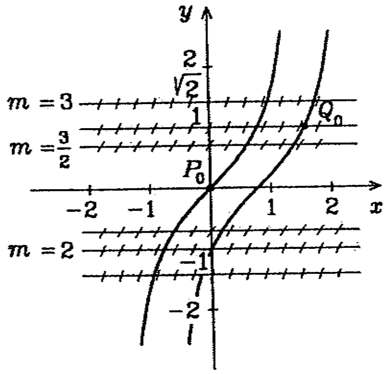
211. Az iránymező olyan, hogy az (x, y) ponthoz rendelt irány tangense csak az y koordinátától függ az $m = -y$ képlet alapján. Így az izoklín vonalak egyenlete: $y = -m$. Az izoklín vonalak tehát az x-tengellyel párhuzamos egyenesek. Az adott pontokon átmenő integrálgörbék vázlatos grafikonja az ábrán látható; az $m = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ értékekhez tartozó izoklín vonalak vannak feltüntetve.



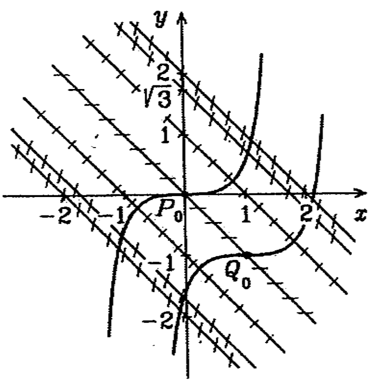
212. $y = \frac{m}{x}$.



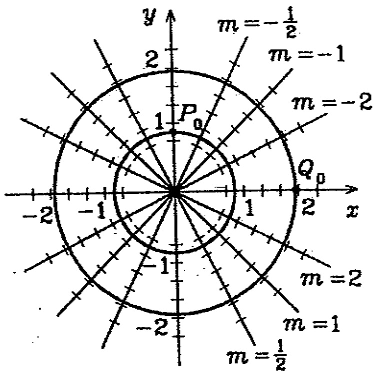
213. $y = \sqrt{m - 1}$; $\quad m \geq 1$.



214. $|x + y| = \sqrt{m}$; $\quad m \geq 0$.

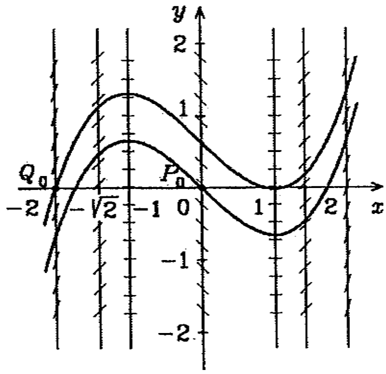


215. $y = -\frac{1}{m}x$; $\quad m \neq 0$.

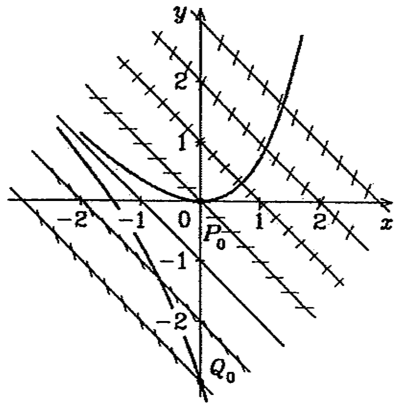


28.35

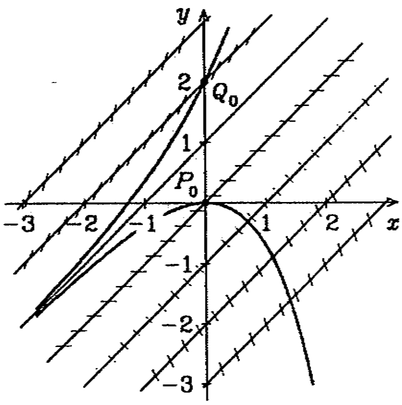
216. $x = \pm\sqrt{m+1};\quad m \geq -1.$



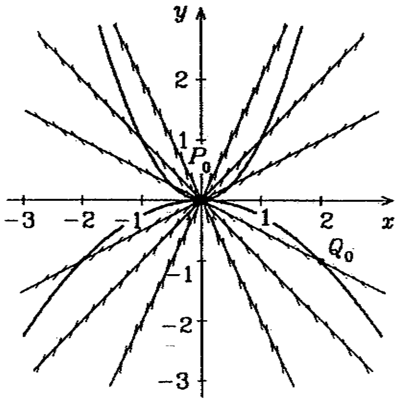
217. $y = -x + m.$



218. $y = x + m.$



219. $y = \frac{m}{2}x.$



29. Lineáris közönséges differenciálegyenletek (megoldások)

1. $W(x) = 2e^{3x}$, s ez a $(-\infty, \infty)$ intervallumon sehol sem 0. A függvényrendszer tehát J minden részintervallumán lineárisan független.
2. $W(x) = -1$, a függvényrendszer J minden részintervallumán lineárisan független.
3. $W(x) = \ln x - 1$; ez csak az $x = e$ helyen vesz fel 0 értéket. A függvényrendszer tehát J minden részintervallumán lineárisan független.
4. $W(X) = 2x^3$; ez csak az $x = 0$ helyen 0. A függvényrendszer a J minden részintervallumán lineárisan független.
5. $W(x) = 0$, ezért a **T.29.6** alapján nem tudjuk eldönteni, hogy a vizsgált függvényrendszer lineárisan független-e vagy pedig függő. Mivel a
$$2c_1 + c_2 \arcsin x + c_3 \arccos x = 0$$
egyenlőség a $c_1 = -\frac{\pi}{4}$, $c_2 = c_3 = 1$ értékekre teljesül, a függvényrendszer a J minden részintervallumán lineárisan függő.
6. $W(x) = 0$, és a
$$c_1(x+1) + c_2(x+2) + c_3(x+3) = 0$$
egyenlőség a $c_1 = c_3 = 1$, $c_2 = 2$ értékekre teljesül. Így a vizsgált függvényrendszer a J minden részintervallumán lineárisan függő.
7. $W(X) = 0$, és a
$$c_1 \ln x + c_2 \ln x^2 = 0$$
egyenlőség a $c_1 = 2$, $c_2 = -1$ értékekre teljesül. A függvényrendszer tehát lineárisan függő a J intervallumon (és ezért a J minden valódi részintervallumán is).
8. $W(x) = 0$, és a
$$2c_1 + c_2 \cos^2 x + c_3 \sin^2 x = 0$$
egyenlőség a $c_1 = 1$, $c_2 = c_3 = -2$ értékekre teljesül. A függvényrendszer a J intervallum minden részintervallumán lineárisan függő.
9. $W(X) = 0$, és a
$$4c_1 + c_2 \operatorname{arctg} x + c_3 \operatorname{arcctg} x = 0$$
egyenlőség a $c_1 = -\frac{\pi}{8}$, $c_2 = c_3 = 1$ értékekre teljesül. A függvényrendszer a J intervallum minden részintervallumán lineárisan függő.
10. $W(x) = 0$, és a $c_1x^2 + c_2x|x| = 0$ egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = 0$ értékekre teljesül, mert tetszőleges pozitív a esetén az $x = a$ helyettesítéssel $c_1 + c_2 = 0$, az $x = -a$ helyettesítéssel pedig $c_1 - c_2 = 0$ adódik. A függvényrendszer tehát lineárisan független a $(-\infty, \infty)$ intervallumon és annak minden olyan

részintervallumán amely a 0-t tartalmazza. Ha azonban J' a J-nek olyan részintervalluma, hogy $0 \notin J'$, akkor a J'-n a függvényrendszer (nyilvánvalóan) lineárisan függő.

11. $W(x) = 0$, és a $c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0$ egyenlőség csak a $c_1 = c_2 = 0$ értékekre teljesül, mert $x = a < 0$ esetén $c_1 0 + c_2 f_2(a) = 0$ csak a $c_2 = 0$ értékre teljesül, $x = b > 0$ esetén pedig a $c_1 f_1(b) + c_2) = 0$ egyenlőségből $c_1 = 0$ következik. A függvényrendszer tehát a $(-\infty, \infty)$ intervallumon lineárisan független. Ugyanez a függvényrendszer bármely $[0, c)$, $[0, c]$, $(-c, 0]$, $[-c, 0]$ intervallumon – ahol c tetszőleges pozitív szám – lineárisan függő, mert a $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ egyenlőség a $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, illetve $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ választással is teljesül.

12. $W(x) = xe^x \neq 0$, ha $x \neq 0$. A differenciálegyenletnek tehát y_1, y_2 alaprendszere a $J = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ halmazon, és itt az általános megoldás:
$$y = c_1 e^x + c_2(x + 1).$$

13. $W(x) = \frac{1}{\sin x} \neq 0$, és értelmezve van, ha $x \neq k\pi$, $(k \in \mathbf{Z})$. Az y_1, y_2 függvények tehát a differenciálegyenlet alaprendszerét képezik minden olyan J intervallumon, mely nem tartalmazza az $x = k\pi$ $(k \in \mathbf{Z})$ helyeket. Az ilyen intervallumokon az általános megoldás:
$$y = c_1 \operatorname{ctg} x + c_2 \frac{1}{\sin x}.$$

14. $W(x) = -\frac{4}{\sin 2x} \neq 0$, és értelmezve van, ha $x \neq k\frac{\pi}{2}$; $(k \in \mathbf{Z})$.
Az általános megoldás: $y = c_1 \operatorname{tg} x + c_2 \operatorname{ctg} x$ $(x \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z})$.

15. $W(x) = -3x^2 \neq 0$, ha $x \neq 0$. Az általános megoldás a $J = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ halmazon: $y = c_1 x^3 + c_2$.

16. $W(x) = 1 - \ln x \neq 0$, ha $x \neq e$. Így az általános megoldás a $J = (0, e) \cup (e, \infty)$ halmazon: $y = c_1 x + c_2 \ln x$.

17. $W(x) = x^2 + 1 \neq 0$. Így az általános megoldás a $(-\infty, \infty)$ intervallumon: $y = c_1 x + c_2(x^2 - 10)$.

18. $W(x) = -\frac{1}{\operatorname{sh} x} \neq 0$, és értelmezve van, ha $x \neq 0$. Így az általános megoldás a $J = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ halmazon: $y = c_1 \operatorname{cth} x + c_2 \frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

19. $W(x) = \sin^2 x \cos x \neq 0$, ha $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$. Így az általános megoldás: $y = c_1 \sin x + c_2 \sin^2 x$, ha $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

20. $W(x) = \sin x \neq 0$, ha $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Így az általános megoldás: $y = c_1 \sin x + c_2 \sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, ha $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

21. $W(x) = 5 \neq 0$. Az általános megoldás $y = c_1 x^{-2} + c_2 x^3$.

22. $W(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$, és értelmezve van, ha $x \neq 0$. Így az általános megoldás a $J = (0, \infty)$ intervallumon: $y = c_1 + c_2 x + c_3 \ln x$.

23. $W(x) = x \neq 0$, ha $x \neq 0$. Az általános megoldás a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ halmazon: $y = c_1 x + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

24. $W(x) = e^{3x}(2x - 3) \neq 0$, ha $x \neq \frac{3}{2}$. Az általános megoldás a $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ halmazon: $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 x$.

25. $W(x) = -x \neq 0$, ha $x \neq 0$. Az általános megoldás a $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ halmazon: $y = c_1 x + c_2 \operatorname{ch} x + c_3 \operatorname{sh} x$.
26. $W(x) = e^{-x}$, amely seholsem 0. Az általános megoldás a $(-\infty, \infty)$ intervallumon: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$.
27. $W(x) = e^x((x-1)^2 + 1)$, amely sehol sem 0. Így az alaprendszer a $(-\infty, \infty)$ intervallumon: $y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 e^x$.
28. $W(x) = -\frac{2}{x^3}(2x-1) \neq 0$, ha $x \neq \frac{1}{2}$, és értelmezve van, ha $x \neq 0$. Az általános megoldás a $(-\infty, 0) \cup (0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ halmazon: $y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} + c_3 (x \ln |x| + 1)$.
29. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$t^2 - 5t + 6 = 0.$$

Ennek gyökei (melyek valósak és egyszeresek):

$$t_1 = 2, \; t_2 = 3.$$

A differenciálegyenlet egyik alaprendszere:

$$y_1 = e^{2x}, \; y_2 = e^{3x};$$

az általános megoldást ezek lineáris kombinációja adja:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}.$$

A kezdeti feltételek szerint

$$c_1 + c_2 = 1 \quad \text{és} \quad 2c_1 + 3c_2 = 1,$$

figyelembe véve, hogy $y' = 2c_1 e^{2x} + 3c_2 e^{3x}$. Ebből az egyenletrendszerből $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = 2e^{2x} - e^{3x}.$$

30. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$t^3 + 2t^2 - 4t - 8 = 0.$$

Gyökei (valósak, de nem mind egyszeresek):

$$t_{1,2} = -2, \; t_3 = 2.$$

A differenciálegyenlet egyik alaprendszere:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + c_3 e^{2x}.$$

A kezdeti feltételek felhasználásával

$$c_1 = -1, \; c_2 = -1, \; c_3 = 1.$$

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = e^{2x} - (x+1)e^{-2x}.$$

31. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$t^3 - t^2 + 4t - 4 = 0.$$

Ennek gyökei (egyszeresek, de nem mind valósak):

$$t_1 = 1,\ t_2 = 2i,\ t_3 = -2i.$$

A differenciálegyenlet egyik alaprendszere:

$$y_1 = e^x,\ y_2 = \cos 2x,\ y_3 = \sin 2x,$$

általános megoldása pedig:

$$y = c_1 e^x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$

A kezdeti feltételek felhasználásával $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^x - \cos 2x + \sin 2x.$$

32. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$t^2 - 6t + 13 = 0.$$

Ennek gyökei (egyszeresek és nem valósak):

$$t_1 = 3 + 2i,\ t_2 = 3 - 2i.$$

A differenciálegyenlet egyik alaprendszere:

$$y_1 = e^{3x} \cos 2x,\ y_2 = e^{3x} \sin 2x,$$

általános megoldása pedig:

$$y = c_1 e^{3x} \cos 2x + c_2 e^{3x} \sin 2x,$$

vagy más alakban

$$y = e^{3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

A kezdeti feltételekből: $c_1 = 1$, $c_2 = -2$. A keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^{3x}(\cos 2x - 2 \sin 2x).$$

33. A differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete:

$$t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + 1 = 0.$$

Ennek gyökei (nem mind valósak és nem mind egyszeresek):

$$t_{1,2} = 1,\ t_3 = i,\ t_4 = -i.$$

A differenciálegyenlet egyik alaprendszere:

$$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x,\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x,$$

általános megoldása pedig:

$$y = e^x(c_1 + c_2 x) + c_3 \cos x + c_4 \sin x.$$

34. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = 2i$, $t_{3,4} = -2i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x.$$

35. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2$, $t_2 = -1$, a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 2$, $c_2 = -1$):

$$y_p = 2e^{2x} - e^{-x}.$$

36. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 3$, $t_2 = -3$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$):

$$y_p = e^{3x} - e^{-3x}.$$

37. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = -3$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}.$$

38. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2$ és $t_2 = -2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$):

$$y_p = e^{2x} - e^{-2x}.$$

39. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = -2$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-2x}.$$

40. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = 2$, $t_4 = -2$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-2x}.$$

41. A karakterisztikus egyenletnek -2 kétszeres gyöke, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

42. A karakterisztikus egyenletnek a 3 kétszeres gyöke, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{3x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$):

$$y_p = (1 - x)e^{3x}.$$

43. A karakterisztikus egyenletnek $\frac{1}{2}$ kétszeres gyöke, így az általános megoldás:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{\frac{x}{2}}.$$

44. A karakterisztikus egyenletnek $-\frac{1}{2}$ háromszoros gyöke, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{-\frac{x}{2}}.$$

45. A karakterisztikus egyenletnek $-\frac{3}{2}$ kétszeres gyöke, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{3}{2}x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 2$, $c_2 = 1$):

$$y_p = (2 + x)e^{-\frac{3}{2}x}.$$

46. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = -2$, $t_{2,3} = 2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{-2x} + (c_2 + c_3 x)e^{2x}.$$

47. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = 1$, $t_3 = -3$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{x} + c_3 e^{-3x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = 3$, $c_3 = -\frac{1}{4}$):

$$y_p = (\frac{1}{4} + 3x)e^{x} - \frac{1}{4}e^{-3x}.$$

48. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = 0$, $t_3 = 2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$c_1 + c_2 x + c_3 e^{2x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 2$, $c_2 = -1$, $c_3 = 1$):

$$y_p = 2 - x + e^{2x}.$$

49. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 0$, $t_{2,3} = \frac{1}{2}$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 + (c_2 + c_3 x)e^{\frac{x}{2}}.$$

50. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = 2$, $t_{3,4} = -2$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{2x} + (c_3 + c_4 x)e^{-2x}.$$

51. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1 + 2i$, $t_2 = 1 - 2i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

52. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2i$, $t_2 = -2i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = c_2 = 1$):

$$y_p = \cos 2x + \sin 2x.$$

53. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2 + i$, $t_2 = 2 - i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

54. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1 + i$, $t_2 = 1 - i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$):

$$y_p = e^{x}(\cos x - \sin x).$$

55. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = -2 + 3i$, $t_2 = -2 - 3i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x).$$

56. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x.$$

57. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 0$, $t_2 = 1 + i$, $t_3 = 1 - i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 + e^{x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x).$$

58. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = 0$, $t_3 = 3i$, $t_4 = -3i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos 3x + c_4 \sin 3x.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = -1$):

$$y_p = 2 + 3x + \cos 3x - \sin 3x.$$

59. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2$, $t_{2,3} = 2i$, $t_{4,5} = -2i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + (c_2 + c_3 x) \cos 2x + (c_4 + c_5 x) \sin 2x.$$

60. A differenciálegyenlet nem homogén, de $y - \frac{1}{2} = z$ helyettesítéssel ($y'' = z''$ miatt) a

$$z'' - 4z = 0$$

homogén differenciálegyenlethez jutunk. Ennek általános megoldása:

$$z = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Visszatérve az y változóra, az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -1$):

$$y_p = e^{2x} - e^{-2x} + \frac{1}{2}.$$

61. A differenciálegyenlet $z = y + 1$ helyettesítéssel homogénná tehető:

$$z'' - z = 0.$$

Ennek általános megoldása:

$$z = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

Visszatérve az y változóra, az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 1.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$):

$$y_p = e^{x} - 1.$$

62. Mivel a karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 2$, $t_2 = -2$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = 0$):

$$y_p = e^{2x}.$$

63. A karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, így

$$y_p = 2e^{x} - e^{-x}.$$

64. A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x,$$

a keresett partikuláris megoldás pedig ($c_1 = 2$, $c_2 = 1$):

$$y_p = 2 \cos 2x + \sin 2x.$$

65. A differenciálegyenlet nem homogén, de $z = y - 2$ helyettesítés után a

$$z'' + 9z = 0$$

homogén differenciálegyenlethez jutunk; ennek általános megoldása

$$z = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x.$$

Így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + 2.$$

A keresett partikuláris megoldás ($c_1 = 1$, $c_2 = -2$):

$$y_p = \cos 3x - 2 \sin 3x + 2.$$

66. A megoldást a **T.29.16**-nak megfelelően

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

alakban keressük. Mivel az idézett tétel arra az esetre vonatkozik, amikor az y'' együtthatója 1, ezért a W_i, $i = 1,2$ determinánsokban fellépő $f(x)$ függvényt úgy kapjuk, hogy a differenciálegyenlet jobb oldalát osztjuk az y'' együtthatójával. Ez esetben $f(x) = xe^x$. Mivel

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & -x-1 \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = xe^x,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & -x-1 \\ xe^x & -1 \end{vmatrix} = x(x+1)e^x, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^x \end{vmatrix} = xe^{2x},$$

ezért

$$c_1(x) = \int \frac{x(x+1)e^x}{xe^x} dx = \int (x+1)dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c_1; \quad c_1 \in \mathbf{R},$$

$$c_2(x) = \int \frac{xe^{2x}}{xe^x} dx = \int e^x dx = e^x + c_2; \quad c_2 \in \mathbf{R}.$$

Így az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^x + c_2(x+1) + (\frac{1}{2}x^2 + x) + e^x(-x-1),$$

vagy összevont alakban

$$y = c_1 e^x + c_2(x+1) + \frac{1}{2}e^x(x_2 - 2).$$

67. $y = c_1 \operatorname{ctg} x + c_2 \frac{1}{\sin x} + x - \frac{1}{2}(x^2 - 2) \operatorname{ctg} x$.

68. $y = c_1 \operatorname{tg} x + c_2 \operatorname{ctg} x + \sin 2x$. **69.** $y = c_1 x^3 + c_2 + \frac{1}{4}x^4$.

70. $y = c_1 x + c_2 \ln x + \frac{1}{2}x^2(\ln x - 2)$. **71.** $y = c_1 x + c_2(x^2 - 1) + \frac{1}{12}x^3(x^2 + 2)$.

72. $y = c_1 e^{-x} + c_2(x-1) + x^2 - 2x + 2$. **73.** $y = c_1 \frac{\sin x}{x} + c_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}$.

74. $y = c_1(x+1) + c_2 e^x - (x^2 + 2x + 2)$.

75. $y = c_1 \operatorname{cth} x + c_2 \frac{1}{\operatorname{sh} x} + \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{2} \operatorname{sh} x$, vagy rendezés után
$y = c_1 \operatorname{cth} x + c_2^* \frac{1}{\operatorname{sh} x} + \frac{1}{2} \operatorname{sh} x$, $(c_2^* = c_2 + 1)$.

76. $y = c_1 \sin x + c_2 \sin^2 x + \sin x \ln \cos x + \sin^2 x \ln \frac{1+\sin x}{\cos x}$.

77. $y = c_1 \sin x + c_2 \sin x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x (\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2})^2$.

78. $y = c_1 x + c_2 \sin x + \cos x$.

79. $y = c_1 \frac{1}{x^2} + c_2 x^3 + x^4$. **80.** $y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2 + x^3$.

81. A megoldást a **T.29.17**-nek megfelelően

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$$

alakban keressük;

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}dx, \quad c_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)}dx, \quad c_3 = \int \frac{W_3(x)}{W(x)}dx,$$

ahol $W(x)$, $W_1(x)$, $W_2(x)$, $W_3(x)$ a **T.29.17**-beli determinánsok. Jelen esetben

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x, \quad W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 2x^2 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 2x^2,$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \sin x \\ 1 & 0 & \cos x \\ 0 & 2x^2 & -\sin x \end{vmatrix} = 2x^2(\sin x - x\cos x),$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & 0 \\ 1 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & 2x^2 \end{vmatrix} = 2x^2(-x\sin x - \cos x).$$

Igy

$$c_1(x) = \int \frac{2x^2}{x}dx = x^2 + c_1,$$

$$c_2(x) = \int \frac{2x^2\sin x - 2x^3\cos x}{x}dx =$$

$$\int (2x\sin x - 2x^2\cos x)dx = -2x^2\sin x - 6x\cos x + 6\sin x + c_2,$$

$$c_3(x) = \int \frac{-2x^3\sin x - 2x^2\cos x}{x}dx =$$

$$\int (-2x^2\sin x - 2x\cos x)dx = 2x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c_3,$$

ahol $c_1, c_2, c_3 \in \mathbf{R}$.
Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1x + c_2\cos x + c_3\sin x + x^3 - 6x,$$

vagy átrendezve

$$y = c_1^*x + c_2\cos x + c_3\sin x + x^3,$$

ahol $c_1^* = c_1 - 6$.

82. $y = c_1 + c_2x + c_3\ln x + x\ln x$.

83. $y = c_1x + c_2\operatorname{ch} x + c_3\operatorname{sh} x - (x^2+2)$.

84. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3x + x^2 + \frac{5}{4}$.

85. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 - \sin x)$.

86. A megoldandó inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását

$$y = Y + y_1$$

alakban keressük. Az inhomogén egyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$Y'' + Y' - 6Y = 0.$$

Ennek általános megoldása:

$$Y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_1 = Ax + B$$

alakban keressük; ekkor $y_1' = A$, $y_1'' = 0$. Az inhomogén egyenletbe behelyettesítve az előző kifejezéseket,

$$A - 6(Ax + B) = x$$

adódik, amelyből $A = -\frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{36}$. Tehát

$$y_1 = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

Igy az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

A kezdeti feltételek szerint (mivel $y' = c_1 e^{2x} - 3c_2 e^{-3x} - \frac{1}{6}$):

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{36} = 0 \quad \text{és} \quad 2c_1 - 3c_2 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{9}.$$

Ezekből $c_1 = \frac{1}{36}$, $c_2 = 0$. A kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = \frac{1}{36}e^{2x} - \frac{1}{6}x - \frac{1}{36}.$$

87. Mivel $Y = e^{-3x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$ és $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$, ezért az általános megoldás:

$$y = e^{-3x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$$

88. $Y = e^{-x}(c_1 + c_2 x)$. Az inhomogén egyenletnek egy partikuláris megoldását $y_1 = A\cos x + B\sin x$ alakban keressük. Az $y_1 y_1'$, y_1'' függvényeket az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve a $2B\cos x - 2A\sin x = \sin x$ azonosság adódik; ebből $B = 0$, $A = -\frac{1}{2}$. Tehát $y_1 = -\frac{1}{2}\cos x$, ezért az általános megoldás:

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x) - \frac{1}{2}\cos x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = c_2 = 2$. Így a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás:

$$y_p = 2(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x.$$

89. Mivel $Y = c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2e^{-\sqrt{3}x} + c_3e^x + c_4e^{-x}$ és (az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_1 = Ae^{\frac{x}{2}}$ alakban keresve) $y_1 = \frac{16}{11}e^{\frac{x}{2}}$, ezért az általános megoldás:

$$y = c_1e^{\sqrt{3}x} + c_2e^{-\sqrt{3}x} + c_3e^x + c_4e^{-x} + \frac{16}{11}e^{\frac{x}{2}}.$$

90. Az általános megoldás:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^x(\frac{1}{2}x^2 + x).$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = 2e^x - e^{-x} + e^x(\frac{1}{2}x^2 + x).$$

91. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x} + 2$. (Közvetlenül is visszavezethető homogén lineárisra $z = y - 2$ helyettesítéssel.)

92. Az általános megoldás:

$$y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^x(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}).$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = -1$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^x(\cos 2x - \sin 2x + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{8}).$$

93. Mivel 2 a karakterisztikus egyenletnek egyszeres gyöke, az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását $y_1 = Axe^{2x}$ alakban keressük. Az általános megoldás: $y = c_1e^{2x} + c_2e^x + 3xe^{2x}$.

94. Egy partikuláris megoldás $y_1 = Ax\cos x + Bx\sin x$ alakban keresendő. Az általános megoldás:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\sin x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \cos x + 2(1 - x)\sin x.$$

95. $y = e^x(c_1 + c_2x) + c_3e^{3x} - \frac{4}{3}x^3e^x$.

96. Az általános megoldás:

$$y = e^{-2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x) + xe^{2x}.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^{-2x}(\cos 3x + 2\sin 3x) + xe^{2x}.$$

97. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-4x} + e^{2x}(2x^2 + 3x + 3)$.

98. $y = c_1e^{4x} + c_2e^{-5x} + \frac{1}{9}e^{-5x}(9x^2 + 2x)$.

99. Az általános megoldás:

$$y = c_1e^x + c_2e^{3x} + 7\operatorname{ch}2x + 8\operatorname{sh}2x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = -5$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^x - 5e^{3x} + 7\operatorname{ch} 2x + 8\operatorname{sh} 2x.$$

100. Az általános megoldás:

$$c_1e^x + c_2e^{-2x} + \sin x - 2\cos x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y_p = 2e^{-2x} + \sin x - 2\cos x.$$

101. Az általános megoldás:

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + 2x\operatorname{sh} 2x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^{2x} + 2x\operatorname{sh} 2x.$$

102. Az általános megoldás:

$$y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + 3x\sin 3x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = c_2 = 1$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \cos 3x + \sin 3x + 3x\sin 3x.$$

103. $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + 12\operatorname{ch}\frac{x}{2} - 8\operatorname{sh}\frac{x}{2}$.

104. Az általános megoldás:

$$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + 2\cos 3x - \sin 3x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 3$. Így a kezdeti feltételeket is teljesítő partikuláris megoldás:

$$y_p = \cos 2x + 3\sin 2x + 2\cos 3x - \sin 3x.$$

105. $y = (c_1 + c_2x)e^{-3x} + 14\operatorname{ch} 2x - 11\operatorname{sh} 2x$.

106. A differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2).$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$y_1 = e^{-x}(A\cos x + B\sin x)$$

alakban keressük. Az y_1 és megfelelő deriváltjainak az inhomogén egyenletbe való behelyettesítése után (az $e^{-x}\cos x$ és $e^{-x}\sin x$ függvények együtthatóinak összehasonlításával nyert lineáris egyenletrendszerből) adódik, hogy $A = 0$, $B = 1$. Így az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 - \sin x).$$

Megjegyezzük, hogy ezt a feladatot az állandók variálásának módszerével is megoldottuk (l. 85.feladat).

107. A differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{3}}.$$

A $6y'' - 5y' + y = 15xe^{2x}$ inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_1 = e^{2x}(x - \frac{19}{15}),$$

a $6y'' - 5y' + y = -2\cos x$ inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása pedig:

$$y_2 = \frac{1}{5}(\cos x + \sin x).$$

Így az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{\frac{x}{3}} + e^{2x}(x - \frac{19}{15}) + \frac{1}{5}(\cos x + \sin x).$$

108. Az általános megoldás:

$$y = e^x(c_1 + c_2 x) + x^2 + 4x + 7 + \frac{12}{25}(4\cos 2x - 3\sin 2x).$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = \frac{2}{25}$, $c_2 = \frac{9}{5}$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^x(\frac{2}{25} + \frac{9}{5}x) + x^2 + 4x + 7 + \frac{12}{25}(4\cos 2x - 3\sin 2x).$$

109. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{5x} + 4\,\mathrm{sh}\,2x - \mathrm{ch}\,2x.$

110. Az általános megoldás:

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + e^{2x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = -\frac{1}{2}$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = e^{4x} - \frac{1}{2}e^{-x} + e^{2x} + \frac{3}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x.$$

111. $y = e^{-5x}(c_1 + c_2 x) + 2x^2 e^{-5x} + 8\cos 3x + 15\sin 3x.$

112. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + e^{-x}(c_3\cos x + c_4\sin x) + 14\,\mathrm{sh}\,2x - 11\,\mathrm{ch}\,2x + x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}.$

113. Az általános megoldás:

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + x^3 - 6x + 2e^{3x}.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = 2$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \cos x + 2\sin x + x^3 - 6x + 2e^{3x}.$$

114. $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + 2\sin x - \cos x - e^{2x}.$

115. $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^{-x} - \cos x - \sin x + 2x^2 - 4x + 8.$

116. A differenciálegyenlet homogén, amely az $x = e^z$ helyettesítéssel az

$$\ddot{y}(z) - 4\dot{y}(z) + 20y(z) = 0$$

konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletté transzformálódik (l. az M 29.25 (2) képletet). Ennek karakterisztikus egyenlete

$$t^2 - 4t + 20 = 0,$$

melynek gyökei $t_1 = 2 + 4i$, $t_2 = 2 - 4i$. Az eredeti (Euler-féle) differenciálegyenlet általános megoldása a $(0, \infty)$ intervallumon tehát:

$$y = x^2(c_1 \cos 4 \ln x + c_2 \sin 4 \ln x).$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 2$, $c_2 = -1$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = x^2(2 \cos 4 \ln x - \sin 4 \ln x).$$

117. A differenciálegyenlet inhomogén, a hozzá tartozó (Euler-féle) homogén differenciálegyenlet:

$$y'' - \frac{3}{x}y' - \frac{21}{x^2}y = 0.$$

Ennek általános megoldása a $(0, \infty)$ intervallumon

$$Y = c_1 x^7 + c_2 x^{-3}.$$

Az eredeti (inhomogén) differenciálegyenlet általános megoldásához a két konstans variálásának módszerét alkalmazzuk. Mivel

$$f(x) = -8x^3, \quad W(x) = -10x^3, \quad W_1(x) = 8, \quad W_2(x) = -8x^{10},$$

ezért $c_1(x) = \frac{2}{5}x^{-2} + c_1$, $c_2(x) = \frac{1}{10}x^8 + c_2$. Ezek felhasználásával az eredeti (inhomogén) differenciálegyenlet általános megoldása a $(0, \infty)$ intervallumon:

$$y = c_1 x^7 + c_2 x^{-3} + \frac{1}{2}x^5.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = 1$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \frac{1}{2}x^7 + x^{-3} + \frac{1}{2}x^5.$$

118. Az $x = e^z$ helyettesítést alkalmazva, az inhomogén differenciálegyenlet a z-től függő $y = y(z)$ függvényre vonatkozó

$$\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = e^{5z}$$

állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletté transzformálódik. Ennek általános megoldása:

$$y(z) = c_1 e^z + c_2 e^{2z} + \frac{1}{12}e^{5z}.$$

Az $e^z = x$-nek megfelelő visszahelyettesítést elvégezve, az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása a $(0, \infty)$ intervallumon:

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2 + \frac{1}{12}x^5.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 3$, $c_2 = -\frac{5}{3}$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = -\frac{5}{3}x^2 + 3x + \frac{1}{12}x^5.$$

119. Mivel a karakterisztikus egyenlet $t^2 - 4t + 1 = 0$, és ennek gyökei $t_1 = 2 + \sqrt{3}$, $t_2 = 2 - \sqrt{3}$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x^2(c_1 x^{\sqrt{3}} + c_2 x^{-\sqrt{3}}).$$

120. A karakterisztikus egyenlet $t^2 + 2t + 5 = 0$, melynek gyökei $t_1 = -1 + 2i$, $t_2 = -1 - 2i$. A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x^{-1}(c_1 \cos 2 \ln x + c_2 \sin 2 \ln x).$$

Mivel a kezdeti feltételekből $c_1 = c_2 = 1$ adódik, ezért a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = x^{-1}(\cos 2 \ln x + \sin 2 \ln x).$$

121. A homogén egyenlet általános megoldása $Y = c_1 x + c_2 x^3$. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását T 29.20 alapján $y_1 = B$ (B: konstans) alakban keressük. A szokásos behelyettesítés és rendezés után azt kapjuk, hogy $B = 4$. Ezért az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása;

$$y = 4 + c_1 x + c_2 x^3.$$

122. A karakterisztikus egyenlet $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$, melynek gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$. A homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 x + c_2 \cos \ln x + c_3 \sin \ln x.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását $y_1 = Ax^{-1}$ alakban keressük. Ezt az inhomogén egyenletbe behelyettesítve $A = -\frac{1}{4}$ adódik, tehát $y_1 = -\frac{1}{4x}$. Az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x + c_2 \cos \ln x + c_3 \sin \ln x - \frac{1}{4x}.$$

123. A karakterisztikus egyenlet $t^3 - 2t + 1 = 0$, melynek gyökei $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t_3 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 x + \frac{1}{\sqrt{x}}(c_2 x^{\frac{\sqrt{5}}{2}} + c_3 x^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}).$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása $y_1 = \frac{1}{2}x^3$. Tehát az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x + \frac{1}{\sqrt{x}}(c_2 x^{\frac{\sqrt{5}}{2}} + c_3 x^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}) + \frac{1}{2}x^3.$$

124. A karakterisztikus egyenlet $3t^3 - 7t^2 + 5t - 1 = 0$, melynek gyökei $t_{1,2} = 1$, $t_3 = \frac{1}{3}$. A homogén differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$Y = x(c_1 + c_2 \ln x) + c_3 \sqrt[3]{x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása $y_1 = -\frac{1}{2x}$, így az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x(c_1 + c_2 \ln x) + c_3 \sqrt[3]{x} - \frac{1}{2x}.$$

125. Mivel a $4t^2 - 36t + 81 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_{1,2} = \frac{9}{2}$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x^{\frac{9}{2}}(c_1 + c_2 \ln x).$$

Mivel a kezdeti feltételekből $c_1 = 5$, $c_2 = -4$ következik, a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = x^{\frac{9}{2}}(5 - 4 \ln x).$$

126. A $t^2 + 12t + 20 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = -2$, $t_2 = -10$. Ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^{10}}.$$

Mivel a kezdeti feltételekből $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, ezért a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^{10}}.$$

127. A differenciálegyenlet $t^2 + 25 = 0$ karakterisztikus egyenletének gyökei $t_1 = 5i$, $t_2 = -5i$. Így az általános megoldás:

$$y = c_1 \cos 5 \ln x + c_2 \sin 5 \ln x.$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 2$, $c_2 = 1$; a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = 2 \cos 5 \ln x + \sin 5 \ln x.$$

128. Mivel a $t^2 - 8t + 17 = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1 = 4 + i$, $t_2 = 4 - i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x^4(c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x).$$

Mivel a kezdeti feltételekből $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, ezért a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = x^4(\cos \ln x - 2 \sin \ln x).$$

129. A karakterisztikus egyenlet $t^2 - 5t + 6 = 0$. Ennek gyökei $t_1 = 3$, $t_2 = 2$. Így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1 x^3 + c_2 x^2.$$

Mivel az inhomogén egyenletnek $y_1 = \frac{1}{2}x^4$ egy partikuláris megoldása, ezért az eredeti inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 + \frac{1}{2}x^4.$$

130. Mivel a $t^2+4=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1=2i$, $t_2=-2i$, ezért a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y=c_1\cos 2\ln x+c_2\sin 2\ln x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a két állandó variálásának módszerével határozzuk meg. Mivel

$$W(x)=\frac{2}{x},\quad W_1(x)=-\frac{2}{x^2}\sin 4\ln x,\quad W_2(x)=\frac{2}{x^2}(1+\cos 4\ln x),$$

ezért

$$c_1(x)=\frac{1}{4}\cos 4\ln x+a_1,\qquad c_2(x)=\ln x+\frac{1}{4}\sin 4\ln x+a_2.$$

Így az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y=a_1^*\cos 2\ln x+a_2\sin 2\ln x+(\ln x)(\sin 2\ln x),$$

ahol $a_1^*=a_1+\frac{1}{4}$.

131. A $t^2-3t+2=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1=2$, $t_2=1$, így a homogén rész általános megoldása

$$Y=c_1x^2+c_2x.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldását a két állandó variálásának módszerével határozzuk meg. Ennek alapján az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y=c_1x^2+c_2x+\frac{1}{6}x^4-x^2\ln x.$$

132. A karakterisztikus egyenlet $t^2-4t+4=0$, melynek $t_{1,2}=2$ kétszeres gyöke. A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y=x^2(c_1+c_2\ln x).$$

Az állandók variálásának módszerével az eredeti egyenlet általános megoldása:

$$y=x^2(c_1+c_2\ln x)+x^3(\ln x-2).$$

133. Mivel a $t^2+2t+1=0$ karakterisztikus egyenletnek $t_{1,2}=-1$ kétszeres gyöke, ezért a homogén rész általános megoldása

$$Y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x).$$

Az állandók variálásának módszerét alkalmazva, az eredeti inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y=\frac{1}{x}(c_1+c_2\ln x)+\frac{1}{25}x^4.$$

134. Mivel a $t^3-2t^2+9t-18=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei $t_1=2$, $t_2=3i$, $t_3=-3i$, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=c_1x^2+c_2\cos 3\ln x+c_3\sin 3\ln x.$$

135. Mivel a $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ karakterisztikus egyenletnek $t_{1,2,3} = 2$ háromszoros gyöke, ezért a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x^2(c_1 + c_2 \ln x + c_3 \ln^2 x).$$

A kezdeti feltételekből $c_1 = 4$, $c_2 = -5$, $c_3 = 2$. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y_p = x^2(4 - 5\ln x + 2\ln^2 x).$$

136. Mivel **T 29.27** szerint

$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 1,$$

$$\mathcal{L}\{y'\} = pY - y(0) = pY,$$

ezért a transzformált egyenlet:

$$(p^2 + 2p + 2)Y = 1.$$

Ebből

$$Y = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Mivel $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+1}\} = \sin x$, ezért a (XIV) képlet alkalmazásával

$$y = \mathcal{L}\{Y\} = e^{-x}\sin x,$$

mely a differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldását adja.

137. A Laplace-transzformáció alkalmazása után (l. **T 29.27** és (II))

$$Y(p) = \frac{1}{p^2(p-1)^2}.$$

Elemi törtekre bontva:

$$Y(p) = \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p-1} + \frac{1}{(p-1)^2}.$$

Visszatranszformálás után megkapjuk a keresett partikuláris megoldást:

$$y = e^x(x-2) + x + 2$$

(l. az (I), (II) és a $(VIII)$ képletet).

138. A transzformált egyenletből

$$Y = \frac{3p}{(p+1)(p-2)} = \frac{1}{p+1} + \frac{2}{p-2}.$$

Az inverz transzformáció után kapott partikuláris megoldás:

$$y = e^{-x} + 2e^{2x}.$$

139. A transzformált egyenletből (elemi törtek összegére való bontás után)

$$Y = \frac{4}{5}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p+2} + \frac{1}{30}\frac{1}{p-4}.$$

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y = \frac{4}{5}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{30}e^{4x}.$$

140. A transzformált egyenletből:

$$Y = -\frac{p}{(p^2+1)(p^2-4p+9)}.$$

Elemi törtekre bontva és átalakítva:

$$Y = -\frac{1}{10}\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{20}\frac{1}{p^2+1} + \frac{1}{10}\frac{p-2}{(p-2)^2+5} - \frac{1}{4\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{(p-2)^2+5},$$

amiből a keresett partikuláris megoldás:

$$y = -\frac{1}{10}\cos x + \frac{1}{20}\sin x + \frac{1}{10}e^{2x}\cos\sqrt{5}x - \frac{1}{4\sqrt{5}}e^{2x}\sin\sqrt{5}x.$$

141. Mivel

$$Y = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + \frac{-2}{(p+1)^2+1} + \frac{4}{(p+1)^2},$$

ezért a keresett partikuláris megoldás:

$$y = e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x + 4xe^{-x}.$$

142. A Laplace-transzformáció alkalmazása után

$$Y = \frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Elemi törtekre bontva:

$$Y = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}\frac{1}{p+1} - \frac{2}{3}\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}.$$

Az inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával megkapjuk a keresett partikuláris megoldást:

$$y = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

143. Mivel $Y = \frac{1}{p(p+1)^3}$, azaz (elemi törtek összegére való bontás után)

$$Y = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{(p+1)^3},$$

ezért inverz Laplace-transzformáció után a keresett partikuláris megoldás:

$$y = 1 - e^{-x}(1 + x + \frac{x^2}{2}).$$

144. A transzformált egyenletből

$$Y = \frac{1}{p(p+1)^2(p-1)^2}.$$

Elemi törtekre bontva:

$$Y=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{(p-1)^2}.$$

Visszatranszformálás után a keresett partikuláris megoldás:

$$y=1-\frac{1}{2}e^{-x}-\frac{1}{2}e^{x}-\frac{1}{4}xe^{-x}+\frac{1}{4}xe^{x}.$$

145. A transzformált egyenlet:

$$(p^4+2p^2+1)Y=\frac{1}{p^2+1}.$$

Ebből

$$Y=\frac{1}{(p^2+1)^3}.$$

A konvolúciótétel felhasználásával

$$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(p^2+1)^3};x\}=\frac{1}{8}(3-x^2)\sin x-\frac{3}{8}x\cos x.$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y=\frac{1}{8}(3-x^2)\sin x-\frac{3}{8}x\cos x.$$

146. A Laplace-transzformáció alkalmazásához vegyünk fel kezdeti feltételeket a következő alakban:

$$y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,\ y''(0)=y_2;$$

y_0, y_1, y_2 lesznek a megoldás paraméterei. A transzformált egyenletből Y-t kifejezve:

$$Y=\frac{(p^2-3p+2)y_0+(p-3)y_1+y_2}{p^3-3p^2+2p}.$$

Elemi törtek összegére való bontás után

$$Y=\frac{2y_0-3y_1+y_2}{2}\frac{1}{p}+(2y_1-y_2)\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}(y_2-y_1)\frac{1}{p-2}.$$

Visszatranszformálás után a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y=\frac{2y_0-3y_1+y_2}{2}+(2y_1-y_2)e^{x}+\frac{1}{2}(y_2-y_1)e^{2x}.$$

A $c_1=\frac{2y_0-3y_1+y_2}{2}$, $c_2=2y_1-y_2$, $c_3=\frac{y_2-y_1}{2}$ jelölésekkel az M29.11-nek megfelelő alakra jutottunk.

147. Legyen $y(0)=y_0$, $y'(0)=y_1$, $y''(0)=y_2$. A transzformált egyenletből

$$Y=\frac{y_0p^2+(-3y_0+y_1)p+3y_0-3y_1+y_2}{(p-1)^3},$$

vagy elemi törtekre bontva

$$Y=\frac{y_0}{p-1}+\frac{y_1-y_0}{(p-1)^2}+\frac{y_0-2y_1+y_2}{(p-1)^3}.$$

Visszatranszformálás után a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_0 e^x + (y_1 - y_0)xe^x + \frac{1}{2}(y_0 - 2y_1 + y_2)x^2 e^x.$$

A konstansok átjelölésével:

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$$

148. Mivel $\mathcal{L}\{y''\} = p^2 Y + 7$ és $\mathcal{L}\{4xy'\} = -4Y - 4pY'$ (Y' az $Y(p)$ függvény p szerinti deriváltját jelöli), ezért a transzformált egyenlet:

$$-4pY' + (p^2 - 8)Y + 7 = 0.$$

Ennek megoldása:

$$Y = -7p^{-2} + kp^{-2} e^{\frac{p^2}{8}},$$

ahol k alkalmasan választott komplex konstans. Mivel $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$, ezért $k = 0$. Így (alkalmazva az inverz Laplace-transzformációt) a differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldása:

$$y = -7x.$$

149. A transzformált egyenlet (rendezés után):

$$Y' = -\frac{p^2 + 48}{16p} Y + \frac{7}{8p^2}$$

alakú elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet, melyet Y-ra megoldva

$$Y = 14p^{-3} + kp^{-3} e^{-\frac{p^2}{32}}$$

adódik, ahol k integrációs állandó. Most a $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$ feltétel tetszőleges k konstans esetén teljesül. A továbbiakban csak a $k = 0$ esettel foglalkozunk, mert a $k \neq 0$ esetben a visszatranszformálás nem vezet elemi függvényhez. A $k = 0$ esetben az inverz Laplace-transzformált

$$y = 7x^2.$$

Behelyettesítve adódik, hogy ez valóban megoldás, és a kezdeti feltételeket is kielégíti.

150. Mivel $\mathcal{L}\{x^2 y''\} = p^2 Y'' + 4pY' + 24$, ezért a transzformált egyenlet:

$$p^2 Y'' + 4pY' = \frac{24}{p^4}.$$

A $Z = Y'$ helyettesítés után Z-re megoldva $Z = -24p^{-5} + k_1 p^{-4}$, melyből $Y = 6p^{-4} + kp^{-3}$. Visszatranszformálás után a keresett partikuláris megoldás:

$$y = x^3 + kx^2$$

tetszőleges valós k-val.

151. A transzformált egyenlet:

$$(p^2 - 1)Y'' + 4(p - 1)Y' = 0.$$

A $Z = Y'$ helyettesítés után Z-re megoldva $Z = \frac{c_1}{(p+1)^4}$, s ebből $Y = \frac{c}{(p+1)^3}$ adódik. A keresett partikuláris megoldás (inverz Laplace-transzformáció alkalmazása után):

$$y = cx^2e^{-x}.$$

152. A transzformált egyenlet

$$(p^2 + 5p)Y'' + (5p + 30)Y' = 0,$$

melyből

$$Y = c(\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^5}).$$

A megoldás tehát:

$$y = cx^3 + cx^4.$$

153. A transzformált egyenlet:

$$-8pY' + (p^2 - 8)Y - 4p = 0.$$

Ebből

$$Y = \frac{4}{p} + k\frac{1}{p}e^{\frac{p^2}{16}}.$$

A $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$ feltétel miatt $k = 0$. Tehát a keresett partikuláris megoldás

$$y = 4.$$

154. A transzformált egyenlet

$$8pY' + (p^2 + 24)Y = \frac{3}{p},$$

melyből

$$Y = 3p^{-3} + kp^{-3}e^{-\frac{p^2}{16}}.$$

A $k = 0$ választással egy partikuláris megoldás:

$$y = \frac{3}{2}x^2.$$

155. A transzformált egyenlet:

$$-2pY' + (p^2 - 6)Y = \frac{6}{p}.$$

Ebből

$$Y = 6p^{-3} + kp^{-3}e^{\frac{p^2}{4}}.$$

A $\lim p \to \infty Y(p) = 0$ feltétel miatt $k = 0$. Inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával kapjuk, hogy a keresett partikuláris megoldás:

$$y = 3x^2.$$

156. A transzformált egyenlet:

$$(p^3+p)Y' - 2Y = -2.$$

Ebből

$$Y = \frac{1}{p^2+1} + k\frac{p^2}{p^2+1}.$$

A $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$ feltétel miatt $k = 0$. Így a megoldás:

$$y = \sin x.$$

157. A transzformált egyenlet:

$$(3p^4+2p^2-1)Y'' + 12(p^3-p)Y' = 0.$$

Az $Y' = Z$ helyettesítéssel elsőrendű differenciálegyenlethez jutunk. Ebből

$$Y' = c\frac{3p^2-1}{(p^2+1)^3}.$$

$p = \operatorname{tg} u$ helyettesítéssel integrálunk. Mivel $\operatorname{tg}^2 u + 1 = \frac{1}{\cos^2 u}$, ezért helyettesítés után az integrandus

$$\frac{3\operatorname{tg}^2 u - 1}{\frac{1}{\cos^4 u}} = 3\sin^2 u\cos^2 u - \cos^4 u$$

lesz. A $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ és a $\sin^2 u = \frac{1}{2}(1-\cos 2u)$ linearizáló formulák (kétszeri) felhasználásával az integrálandó kifejezés a $-\frac{1}{2}(\cos 2u + \cos 4u)$ alakra hozható. Így (az integrálás elvégzése után)

$$Y = -\frac{c}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2u + \frac{1}{4}\sin 4u\right) + k.$$

Átalakítások után

$$Y = -c\sin u\cos^3 u + k = -c\operatorname{tg} u\cos^4 u + k = -c\frac{1}{(\operatorname{tg}^2 u+1)}\operatorname{tg} u + k,$$

vagyis

$$Y = -c\frac{p}{(p^2+1)^2} + k.$$

A $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$ feltétel miatt $k = 0$. Az inverz Laplace-transzformációt alkalmazva Y-ra:

$$y = -c_1 x\sin x.$$

Az $y''(0) = 2$ kezdeti feltételből $c_1 = -1$ adódik, tehát a megoldás:

$$y = x\sin x.$$

158. Vegyünk fel kezdeti feltételeket $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ alakban. A transzformált egyenlet:

$$(p-p^2)Y' + (2-3p)Y + 2y_0 = \frac{2}{p^3}.$$

Ennek megoldása elemi törtekre bontva:

$$Y = \frac{-2-k}{p} + \frac{-2-k}{p^2} - \frac{2}{p^3} + \frac{y_0+2+k}{p-1},$$

amiből (inverz Laplace-transzformáció alkalmazása után):

$$y = -k(x+1) + (y_0+2+k)e^x - (x^2+2x+2).$$

A $c_1 = -k$ és $c_2 = y_0 + 2 + k$ választással:

$$y = c_1(x+1) + c_2e^x - (x^2+2x+2).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy y valóban általános megoldása az eredeti differenciálegyenletnek.

159. Vegyünk fel kezdeti feltételeket $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ alakban. A transzformált egyenlet:

$$p^2Y'' + 4pY' = \frac{2}{p},$$

melynek megoldása:

$$Y = -\frac{1}{p} - \frac{k}{3p^3} + K.$$

A $\lim_{p\to\infty} Y(p) = 0$ feltétel miatt $K = 0$. Inverz Laplace-transzformáció alkalmazásával:

$$y = -1 - k\frac{x^2}{6},$$

ez azonban nem általános megoldás, mert nem kétparaméteres görbesereg egyenlete, és bármely k-ra azt kapjuk, hogy $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$. Az általános megoldás nem határozható meg Laplace-transzformációval.

160. Vegyünk fel kezdeti feltételeket $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ alakban. A transzformált egyenlet:

$$(p^2+1)Y' + y_0 = 0,$$

melyből

$$Y = y_0 \operatorname{arctg} \frac{1}{p}.$$

Visszatranszformálás után (felhasználva, hogy $\mathcal{L}^{-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{p} = \frac{\sin x}{x}$)

$$y = y_0 \frac{\sin x}{x}.$$

Ez a függvény az $x = 0$ pontban nincs értelmezve, az előírt $y(0) = y_0$ kezdeti feltétel helyett azonban a $\lim_{x\to+0} y(x) = y_0$ feltételt teljesíti. Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy ez a függvény megoldása (de nem általános megoldása) a differenciálegyenletnek.

161. Legyen $Y = \mathcal{L}\{y\}$ és $Z = \mathcal{L}\{z\}$. A transzformált egyenletrendszer:

$$p^2Y + Z = -\tfrac{5p}{p^2+4} + p + 1$$
$$Y + p^2Z = \tfrac{5p}{p^2+4} - p + 1.$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert Y-ra és Z-re (pl. Cramer-szabállyal) megoldva azt kapjuk, hogy

$$Y = \frac{-5p}{(p^2+4)(p^2-1)} + \frac{p^2}{(p^2+1)(p-1)} + \frac{1}{(p^2+1)(p-1)},$$

$$Z = \frac{5p}{(p^2+4)(p^2-1)} - \frac{p^2}{(p^2+1)(p+1)} - \frac{1}{(p^2+1)(p-1)}.$$

Visszatranszformálás után kapjuk a keresett partikuláris megoldást:

$$y = \sin x + \cos 2x,$$

$$z = \sin x - \cos 2x.$$

162. Legyen $Y = \mathcal{L}\{y\}$, $Z = \mathcal{L}\{z\}$ és $U = \mathcal{L}\{u\}$. A transzformált egyenletrendszer:

$$(p^2-1)Y + Z + U = p,$$

$$Y + (p^2-1)Z + U = 0,$$

$$Y + Z + (p^2-1)U = 0.$$

Ebből

$$Y = \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1} + \frac{2}{3}\frac{p}{p^2-2},$$

$$Z = U = \frac{1}{3}\frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{3}\frac{p}{p^2-2}.$$

Visszatranszformálás után a keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{3}\cos x + \frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}x,$$

$$z = u = \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}x.$$

163. $y = \cos x$, $z = \sin x$.

164. $y = e^x + e^{2x}$, $z = e^x - e^{2x}$.

165. $y = \frac{1}{4}\operatorname{sh} x + \frac{3}{4}xe^{-x}$, $z = \frac{3}{4}x\operatorname{sh} x$.

166. $y = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 2x$, $z = \frac{2}{3}e^x - \frac{2}{3}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin 2x$.

167. A differenciálegyenlet együtthatófüggvényei konstansok és $f(x) = x$. Ezen függvények mindegyike az egész számegyenesen hatványsorba fejthető (jelen esetben a függvények megegyeznek hatványsorukkal). Legyen

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + \dots \quad .$$

Ekkor

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots \quad .$$

A kezdeti feltételekből $c_0 = 0$. Az y és y' hatványsorának a differenciálegyenletbe való behelyettesítése után

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + \dots = (1+c_1)x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \dots \quad .$$

Az azonos fokszámú tagok együtthatóinak összahasonlításából adódik, hogy

$$c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = \frac{1}{6},\ c_4 = \frac{1}{24}, \dots \ .$$

Észrevehető, hogy $c_n = \frac{1}{n!}$, ha $n \geq 2$. A keresett partikuláris megoldás tehát: $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Mivel $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, ezért

$$y = e^x - x - 1.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy ez megoldása a kezdetiérték-problémának.

168. $y = e^x$.

169. Legyen

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + \dots \ .$$

Ekkor

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + 5c_5 x^4 + \dots \ .$$

Ismeretes, hogy

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(n+1)!} + \dots \ .$$

Ezt, valamint az y és y' hatványsoros alakját behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$c_1 + (2c_2 - c_0)x + (3c_3 - c_1)x^2 +$$

$$(4c_4 - c_2)x^3 + (5c_5 - c_3)x^4 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \ .$$

Ebből és a kezdeti feltételből

$$c_0 = c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{2},\ c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{12},\ c_5 = 0,\ c_6 = \frac{11}{720}, \dots \ .$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{11}{720}x^6 + \dots \ .$$

170. Ismeretes, hogy

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots .$$

Ezt felhasználva a keresett partikuláris megoldás:

$$y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{240}x^6 + \dots \ .$$

171. Ismeretes, hogy

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \ .$$

Ezeket, valamint $\cos x$, y és y' hatványsorát behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$c_1 + (2c_2 + c_0)x + (3c_3 + c_1)x^2 + (4c_4 + c_2 + \frac{1}{3}c_0)x^3 +$$

$$(5c_5 + c_3 + \frac{1}{3}c_1)x^4 + (6c_6 + c_4 + \frac{1}{3}c_2 + \frac{2}{15}c_0)x^5 + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \ .$$

Ebből és a kezdeti feltételből:

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = -\frac{1}{2},\ c_4 = 0,\ c_5 = \frac{1}{24},\ c_6 = 0,\ \ldots\ .$$

A keresett partikuláris megoldás tehát:

$$y = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 + \ldots\ .$$

Az x kiemelése után megsejthetjük, és az eredeti differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel igazolhatjuk, hogy a keresett partikuláris megoldás:

$$y = x\cos x.$$

172. Az

$$xe^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

figyelembevételével a keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{48}x^4 + \frac{1}{40}x^5 + \ldots\ .$$

173. $y = 1 + x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{5}{8}x^4 + \frac{13}{30}x^5 + \ldots$.

174. $y = 1 + x - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{20}x^5 + \ldots$.

175. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^5 + \ldots$.

176. $y = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{90}x^6 + \ldots$.

30. Parciális differenciálegyenletek (megoldások)

1. A **D 30.6**-beli jelölés alapján

$$a(x,y,u)=u,\quad b(x,y,u)=-1,\quad c(x,y,u)=1.$$

Így a karakterisztikus görbék **M 30.11** szerinti differenciálegyenletrendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds}=u(s),\quad \frac{dy(s)}{ds}=-1,\quad \frac{du(s)}{ds}=1.$$

A második és a harmadik egyenlet szétválasztható változójú. Ezeket megoldva

$$y(s)=-s+y_0,\quad u(s)=s+u_0,$$

ahol y_0 és u_0 tetszőleges valós konstansok. Ennek alapján az első differenciálegyenlet

$$\frac{dx(s)}{ds}=s+u_0$$

alakú, melyet (egyszerű integrálással) megoldva

$$x(s)=\frac{s^2}{2}+su_0+x_0;\quad x_0\in\mathbf{R}$$

adódik. Tehát a karakterisztikus görbék vektoregyenlete

$$\mathbf{r}(s)=(\frac{s^2}{2}+su_0+x_0)\mathbf{i}+(-s+y_0)\mathbf{j}+(s+u_0)\mathbf{k}.$$

Ezen görbék valamely rögzített s_0 (pl. $s_0=0$) paraméterű pontja akkor közös a kezdeti görbe t paraméterű pontjával, ha teljesülnek a

$$-t=x(s)_{s=0}=x_0,\quad t=y(s)_{s=0}=y_0,\quad 1=u(s)_{s=0}=u_0$$

összefüggések. Ezekből $x_0=-t$, $y_0=t$ és $u_0=1$. Így az **M 30.14**-nek megfelelő kétparaméteres vektoregyenlet:

$$\mathbf{r}(s,t)=(\frac{s^2}{2}+s-t)\mathbf{i}+(-s+t)\mathbf{j}+(s+1)\mathbf{k},$$

s így az egyenletrendszer:

$$x(s,t)=\frac{s^2}{2}+s-t,\quad y(s,t)=-s+t,\quad u(s,t)=s+1.$$

Az első két egyenletből $s=\sqrt{2(x+y)}$, vagy $s=-\sqrt{2(x+y)}$. Ezeket behelyettesítve a harmadik egyenletbe

$$u=\sqrt{2(x+y)}+1\quad\text{vagy}\quad u=-\sqrt{2(x+y)}+1.$$

(Most a t paraméter kifejezésére nem is volt szükség.) Könnyen ellenőrizhetjük, hogy mindkét függvény megoldása feladatunknak.

Megjegyezzük, hogy az $x(s,t) = \frac{s^2}{2} + s - t$, $y(s,t) = -s + t$ függvények Jacobi-féle determinánsa egyenlő s-sel, ami arra utal, hogy a kezdetiérték-problémának nem csak egy megoldása van (összhangban az előbbiekkel).

2. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds} = y(s), \quad \frac{dy(s)}{ds} = -x(s), \quad \frac{du(s)}{ds} = 2x(s)y(s)u(s).$$

Az első két egyenletből álló differenciálegyenlet-rendszert Laplace-transzformáció alkalmazásával oldjuk meg. Jelölje $X(p)$, illetve $Y(p)$ az $x(s)$, illetve az $y(s)$ függvény Laplace-transzformáltját. Akkor X-re és Y-ra a

$$pX - x_0 = Y$$
$$pY - y_0 = -X$$

algebrai egyenletrendszer adódik. Ebből

$$X(p) = y_0\frac{1}{p^2+1} + x_0\frac{p}{p^2+1}$$

és

$$Y(p) = y_0\frac{p}{p^2+1} - x_0\frac{1}{p^2+1}.$$

Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva:

$$x(s) = y_0 \sin s + x_0 \cos s,$$
$$y(s) = y_0 \cos s - x_0 \sin s.$$

Ezek felhasználásával a harmadik differenciálegyenlet a következő alakú:

$$\frac{du(s)}{ds} = ((y_0^2 - x_0^2)\sin 2s + 2x_0y_0 \cos 2s)u.$$

Ez szétválasztható változójú. Megoldva:

$$u(s) = u_0 e^{\frac{x_0^2-y_0^2}{2}\cos 2s + x_0y_0 \sin 2s}.$$

A kezdeti görbén áthaladó karakterisztikus görbék által alkotott felület egyenletredszere, az

$$x_0 = x(s)_{s=0} = t, \quad y_0 = y(s)_{s=0} = t, \quad u_0 = u(s)_{s=0} = t$$

összefüggések alapján,

$$x(s,t) = t\sin s + t\cos s, \quad y(s,t) = t\cos s - t\sin s, \quad u(s,t) = te^{t^2 \sin 2s}.$$

Az s és t paramétereket x és y segítségével kifejezve:

$$t = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}, \quad s = \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2-y^2}{y^2+x^2}.$$

Ez utóbbi $\sin 2s = \frac{x^2-y^2}{y^2+x^2}$ alakban is írható. Így a kezdetiérték-probléma megoldása

$$u(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}e^{\frac{x^2-y^2}{2}}.$$

Megjegyezzük, hogy az $x(s,t)$ és $y(s,t)$ függvények Jacobi-féle determinánsa egyenlő $-2t$-vel, ami a $t > 0$ feltétel miatt sehol sem nulla. Így a kezdetiérték-problémának csak egy megoldása van, összhangban az előbbi eredménnyel.

3. $u(x,y) = \frac{1}{9}(x + 2y + (2x - 5y)^2)$.

4. $u(x,y) = \frac{7x}{4} - 6e^{\operatorname{arch}\frac{x+4y}{8}}$.

5. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere

$$\frac{dx(s)}{ds} = u(s), \quad \frac{dy(s)}{ds} = x(s)y(s), \quad \frac{du(s)}{ds} = u^2(s) + u(s).$$

Az u-t összetett függvényként $u(s(x))$ alakban keressük. Így

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dx} = \frac{du}{ds}\frac{1}{\frac{dx}{ds}} = \frac{u^2+u}{u} = u + 1.$$

Ez az u-ra nézve szétválasztható változójú differenciálegyenlet; megoldása

$$u(x) = D_0e^x - 1; \quad D_0 \in \mathbf{R}.$$

Ez az $u(x)$ függvény a feladatbeli parciális differenciálegyenletnek is megoldása. Ahhoz, hogy az $u = D_0e^x - 1$ egyenletű felület tartalmazza a feladatban megadott kezdeti görbét, teljesülnie kell a

$$2t - 1 = D_0e^{\ln t} - 1 = D_0t - 1$$

összefüggésnek. Ebből $D_0 = 2$. Így a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$u(x,y) = u(x) = 2e^x - 1.$$

6. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds} = \frac{1}{\cos x}, \quad \frac{dy(s)}{ds} = 1, \quad \frac{du(s)}{ds} = \frac{1}{\sin u};$$

mindegyik egyenlet szétválasztható változójú. A megoldás:

$$x(s) = \arcsin(s + x_0), \quad y(s) = s + y_0, \quad u(s) = \arccos(-s + u_0).$$

Mivel a kezdeti görbe egyenlete $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, ezért

$$x_0 = x(s)_{s=0} = 0, \quad y_0 = y(s)_{s=0} = t, \quad u_0 = u(s)_{s=0} = \cos 2t.$$

Így a kezdeti görbén áthaladó karakterisztikus görbék sokaságának (az integrálfelületnek) kétparaméteres egyenletrendszere:

$$x(s,t) = \arcsin s, \quad y(s,t) = s + t, \quad u(s,t) = \arccos(-s + \cos 2t).$$

Az s és t paraméterek x és y függvényében:

$$s = \sin x, \quad t = y - s = y - \sin x.$$

Így a kezdetiérték-probléma keresett megoldása:

$$u(x,y) = \arccos(-\sin x + \cos(2y - 2\sin x)).$$

7. $u(x,y) = \sqrt[3]{3x}$.

8. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds} = 1, \quad \frac{dy(s)}{ds} = 1, \quad \frac{du(s)}{ds} = 1.$$

Ennek megoldása:

$$x(s) = s + x_0, \quad y(s) = s + y_0, \quad u(s) = s + u_0.$$

Az $\mathbf{r}(s) = (s + x_0)\mathbf{i} + (s + y_0)\mathbf{j} + (s + u_0)\mathbf{k}$ egyenletű karakterisztikus görbe $s = 0$ paraméterű pontja akkor és csak akkor van rajta a kezdeti görbén, ha $x_0 = y_0 = u_0 = t$. Így a kezdeti görbén áthaladó karakterisztikus görbék kétparaméteres sokaságának egyenletrendszere:

$$x(s,t) = s + t, \quad y(s,t) = s + t, \quad u(s,t) = s + t.$$

Mivel az $x(s,t) = s + t$, $y(s,t) = s + t$ függvénytranszformáció Jacobi-féle determinánsa azonosan nulla, ezért a kezdetiérték-problémának végtelen sok megoldása van. (Látható, hogy az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ egyenletű kezdeti görbe maga is karakterisztikus görbe, mégpedig az $x_0 = y_0 = u_0 = 0$ feltétellel.) Az $u(x,y) = ax + (1-a)y$ minden $a \in \mathbf{R}$ esetén megoldása a kezdetiérték-problémának.

9. $u(x,y) = e^x$.

10. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds} = y, \quad \frac{dy(s)}{ds} = x, \quad \frac{du(s)}{ds} = x + y.$$

Az első két differenciálegyenletből álló rendszerből $x(s)$ és $y(s)$ meghatározható. Laplace-transzformációt alkalmazva:

$$pX - x_0 = Y, \quad pY - y_0 = X.$$

Ezekből

$$X(p) = x_0\frac{p}{p^2-1} + y_0\frac{1}{p^2-1}$$

és

$$Y(p) = y_0\frac{p}{p^2-1} + x_0\frac{1}{p^2-1}.$$

Inverz Laplace-transzformációt alkalmazva:

$$x(s) = x_0 \operatorname{ch} s + y_0 \operatorname{sh} s,$$

$$y(s) = y_0 \operatorname{ch} s + x_0 \operatorname{sh} s.$$

Ezeket a kifejezéseket behelyettesítve a harmadik differenciálegyenletbe,

$$\frac{du(s)}{ds} = (x_0 + y_0)e^s + u_0$$

adódik. Ebből

$$u(s) = (x_0 + y_0)e^s + u_0 s.$$

A kezdeti görbén áthaladó karakterisztikus görbék kétparaméteres sokaságának egyenletrendszere:

$$x(s,t) = t\operatorname{ch} s + (t+1)\operatorname{sh} s = te^s + \operatorname{sh} s,$$
$$y(s,t) = (t+1)\operatorname{ch} s + t\operatorname{sh} s = te^s + \operatorname{ch} s,$$
$$u(s,t) = (2t+1)e^s.$$

Mivel az **M 30.14** szerinti Jacobi-féle determináns a jelen feladatban azonosan egyenlő 1-gyel, ezért a kezdetiérték-probléma egyértelműen megoldható. Látható, hogy

$$x + y = 2te^s + \operatorname{ch} s + \operatorname{sh} s = 2te^s + e^s = (2t+1)e^s = u.$$

Így a differenciálegyenletnek a kezdeti görbén is áthaladó megoldása:

$$u(x,y) = x + y.$$

11. A karakterisztikus görbék differenciálegyenlet-rendszere:

$$\frac{dx(s)}{ds} = x, \quad \frac{dy(s)}{ds} = x, \quad \frac{du(s)}{ds} = 1 - x.$$

Ennek megoldása:

$$x(s) = x_0e^s, \quad y(s) = x_0e^s + y_0, \quad u(s) = s - x_0e^s + u_0.$$

A kezdeti görbén áthaladó karakterisztikus görbék kétparaméteres sokaságának egyenletrendszere:

$$x(s,t) = te^s, \quad y(s,t) = te^s - t, \quad u(s,t) = s - te^s + 2t.$$

Mivel $x - y = t$, ezért $\ln\frac{x}{x-y} = s$. Így

$$u(x,y) = \ln\frac{x}{x-y} - x + 2(x-y) = x - 2y + \ln\frac{x}{x-y}.$$

12. Az látható, hogy $y(x,t) \equiv 0$ megoldása a feladatnak. Ezért a továbbiakban feltehetjük, hogy $y(x,t) \not\equiv 0$. Keressük a megoldást $y(x,t) = X(x)T(t)$ szorzatalakban. Ekkor

$$y''_{tt}(x,t) = X(x)T''(t) \quad \text{és} \quad y''_{xx}(x,t) = X''(x)T(t).$$

Behelyettesítve ezeket a kifejezéseket a feladatbeli parciális differenciálegyenletbe, az

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

egyenlet adódik. Mivel $y(x,t) \not\equiv 0$, ezért $\mathbf{R}^2$-nek megadható olyan W résztartománya, ahol $y(x,t)$ sehol sem veszi fel a 0 értéket. A W tartományon a fenti egyenlet ekvivalens az

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{1}$$

egyenlettel. Mivel (1) bal oldala csak x-től, jobb oldala csak t-től függ, ezért az egyenlőség csak úgy állhat fenn, ha mindkét oldala egyenlő valamely λ konstanssal. Ha $\lambda = 0$, akkor $X''(x) = 0$ és $T''(t) = 0$. Ebből viszont $X(x) = Ax + B$ és $T(t) = Ct + D$, azaz

$$y(x,t) = (Ax + B)(Ct + D) \tag{2}$$

következik.
Ha λ pozitív, azaz $\lambda = k^2$ valamely pozitív k valós számmal, akkor (1)-ből az

$$X''(x) - k^2X(x) = 0,$$

$$T''(t) - k^2a^2T(t) = 0$$

közönséges másodrendű differenciálegyenletek adódnak. Ezekből

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx},$$

illetve

$$T(t) = Ce^{kat} + De^{-kat},$$

azaz

$$y(x,t) = (Ae^{kx} + Be^{-xk})(Ce^{kat} + De^{-kat}) \tag{3}$$

következik.
Ha λ negatív, azaz $-k^2$ alakban írható valamely pozitív k konstanssal, akkor (1)-ből az

$$X''(x) + k^2X(x) = 0,$$

$$T''(t) + k^2a^2T(t) = 0$$

közönséges másodrendű differenciálegyenletek adódnak. Ezekből

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx,$$

illetve

$$T(t) = C\cos kat + D\sin kat,$$

azaz

$$y(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(C\cos kat + D\sin kat) \tag{4}$$

következik. Könnyen ellenőrizhető, hogy a (2), a (3) és a (4) szerinti $y(x,t)$ függvények nem csak a W tartományon, hanem az egész $\mathbf{R}^2$-en is megoldásai a feladatbeli parciális differenciálegyenletnek. Ha figyelembe vesszük, hogy az $y(x,t) \equiv 0$ megoldás a (2), a (3) és a (4) alatti megoldások bármelyikéből adódik az $A = B = C = D = 0$ választással, a feladatbeli parciális differenciálegyenlet összes megoldását a (2), a (3) és a (4) szerinti függvények adják tetszőleges A, B, C és D valós konstansokkal.

13. Az előző feladat szerint a feladatbeli parciális differenciálegyenlet általános megoldását a (2), a (3) és a (4) alatti függvények adják. Az $y(x,t) \equiv 0$ függvény eleget tesz a feladatbeli peremfeltételeknek. A továbbiakban az ettől különböző megoldásokat keressük, és ezért feltesszük, hogy C és D közül legalább az egyik nem 0.
Tegyük fel, hogy $y(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$ eleget tesz a peremfeltételeknek. A $0 = y(0,t) = B(Ct + D)$ egyenlőség minden t-re akkor és csak akkor teljesül, ha $B = 0$. Így $y(x,t) = Ax(Ct + D)$. A $0 = y(l,t) = Al(Ct + D)$ egyenlőség pedig minden t-re akkor és csak akkor áll fenn, ha $A = 0$. Így $y(x,t) \equiv 0$, ami ellentmondás.
Tegyük fel, hogy $y(x,t) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})(Ce^{kat} + De^{-kat})$ teljesíti a peremfeltételeket. Akkor $0 = y(0,t) = (A + B)(Ce^{kat} + De^{-kat})$ minden t-re, amiből $B = -A$ következik. Így $y(x,t) = (2A\,\mathrm{sh}\,kx)(Ce^{kat} + De^{-kat})$.
A $0 = y(l,t) = (2A\,\mathrm{sh}\,kl)(Ce^{kat} + De^{-kat})$ minden t-re akkor és csak akkor teljesülhet, ha $2A\,\mathrm{sh}\,kl = 0$, amiből (a $k \neq 0$ figyelembevételével) $A = 0$ következik. Így $y(x,t) \equiv 0$, ami szintén ellentmondás.

Tegyük fel, hogy $y(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(C\cos kat + D\sin kat)$ eleget tesz a peremfeltételeknek. A $0 = y(0,t) = A(C\cos kat + D\sin kat)$ feltétel akkor és csak akkor teljesül minden t-re, ha $A = 0$. Így $y(x,t) = (B\sin kx)(C\cos kat + D\sin kat)$. A $0 = y(l,t) = (B\sin kl)(C\cos kat + D\sin kat)$ feltétel pedig akkor és csak akkor teljesül minden t-re, ha $\sin kl = 0$, amelyből $kl = n\pi$ $(n \in \mathbf{Z})$, azaz $k = \frac{n\pi}{l}$ következik. Mivel k és l pozitívak, ezért $n > 0$. Így az

$$y_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

függvények adják a peremfeltételeknek is eleget tevő megoldásokat tetszőleges pozitív egész n-nel, ahol a_n és b_n tetszőleges valós konstansok. Mivel a feladatbeli parciális differenciálegyenlet homogén lineáris, ezért

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t)$$

is megoldása az eredeti parciális differenciálegyenletnek, feltéve, hogy a jobb oldalon álló függvénysor a

$$V = \{(x,t) \in \mathbf{R}^{(2)} : 0 \le x,t \le l\}$$

halmazon konvergens. Könnyen belátható, hogy a most definiált $y(x,t)$ függvény eleget tesz a peremfeltételeknek is.
A feladat megoldása tehát:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{5}$$

Megjegyezzük, hogy az $a_n = 0$ és $b_n = 0$ választással az $y(x,t) \equiv 0$ megoldás is adódik ebből a formulából.

14. Az előző feladat megoldásában szereplő (5) képlet szerint a parciális differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is kielégítő megoldása:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi at}{l} + b_n \sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

ahol a_n és b_n tetszőleges valós konstansok. Ahhoz, hogy $y(x,t)$ eleget tegyen a kezdeti feltételeknek is, teljesülnie kell a $[0,l]$ intervallumon a következő egyenlőségeknek:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = f(x), \tag{6}$$

$$y_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a b_n}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = 0. \tag{7}$$

A (7) egyenlőség minden x-re csak akkor teljesülhet, ha $b_n = 0$ minden n-re. Az a_n együtthatók meghatározásához terjesszük ki f értelmezését a $[0,l]$ intervallumról először a $[-l,l]$ intervallumra, majd az egész számegyenesre oly módon, hogy legyen

$$f(x) = -f(-x), \quad \text{ha} \quad -l \le x \le 0,$$

és legyen

$$f(x) = f(x + 2kl), \quad \text{ha} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Az így definiált f függvény páratlan, s a (6)-ban szereplő $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$ sor ezen f függvény Fourier-sora (**D 23.26**). Ezek szerint, ha a kezdeti feltételekben szereplő f függvény előállítható Fourier-sorával, akkor a Fourier sor

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{8}$$

együtthatóival képzett

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{9}$$

függvény a feladat megoldása, feltéve, hogy a jobb oldalon álló függvénysor konvergens (a konvergenciára vonatkozóan l. **T 23.29**-et).

15. A **13.** feladat megoldásában szereplő (5) képlet szerint a feladatbeli parciális differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is kielégítő megoldása

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

ahol a_n és b_n tetszőleges valós konstansok. Ahhoz, hogy $y(x,t)$ eleget tegyen a kezdeti feltételeknek is, teljesülnie kell a $[0,l]$ intervallumon a következő egyenlőségeknek:

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = 0, \tag{10}$$

$$y'_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a b_n}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = g(x). \tag{11}$$

A (10) egyenlőség minden x-re csak akkor teljesülhet, ha $a_n = 0$ minden n-re. A b_n együtthatók meghatározásához terjesszük ki g értelmezését a $[0,l]$ intervallumról először a $[-l,l]$ intervallumra, majd az egész számegyenesre oly módon, hogy legyen

$$g(x) = -g(-x), \quad \text{ha} \quad -l \le x \le 0,$$

és legyen

$$g(x) = g(x+2kl), \quad \text{ha} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Az így definiált g függvény páratlan, s a (11)-ben szereplő $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a b_n}{l} \sin\frac{n\pi x}{l}$ sor ezen g függvény Fourier-sora (**D 23.26**). Ha a kezdeti feltételekben szereplő g függvény előállítható Fourier-sorával, akkor a Fourier-sor $\frac{n\pi a b_n}{l}$ együtthatóiból kifejezett

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \tag{12}$$

konstansokkal képzett

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{13}$$

függvény a feladat megoldása, feltéve, hogy a jobb oldalon álló függvénysor konvergens.

16. A **14.** és a **15.** feladatok megoldása alapján triviális.

17. A 14. feladat, illetve a 15. feladat megoldásának (9), illetve (13) képlete szerint, valamint az előző feladat alapján a kezdetiérték-probléma megoldása:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{nt}{5} + b_n \sin\frac{nt}{5}\right) \sin 2nx,$$

ahol a_n az $f(x) = x\cos x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ függvény kiterjesztésével keletkezett π szerint periodikus függvény Fourier együtthatóit, b_n pedig a $g(x) = \sin 2x$ $(0 \le x \le \frac{\pi}{2})$ függvény kiterjesztésével keletkezett, π szerint periodikus függvény Fourier együtthatóiból (az $\frac{nb_n}{5}$ szorzatból) kifejezett értéket jelöli. Így a 14. feladat (8) képlete szerint

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \sin 2nx dx = (-1)^n \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right);$$

illetve a 15. feladat megoldásának (12) képlete szerint

$$b_n = \begin{cases} 5, & \text{ha } n = 1, \\ 0, & \text{ha } n > 1. \end{cases}$$

Tehát

$$y(x,t) = 5\sin\frac{t}{5}\sin 2x + \sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}\right)\cos\frac{nt}{5}\right)\sin 2nx.$$

18. A 14., illetve a 15. feladat megoldásában szereplő (9), illetve (13) képletek, valamint a 16. feladat szerint a megoldás

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{nt}{\sqrt{2}} + b_n \sin\frac{nt}{\sqrt{2}}\right)\sin\frac{nx}{2},$$

ahol a_n az $f(x) = -1 + \cos x$ $(0 \le x \le 2\pi)$, $\frac{nb_n}{\sqrt{2}}$ pedig a $g(x) = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$ függvénynek az egész számegyenesre való kiterjesztésével nyert, 4π szerint periodikus függvények Fourier-együtthatói. Így a fent említett feladatok megoldásában szereplő (8), illetve (12) képletek szerint

$$a_n = \begin{cases} \frac{16}{n(n^2-4)\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros}, \end{cases} \quad \text{és} \quad b_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{ha } n = 2, \\ 0, & \text{egyébként}. \end{cases}$$

Tehát (a páratlan n-eket $2k-1$ alakba átírva)

$$y(x,t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right)\sin x + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16\cos\frac{(2k-1)t}{\sqrt{2}}}{(2k-1)(4k^2-4k-3)\pi}\sin\frac{(2k-1)x}{2}.$$

19. $y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi at}{2}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$

20. $y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-8\cos(2k-1)\pi at}{(2k-1)^3\pi^3} + \frac{8\sin(2k-1)\pi at}{a(2k-1)^4\pi^4}\right)\sin(2k-1)\pi x.$

21. Az ábra alapján $f(x) = -x^2 + \pi x$ $(0 \le x \le \pi)$, a feladat megoldása pedig:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{(2k-1)^3\pi}\cos(2k-1)at + \frac{1}{(2k-1)^2 a\pi}\sin(2k-1)at\right)\sin(2k-1)x.$$

22. A húr kezdeti állapotára vonatkozó feltételek:

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le l,$$
$$y_t'(x,0) = g(x); \quad 0 \le x \le l.$$

A peremfeltételek:

$$y(0,t) = 0 = y(l,t); \quad t \ge 0.$$

Fizikai ismeretek alapján, ha a húr a rezgését mindvégig az xy-síkban végzi és minden pontja a húr nyugalmi helyzetére merőleges egyenes mentén mozog, valamint a húr elég kis darabját véve, a húrdarab hosszának a rezgés közbeni változásától eltekintünk, akkor a keresett $y(x,t)$ függvénynek ki kell elégítenie az

$$y_{tt}''(x,t) - a^2 y_{xx}''(x,t) = 0; \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$$

hiperbolikus másodrendű homogén lineáris parciális differenciálegyenletet. Itt $a^2 = p/\varrho$, ahol ϱ a húr egységnyi hosszúságú darabjának tömegét, p pedig a feszítő erő nagyságát jelöli. Megoldandó tehát az

$$\begin{aligned} &y_{tt}''(x,t) - a^2 y_{xx}''(x,t) = 0, \\ &y(0,t) = y(l,t) = 0; \quad t \ge 0 \\ &y(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le l, \\ &y_t'(x,0) = g(x); \quad 0 \le x \le l \end{aligned} \tag{14}$$

kezdetiérték-probléma.

23. Jelölje $y(x,t)$ a rezgést leíró függvényt.

a) A kezdeti feltétel (az előző feladat megoldásában szereplő (14) képlet szerint):

$$y(x,0) = f(x) \quad \text{és} \quad y_t'(x,0) = g(x); \quad 0 \le x \le 10,$$

ahol

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x, & \text{ha } 0 \le x \le 5; \\ -\frac{1}{5}x + 2, & \text{ha } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

és

$$g(x) \equiv 0.$$

b) A peremfeltételek (14) szerint:

$$y(0,t) = y(10,t) = 0; \quad t \ge 0.$$

A rezgést leíró függvény a **14**. feladat megoldásának (9) képlet alapján

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi a t}{10}\right) \sin \frac{n\pi x}{10}.$$

(Megjegyezzük, hogy $y(x,t)$ jelen feladatbeli alakjának felírásánál már figyelembe vettük a $g(x) \equiv 0$ feltételt.) Az a_n együtthatók a **14**. feladat megoldásának (8) képlete szerint számíthatók, azaz

$$a_n = \frac{1}{5} \int_0^{10} f(x) \sin \frac{n\pi x}{10} dx =$$

$$\frac{1}{5}\left(\int_0^5 \frac{1}{5} x \sin \frac{n\pi x}{10} dx + \int_5^{10} (-\frac{1}{5}x + 2) \sin \frac{n\pi x}{10} dx \right) =$$

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{10}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}+\frac{20}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}+\frac{10}{n\pi}\cos n\frac{\pi}{2}+\frac{20}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}\right)=$$

$$\frac{8}{n^2\pi^2}\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & \text{ha } n=2k,\ k\in\mathbb{N}^+,\\ \frac{(-1)^{k+1}8}{(2k-1)^2\pi^2}, & \text{ha } n=2k-1,\ k\in\mathbb{N}^+.\end{cases}$$

Így a keresett megoldás:

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi at}{10}\right)\sin\frac{(2k-1)\pi x}{10}.$$

24. A húr rezgését leíró függvény:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin nat)\sin nx,$$

ahol $a=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}$ és nab_n a $\sin x$ függvény n-edik Fourier-együtthatója. Mivel a $\sin x$ függvény Fourier-sora önmagával egyenlő, ezért $ab_1=1$ és $nab_n=0$, ha $n>1$; tehát

$$y(x,t)=\left(\frac{1}{a}\sin at\right)\sin x.$$

25. Jelölje $y(x,t)$ a rezgést leíró függvényt!

a) A kezdeti feltétel:

$$y(x,0)=f(x)\quad \text{és}\quad y_t'(x,0)\equiv 0;\quad 0\le x\le 4,$$

ahol

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } 0\le x\le 1,\\ -x+2, & \text{ha } 1\le x\le 2,\\ 0, & \text{ha } 2\le x\le 4.\end{cases}$$

A peremfeltétel:

$$y(0,t)=y(4,t)=0;\quad t\ge 0.$$

b) A rezgést leíró függvénysor:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{16}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{4}\right)\left(1-\cos\frac{n\pi}{4}\right)\cos\frac{n\pi at}{4}\right)\sin\frac{n\pi x}{4}.$$

26. A megoldás a **14.** feladat megoldásában szereplő (9) képlet szerint

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{nat}{3}\right)\sin\frac{nx}{3}$$

alakú, ahol $a=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}=2$ és a_n a (8) szerint számítható, figyelembe véve, hogy

$$f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } 0\le x\le \pi,\\ \pi, & \text{ha } \pi\le x\le 2\pi,\\ -x+3\pi, & \text{ha } 2\pi\le x\le 3\pi.\end{cases}$$

Az integrálás elvégzése után:

$$a_n=\left(\frac{9}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right).$$

Így a rezgést leíró függvénysor:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{9}{n^2}\sin\frac{n\pi}{3}\right)\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\right)\cos\frac{2nt}{3}\right)\sin\frac{nx}{3}.$$

27. Igazolható, hogy $y(x,t)$ eleget tesz az

$$y''_{tt}(x,t)-a^2y''_{xx}(x,t)=0$$

parciális differenciálegyenletnek, valamint az

$$y(0,t)=y(l,t)=0;\quad t\geq 0$$

peremfeltételeknek és az

$$y(x,0)=f(x),\quad y'_t(x,0)=g(x);\quad 0\leq x\leq l$$

kezdeti feltételeknek. Tehát a rúd longitudinális rezgéseit a mindkét végén befogott húr rezgésénél tárgyalt parciális differenciálegyenlet-típus írja le. Így a megoldás:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

ahol az a_n és b_n együtthatók a (8), illetve a (12) képlettel számíthatók ki.

28. A keresett függvény az előző feladat szerint (az $y'_t(x,0)=g(x)=0$ feltételt figyelembe véve):

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\sqrt{3}t)\sin nx,$$

ahol

$$a_n=\begin{cases}0, & \text{ha } n \text{ páros,}\\ \frac{8}{\pi n^3}, & \text{ha } n \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Tehát a megoldás

$$y(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\cos(2k-1)\sqrt{3}t\right)\sin(2k-1)x.$$

29. Az $y(x,t)\equiv 0$ függvény megoldása a feladatnak. A továbbiakban feltehetjük, hogy $y(x,t)\not\equiv 0$. A megoldást $y(x,t)=X(x)T(t)$ szorzatalakban keresve, a vizsgált parciális differenciálegyenlet behelyettesítés után a következő alakú lesz:

$$X(x)T'(t)=\frac{1}{a^2}X''(x)T(t).$$

Mivel $y(x,t)\not\equiv 0$, ezért az $\mathbf{R}^2$-nek van olyan W résztartománya, ahol $y(x,t)\neq 0$. Ezen a tartományon a vizsgált egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=a^2\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Mivel ezen egyenlet bal oldala csak x-től, jobb oldala pedig csak t-től függ, ezért az egyenlőség csak úgy állhat fenn a W tartomány minden pontjára, ha az egyenlet mindkét oldalán álló kifejezés ugyanazzal a λ konstanssal egyenlő. Ezért egyenletünkből a következő két közönséges differenciálegyenlet adódik:

$$X''(x)-\lambda X(x)=0,$$

$$T'(t) - \frac{\lambda}{a^2}T(t) = 0.$$

Ha $\lambda = 0$, akkor $X(x) = bx + c$ és $T(t) = d$, ahol b, c és d valós számok. Ebben az esetben tehát

$$y(x,t) = Ax + B,$$

ahol $A = bd$ és $B = cd$.
Ha $\lambda > 0$ és így $\lambda = k^2$ valamely $k > 0$ valós számmal, akkor a két közönséges differenciálegyenlet a következő alakú:

$$X''(x) - k^2X(x) = 0,$$

$$T'(t) - \frac{k^2}{a^2}T(t) = 0.$$

Ezek általános megoldása:

$$X(x) = be^{kx} + ce^{-kx},$$

illetve

$$T(t) = de^{\frac{k^2t}{a^2}}.$$

Ebben az esetben tehát

$$y(x,t) = (Ae^{kx} + Be^{-kx})e^{\frac{k^2t}{a^2}},$$

ahol $A = bd$ és $B = cd$.
Ha $\lambda < 0$, azaz $\lambda = -k^2$ valamely pozitív k-val, akkor a két közönséges differenciálegyenlet:

$$X''(x) + k^2X(x) = 0,$$

$$T'(t) + \frac{k^2}{a^2}T(t) = 0.$$

Ezek általános megoldása:

$$X(x) = b\sin kx + c\cos kx,$$

illetve

$$T(t) = de^{-\frac{k^2t}{a^2}}.$$

Ebben az esetben tehát

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)e^{-\frac{k^2t}{a^2}},$$

ahol $A = bd$ és $B = cd$. Látható, hogy a W tartományon megoldásként adódó függvények az $\mathbf{R}^2$-en is megoldásai a parciális differenciálegyenletnek.

30. A **13**. feladat megoldásához hasonlóan megmutatható, hogy a feladatbeli parciális differenciálegyenletnek az előző feladat szerinti megoldásai közül csak a $\lambda < 0$ esethez tartozó

$$y(x,t) = (A\sin kx + B\cos kx)e^{-\frac{k^2t}{a^2}}$$

függvény teljesíti a peremfeltételeket, s ez is csak a $B=0$ feltétel mellett, azaz, ha $y(x,t)$ a következő alakú:

$$y(x,t)=(A\sin kx)e^{-\frac{k^2t}{a^2}}.$$

Megjegyezzük, hogy az $A=0$ választással az $y(x,t)\equiv 0$ triviális megoldás adódik. A $0=y(l,t)=(A\sin kl)e^{-\frac{k^2t}{a^2}}$ peremfeltétel pedig akkor és csak akkor teljesül minden t-re, ha $\sin kl=0$, azaz $kl=n\pi$ valamely pozitív egész n-re. Így a feladat (n-től is függő megoldásai):

$$y_n(x,t)=\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2t}.$$

Mivel a feladatbeli parciális differenciálegyenlet homogén, ezért az

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2t} \tag{15}$$

függvény is megoldása a parciális differenciálegyenletnek. Könnyen ellenőrizhető, hogy a most definiált $y(x,t)$ függvény kielégíti a peremfeltételeket is. Így ez adja a feladat megoldását.

31. A megoldást $y(x,t)=v(x)+w(x,t)$ összeg formájában keressük, ahol a v függvény csak az x helytől függ. Válasszuk v-t és w-t úgy, hogy külön-külön kielégítsék az $y_t'(x,t)-\frac{1}{a^2}y_{xx}''(x,t)=0$ parciális differenciálegyenletet. Behelyettesítve a parciális differenciálegyenletbe v-t és w-t, a következő differenciálegyenletek adódnak:

$$0=\frac{1}{a^2}v''(x),\quad \text{illetve}\quad w_t'(x,t)=\frac{1}{a^2}w_{xx}''(x,t).$$

Az első differenciálegyenlet megoldása: $v(x)=Ax+B$, ahol A és B valós számok. Az A és B integrációs állandókat úgy válasszuk meg, hogy v-re a peremfeltételek teljesüljenek, azaz $v(0)=y_1$ és $v(l)=y_2$ legyen. Ekkor $y_1=B$ és $y_2=Al+B$, melyekből $B=y_1$ és $A=\frac{y_2-y_1}{l}$ adódik. A differenciálegyenletet és a peremfeltételeket kielégítő függvény tehát

$$v(x)=\frac{y_2-y_1}{l}x+y_1. \tag{16}$$

A $w(x,t)$ függvény meghatározásánál a $w(0,t)=y(0,t)-v(0)=y_1-y_1=0$, és a $w(l,t)=y(l,t)-v(l)=y_2-y_2=0$ peremfeltételeket kell figyelembe vennünk. Így az előző feladat (15) képlete szerint

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2t}. \tag{17}$$

A feladat megoldása tehát:

$$y(x,t)=\frac{y_2-y_1}{l}x+y_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2t}. \tag{18}$$

32. A **30.** feladat megoldásának (15) képlete szerint a parciális differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is teljesítő megoldása

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2t}.$$

Ahhoz, hogy ez a függvény eleget tegyen a kezdeti feltételnek is, teljesülni kell az alábbi egyenlőségnek minden $x \in [0,l]$-re:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Az egyenlőség jobb oldalán annak a $2l$ szerint periodikus páratlan függvénynek a Fourier-sora áll, amely függvénynek a $[0,l]$ intervallumra való leszűkítése megegyezik az f függvénnyel. Így az a_n együtthatók ennek a függvénynek Fourier-együtthatói, azaz a **14.** feladat megoldásának (8) képlete szerint

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

A feladat megoldása tehát az ezen együtthatókkal felírt, a **30.** feladat megoldásában szereplő (15) képletnek megfelelő

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t} \tag{19}$$

függvénysor, feltéve, hogy ez a $[0,l]$ intervallumon konvergens.

33. A **31.** feladat szerint a parciális differenciálegyenletnek a peremfeltételeket is teljesítő megoldása:

$$y(x,t) = v(x) + w(x,t),$$

ahol ((16) és (17) szerint)

$$v(x) = \frac{y_2 - y_1}{l} x + y_1, \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t}.$$

Az $y(x,t)$ függvény akkor és csak akkor teljesíti a kezdeti feltételt, ha $w(x,t)$ (amellett, hogy megoldása a feladatbeli parciális differenciálegyenletnek a $w(0,t) = 0$, $w(l,t) = 0$ peremfeltételek mellett) teljesíti a következő kezdeti feltételt is:

$$w(x,0) = y(x,0) - v(x) = f(x) - v(x); \quad 0 \le x \le l.$$

Így az előző feladat megoldásának (19) képlete szerint a $w(x,t)$ fenti alakjában szereplő a_n együtthatók az $f-v$ függvénynek az egész számegyenesre (a korábban leírtak szerint) való kiterjesztésével keletkezett, $2l$ szerint periodikus és páratlan függvény Fourier-együtthatóit jelölik. A megoldás tehát a (18) szerinti

$$y(x,t) = \frac{y_2 - y_1}{l} x + y_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t}$$

függvény, ahol

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \frac{y_2 - y_1}{l} x - y_1\right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \tag{20}$$

34. A megoldás a **32.** feladat megoldásának (19) képlete szerint

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi x}{10}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{10\sqrt{3}}\right)^2 t},$$

ahol az a_n együtthatók (a **23**. feladat felhasználásával) a következők:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k, k \in \mathbf{N}^+, \\ (-1)^{k+1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi}, & \text{ha } n = 2k-1, k \in \mathbf{N}^+. \end{cases}$$

Így a megoldás:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{k+1}\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{10}\right)e^{-\frac{((2k-1)\pi)^2}{300}t}.$$

35. A **18**. feladat felhasználásával:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k, \ k \in N^+, \\ \frac{16}{n(n^2-4)\pi}, & \text{ha } n = 2k-1, \ k \in N^+. \end{cases}$$

Ezért a megoldás a következő alakba írható:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{16}{(2k-1)(4k^2-4k-3)\pi}\sin\frac{(2k-1)x}{2}\right)e^{-25(2k-1)^2 t}.$$

36. $y(x,t) = \frac{x}{\pi} + e^{-t}\sin x.$

37. $y(x,t) = x + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{400}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\pi x\right)e^{-(2k-1)^2\pi^2 t}.$

38. Helyezzük el a rudat az xy-síkbeli derékszögű koordináta-rendszer x-tengelyén. A rúd keresztmetszetének nagysága a vizsgálat eredményét nem befolyásolja, ezért a rudat azonosíthatjuk a $[0,l]$ intervallummal. A rúd egyes pontjainak az időben változó hőmérsékletét kétváltozós

$$y = y(x,t); \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0$$

függvénnyel lehet megadni, amelyben x a szóban forgó pontnak az origótól való távolságát jelöli, a t pedig azt mutatja meg, hogy mennyi idő telt el a megfigyelés kezdetétől a vizsgálat időpontjáig. A $t = 0$ időpillanatban fennálló hőmérséklet-eloszlást valamely

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le l \tag{21}$$

kezdeti feltétellel adjuk meg. Továbbá, mivel a vizsgálat közben a rúd mindkét végét 0 fokon tartjuk, érvényesek az

$$y(0,t) = 0, \quad y(l,t) = 0; \quad t \ge 0 \tag{22}$$

peremfeltételek is.
Hőtani megfontolások alapján keresendő az

$$y'_t(x,t) - \frac{1}{a^2}y''_{xx}(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet kielégítő azon $y(x,t)$ függvény, amely a (21) kezdeti feltételnek és a (22) peremfeltételeknek eleget tesz. Az $\frac{1}{a^2}$ hőmérsékletvezetési tényező a $\frac{\lambda}{c\varrho}$ hányadossal egyenlő, ahol λ a rúd hővezetési együtthatója, c a fajhő, ϱ pedig a rúd anyagának sűrűsége. A keresett függvény tehát (19) szerint

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{la}\right)^2 t},$$

ahol az a_n együtthatók a (8) szerint számíthatók, azaz

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

39. Meg kell oldanunk az

$$y_t'(x,t) - \frac{1}{4}y_{xx}''(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(x,0) = \sin x; \quad 0 \le x \le \pi$$

kezdeti feltétel és az

$$y(0,t) = y(\pi,t) = 0; \quad t \ge 0$$

peremfeltételek mellett. A megoldás az előző feladat szerint

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin nx)e^{-(\frac{n}{2})^2 t},$$

ahol az a_n együtthatók jelenleg a $\sin x$ függvény Fourier-együtthatói (így $a_1 = 1$ és $a_n = 0$, ha $n \ge 2$). A megoldás tehát:

$$y(x,t) = (\sin x)e^{-\frac{1}{4}t}.$$

40. a) $y(x,t) = \frac{8c}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2k-1)^3}\sin(2k-1)\frac{\pi x}{l}\right)e^{-\left(\frac{(2k-1)\pi}{al}\right)^2 t}$.

b) $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-(\frac{n\pi}{al})^2 t}$.

41. Meg kell oldanunk az

$$y_t'(x,t) - \frac{1}{a^2}y_{xx}''(x,t) = 0$$

parabolikus homogén lineáris másodrendű parciális differenciálegyenletet az

$$y(0,t) = y_1, \quad y(l,t) = y_2; \quad t \ge 0$$

peremfeltételek és az

$$y(x,0) = f(x); \quad 0 \le x \le l$$

kezdeti feltétel mellett, ahol f a $(0,l)$ intervallumon folytonos és korlátos függvény. A megoldás a **33.** feladat szerint $y(x,t) = v(x) + w(x,t)$ alakú, ahol

$$v(x) = \frac{y_2 - y_1}{l}x + y_1, \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)e^{-(\frac{n\pi}{la})^2 t};$$

az utóbbiban az a_n-ek az $f - v$ függvény szokásos kiterjesztésével keletkezett $2l$ szerint periodikus páratlan függvény Fourier-együtthatói. Tehát ((20) szerint)

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \left(f(x) - \frac{y_2 - y_1}{l}x - y_1\right)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

42. Az $y_t'(x,t) - y_{xx}''(x,t) = 0$ parciális differenciálegyenletnek azt az $y(x,t)$ megoldását keressük, amely eleget tesz az $y(0,t) = -120$, $y(10,t) = -20$ $(t \ge 0)$ peremfeltételeknek és az $y(x,0) = 0$ $(0 < x < 10)$ kezdeti feltételnek. A megoldás az előző feladat szerint $y(x,t) = v(x) + w(x,t)$ alakú. Esetünkben $v(x) = 10x - 120$. Ekkor $f(x) - v(x) = 120 - 10x$, és így

$$a_n = \frac{20}{n\pi}(12 + 2(-1)^{n+1}).$$

Tehát

$$y(x,t) = 10x - 120 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{20}{n\pi}(12 + 2(-1)^{n+1})\sin\frac{n\pi x}{10}\right)e^{\left(\frac{n\pi}{10}\right)^{-2}t}.$$

43. Esetünkben az

$$y'_t(x,t) - y''_{xx}(x,t) = 0$$

parciális differenciálegyenletnek azt az $y(x,t)$ megoldását keressük, amely eleget tesz az $y(0,t) = 0$, $y(10,t) = -1$ $(t \geq 0)$ peremfeltételeknek, és az $y(x,0) = 100$ $(0 < x < 10)$ kezdeti feltételnek. A megoldás a **41.** feladat mintájára: $y(x,t) = v(x) + w(x,t)$ alakú; esetünkben

$$v(x) = -\frac{1}{10}x \quad \text{és} \quad w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sin\frac{n\pi x}{10}\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{10}\right)^2 t},$$

ahol (a **33.** feladat (20) képletének felhasználásával)

$$a_n = \frac{2}{10}\int_0^{10}(100 + \frac{1}{10}x)\sin\frac{n\pi x}{10}dx = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ \frac{402}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

44. Megoldandó az

$$y'_t(x,t) - y''_{xx}(x,t) = 0$$

parciális differenciálegyenlet az $y(0,t) = -10$, $y(10,t) = 10$ $(t \geq 0)$ peremfeltételek és az $y(x,0) = 2x - 10$ $(0 < x < 10)$ kezdeti feltétel mellett. A megoldás a **33.** feladat szerint $y(x,t) = v(x) + w(x,t)$ alakú. Esetünkben $v(x) = 2x - 10$, és ezért $f(x) - v(x) = 0$ $(0 \leq x \leq 10)$, azaz $w(x,t) \equiv 0$. A feladat megoldása tehát:

$$y(x,t) = v(x) = 2x - 10.$$

45. $u(x,y) \equiv 0$ megoldása a feladatnak. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $u(x,y) \not\equiv 0$. A megoldást $u(x,y) = X(x)Y(y)$ szorzatalakban keresve, feltehetjük, hogy $\mathbf{R}^2$-nek van olyan W résztartománya, ahol $u(x,y) \neq 0$. Ezen a tartományon a kétdimenziós Laplace-egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Mivel ezen egyenlet bal oldala csak y-tól, jobb oldala pedig csak x-től függ, ezért van olyan λ valós konstans, hogy az egyenlet mindkét oldala egyenlő λ-val. Ez az $Y(y)$-ra és az $X(x)$-re a következő közönséges másodrendű differenciálegyenletek teljesülését jelenti:

$$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

és

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Ha $\lambda = 0$, akkor $Y(y) = Ay + B$ és $X(x) = Cx + D$. Ekkor

$$u(x,y) = (Ay + B)(Cx + D).$$

Ha $\lambda > 0$, és így $\lambda = k^2$ valamely pozitív k számmal, akkor a fenti közönséges differenciálegyenletek a következő alakba írhatók:

$$Y''(y) - k^2 Y(y) = 0$$

és

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0.$$

Ezek általános megoldása:

$$Y(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky},$$

illetve

$$X(x) = C \sin kx + D \cos kx.$$

Ebben az esetben tehát

$$u(x, y) = (Ae^{ky} + Be^{-ky})(C \sin kx + D \cos kx).$$

Ha $\lambda < 0$, azaz $\lambda = -k^2$ valamely pozitív k-val, akkor az $Y(y)$-ra és az $X(x)$-re felírt fenti közönséges differenciálegyenletek a következő alakúak lesznek:

$$Y''(y) + k^2 Y(y) = 0$$

és

$$X''(x) - k^2 X(x) = 0.$$

Ezek általános megoldása:

$$Y(y) = A \sin ky + B \cos ky,$$

illetve

$$X(x) = Ce^{kx} + De^{-kx}.$$

Ebben az esetben tehát

$$u(x, y) = (A \sin ky + B \cos ky)(Ce^{kx} + De^{-kx}).$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy mindhárom esetben az $u(x, y)$ függvény megoldása a kétdimenziós Laplace-egyenletnek nemcsak a W-n, hanem $\mathbb{R}^2$-en is. Ha ezen esetekben a konstansok mindegyikét nullának választjuk, akkor az $u(x, y) \equiv 0$ megoldáshoz jutunk, ezért a továbbiakban a feladatbeli parciális differenciálegyenlet megoldásait tekinthetjük ezen utóbbi három alak valamelyikének megfelelő formában, tetszőleges A, B, C és D paraméterválasztást megengedve.

46. Az előző feladat szerint a kétdimenziós Laplace-egyenlet megoldása vagy $u(x, y) = (Ay + B)(Cx + D)$, vagy $u(x, y) = (Ae^{ky} + Be^{-ky})(C \sin kx + D \cos kx)$, vagy
$u(x, y) = (A \sin ky + B \cos ky)(Ce^{kx} + De^{-kx})$ alakú. Mivel az $u(x, y) \equiv 0$ függvény megoldása a feladatnak, ezért a továbbiakban az ettől különböző megoldásokat keressük, és így feltehetjük, hogy $C \neq 0$ és $D \neq 0$.
Egy $u(x, y) = (Ay + B)(Cx + D)$ függvény akkor és csak akkor teljesíti az $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ feltételt minden $x \in [0, a]$-ra, ha $A = B = 0$, azaz, ha $u(x, y) \equiv 0$. Ez viszont ellentmondás.
Hasonlóan, az $u(x, y) = (Ae^{ky} + Be^{-ky})(C \sin kx + D \cos kx)$ függvény akkor és csak

akkor teljesiti az előbbi feltételt, ha $A = B = 0$, azaz, ha $u(x,y) \equiv 0$. Ez ismét ellentmond az $u(x,y) \not\equiv 0$ feltételnek.
Vizsgáljuk meg a harmadik esetet. Tegyük fel, hogy az $u(x,y) = (A \sin ky + B \cos ky)(Ce^{kx} + De^{-kx})$ teljesíti az $u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0$ feltételt minden $x \in [0,a]$ és $y \in [0,b]$ esetén. Akkor $B = 0$ (tehát feltehető, hogy $A \neq 0$), $D = -C$ és ($A \neq 0$ miatt) $\sin kb = 0$, azaz $kb = n\pi, n \in \mathbb{N}^+$. Ekkor minden n-re az

$$u_n(x,y) = \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

függvények a kétdimenziós Laplace-egyenlet azon megoldásait adják, amelyek eleget tesznek az $u(x,0) = u(x,b) = u(0,y) = 0$ feltételeknek is. Mivel a vizsgált parciális differenciálegyenlet homogén, ezért az

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}\right) \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{23}$$

függvény is megoldása a Laplace-egyenletnek, és teljesíti az előbbi feltételeket is. Határozzuk meg az E_n együtthatókat úgy, hogy az imént definiált $u(x,y)$ függvény teljesítse az $u(a,y) = g(y)$ $(0 \leq y \leq b)$ feltételt is. Ehhez fenn kell állni a

$$g(y) = u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

egyenlőségnek, melynek jobb oldala úgy tekinthető, mint annak a $2b$ szerint periodikus páratlan függvénynek a Fourier-sora, melynek a $[0,b]$ intervallumra való leszűkítése egyenlő a g függvénnyel. Így

$$E_n = \frac{2}{b \operatorname{sh} \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \tag{24}$$

Ebből E_n-t kifejezve és a (23)-ba beirva adódik feladatunk megoldása.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \operatorname{sh} \frac{n\pi x}{b}\right) \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{25}$$

47. Az előző feladat megoldásának (25) képlete szerint

$$E_n = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{3n\pi}{2}} \int_0^2 t_0 \sin \frac{n\pi y}{2} dy = \frac{2t_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{3n\pi}{2}} (1 - (-1)^n) =$$

$$\begin{cases} \frac{4t_0}{n\pi \operatorname{sh} \frac{3n\pi}{2}}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

Így a feladat megoldása (a (25) képlet szerint):

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4t_0}{(2n-1)\pi \operatorname{sh} \frac{3(2n-1)\pi}{2}} \operatorname{sh} \frac{(2n-1)\pi x}{2}\right) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2}.$$

48. $u(x,y) = \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \pi} \operatorname{sh} x\right) \sin y.$

49. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi \operatorname{sh} n\pi} \operatorname{sh} n\pi x\right) \sin n\pi y.$

50. $u(x,y) \equiv 0.$

51. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{(2n-1)^3\pi^3 \operatorname{sh}(2n-1)\pi} \operatorname{sh}(2n-1)\pi x \right) \sin(2n-1)\pi y.$

52. Az feladat előtti szövegben szereplő képlet szerint a feladat megoldása:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(F_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2},$$

ahol

$$F_n \operatorname{sh} n\pi = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$\int_0^1 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_1^2 (-x+2) \sin \frac{n\pi x}{2} dx =$$

$$= \begin{cases} \frac{8}{n^2\pi^2}, & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\frac{8}{n^2\pi^2}, & \text{ha } n = 4k-1. \end{cases}$$

Így

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi^2} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k+1)^2 \operatorname{sh}(4k+1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(4k+1)\pi y}{2} \right) \sin \frac{(4k+1)\pi x}{2} -$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k-1)^2 \operatorname{sh}(4k-1)\pi} \operatorname{sh} \frac{(4k-1)\pi y}{2} \right) \sin \frac{(4k-1)\pi x}{2} \Big).$$

53. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi \operatorname{sh} 2n\pi} (\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1}) \operatorname{sh} 2ny \right) \sin 2nx.$

54. $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{8}{(2k-1)\pi \operatorname{sh}(4k-2)\pi} \operatorname{sh}(2k-1)\pi y \right) \sin(2k-1)\pi x.$

55. $u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-8}{(2k-1)^3\pi^3 \operatorname{sh}(2k-1)\pi} \operatorname{sh}(2k-1)\pi y \right) \sin(2k-1)\pi x.$

56. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_n \operatorname{sh} n\pi y) \sin n\pi x$, ahol

$$F_n \operatorname{sh} n\pi = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páros}, \\ \frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k+1, \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{2}{n\pi}, & \text{ha } n = 4k-1. \end{cases}$$