LINEÁRIS ALGEBRA

Matematika A2a

NAGY ATTILA

Egyetemi jegyzet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra és Geometria Tanszék

2025

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
mérnökhallgatói számára meghirdetett
Matematika A2a című tantárgy
általam tartott előadásainak lineáris algebrával kapcsolatos anyagát tartalmazza.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ha F jelöli az egész számok, a racionális számok, a valós számok, vagy a komplex számok halmazának valamelyikét, akkor az F halmazon az összeadás és a szorzás a következő alaptulajdonságokkal rendelkezik:

(1) Az összeadás asszociatív: minden $a, b, c \in F$ elem esetén $(a+b)+c = a+(b+c)$.

(2) F-ben van egy 0-val jelölt nullelem: minden $a \in F$ elemre $a+0 = 0+a = a$ teljesül.

(3) F minden a elemének van F-ben $-a$-val jelölt ellentettje: $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

(4) Az összeadás kommutatív: minden $a, b \in F$ elem esetén $a+b = b+a$.

(5) A szorzás asszociatív: minden $a, b, c \in F$ elemre $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ teljesül.

(6) A szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve: minden $a, b, c \in F$ elem esetén $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ és $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

(7) A szorzás kommutatív: minden $a, b \in F$ elemre $a \cdot b = b \cdot a$ teljesül.

(8) F-ben van egy 1-gyel jelölt egységelem: minden $a \in F$ elemre $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ teljesül.

Az egész számokra nem, de a racionális számokra, a valós számokra és a komplex számokra az alábbi tulajdonság is érvényes:

(9) F minden nem nulla a elemének van F-ben a^{-1}-gyel jelölt inverze (más néven: reciproka): $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Egy olyan nem üres halmazra, amin értelmezve van legalább egy művelet, **algebrai struktúra** néven szoktunk hivatkozni. Ha például A jelöl egy nem üres halmazt, $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$ pedig az A-n értelmezett műveletek jelei, akkor A-t, mint ezen műveletek szerinti algebrai struktúrát $(A; +, \cdot, *, \circ)$ módon jelöljük. Az algebrai struktúrák vizsgálatával az algebra egyik részterülete, az un. modern algebra foglalkozik. Modern algebrai szóhasználattal élve, ha egy kétműveletes $(F; +, \cdot)$ algebrai struktúrára teljesül az előző oldalon szereplő kilenc feltétel mindegyike, akkor ezt az algebrai struktúrát **testnek** nevezzük. Tehát a racionális számok, a valós számok és a komplex számok testet alkotnak az összeadásra és a szorzásra nézve. A jegyzetben használni fogjuk gyakran a számtest kifejezést; ezzel a kifejezéssel a racionális számok, a valós számok, vagy a komplex számok testére utalunk.
Az előző oldalon szereplő tulajdonságok alapján az egész számok csupán annyiban különböznek a racionális-, a valós-, illetve a komplex számoktól, hogy az ott felsorolt tulajdonságok közül nem teljesül rájuk a (9) feltétel. Ugyanis a $+1$ és -1 kivételével az egész számoknak nincs reciproka az egész számok között. Egy olyan $(F; +, \cdot)$ algebrai struktúrát, amelyre teljesül az előző oldalon szereplő (1) – (8) feltételek mindegyike, **egységelemes kommutatív gyűrűnek** nevezünk. Tehát az egész számok (és persze a racionális számok, a valós számok és a komplex számok) halmaza, egyégelemes kommutatív gyűrűt alkot az öszeadásra és a szorzásra nézve. Könnyen ellenőrizhető, hogy az előbb felsorolt számhalmazok feletti polinomok halmaza is egységelemes kommutatív gyűrűt alkot a polinomok összeadására és szorzására nézve. Vannak olyan vizsgálatok, amelyeknél az egységelem nem játszik szerepet, sőt azt sem használjuk ki, hogy a szorzás kommutatív. Tehát elegendő, ha egy $(F; +, \cdot)$ algebra struktúra esetén az előző oldalon szereplő feltételek közül csak az első hat teljesül. Egy ilyen algebrai struktúrát **gyűrűnek** nevezünk. Persze, ha egy gyűrű esetén a (7) feltétel is teljesül, akkor a gyűrűt **kommutatív gyűrűnek** nevezzük. Abban az esetben pedig, amikor egy gyűrű a (8) feltételt is teljesíti, **egységelemes gyűrűről** beszélünk. Nyilván, ha egy gyűrű a (7) és (8) feltételek mindegyikét teljesíti, a fentebb már említett egységelemes kommutatív gyűrű fogalmához jutunk. Összefoglalva: az egész számok, a racionális számok, a valós számok és a komplex számok halmazának mindegyike gyűrű, sőt egységelemes kommutatív gyűrű, továbbá az ezen számhalmazok bármelyike feletti polinomok halmaza is egységelemes kommutatív gyűrűt alkot a polinomok összeadására és a szorzására nézve. Ha a gyűrű, a kommutatív gyűrű, vagy az egységelemes kommutatív gyűrű kifejezést használjuk valahol a jegyzetben, akkor ott az előbbi mondatban felsorol gyűrűkre történik az utalás.

A lineáris algebra egy speciális területével, a térbeli vektorok algebrájával már találkoztak a korábbi félévben a Matematika A1a tantárgy keretén belül. Jól ismert tény, hogy a térbeli vektorok halmazán értelmezett összeadásra érvényesek a következők: az összeadás asszociatív és kommutatív, továbbá van közöttük egy nullelem (ez a nullvektor), és minden térbeli vektornak van ellentettje (amely a vektort reprezentáló szakasz irányításának ellenkezőre való váltásával származtatható). Egy egyműveletes $(V;+)$ algebrai struktúrát **kommutatív csoportnak** nevezünk, ha a $+$ jelű összeadás asszociatív és kommutatív, továbbá V-ben van egy nullelem és minden V-beli elemenek van V-ben ellentettje. Ezzel a szóhasználattal élve, a térbeli vektorok halmaza kommutatív csoportot alkot a térbeli vektorok összeadására nézve. Amellett, hogy értelmezve van a térbeli vektorok közötti összeadás, értelmezve van térbeli vektornak valós számmal képezett szorzata is. Erre az un. skalárral való szorzásra teljesülnek a következők: tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térbeli vektorok és tetszőleges α, β valós számok esetén $\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$, $(\alpha+\beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a}$, $(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a})$, $1\underline{a} = \underline{a}$.

A lineáris algebrai vizsgálatokban több helyen előfordul a térbeli vektorokhoz hasonló konstrukció, azaz ahol adott egy olyan nem üres V halmaz, amin értelmezve van egy $+$ jelű összeadás úgy, hogy V kommutatív csoportot alkot erre az öszeadásra nézve, továbbá értelmezve van V elemeinek valamely F számtestbeli számokkal képezett szorzata úgy, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V$ elemekre, valamint tetszőleges α, β számokra teljesülnek az alábbiak:

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$

$$(\alpha+\beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a}),$$

$$1\underline{a} = \underline{a}.$$

Ilyenkor azt mondjuk, hogy a V halmaz **vektorteret** alkot az F számtest felett; a V halmaz elemeit **vektoroknak**, az F számtest elemeit pedig **skalároknak** nevezzük. Tehát a térbeli vektorok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett.

További példák vektorterekre:

- Jelöljön F egy számtestet (a racionális számok, a valós számok, vagy a komplex számok halmazának valamelyikét). Az F elemeiből képezett összes lehetséges (oszlopos formában írt) n-elemű sorozatok F^n halmazáról igen egyszerűen belátható, hogy vektorteret alkotnak az F számtest felett, mert az F^n halmaz kommutatív csoportot alkot a számsorozatok szokásos összeadására nézve, azaz az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

összeadásra nézve, továbbá F^n-beli $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ sorozatoknak F-beli α számokkal való

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$

módon definiált szorzására teljesülnek az alábbiak: tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in F^n$ sorozatok, valamint tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ számok esetén

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$
$$(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$
$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a})$$
$$1\underline{a} = \underline{a}.$$

- Egy F számtest elemeiből képezett egyváltozós polinomok $F[x]$ halmaza vektorteret alkot F felett.
- Egy x_0 pontban differenciálható egyváltozós valós függvények halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett.
- Egy egyelemű $(V;+)$ csoport (amely csak egy nullelemből áll) tetszőleges F számtest felett vektorteret alkot. Ezt triviális vektortérnek nevezzük.

A vektorok vizsgálatában gyakran előfordul $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektoroknak $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárokkal képezett **lineáris kombinációja**, amelyen az $\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n$ vektort értjük. Ha egy ilyen lineáris kombinációban minden skalár nulla, akkor eredményként a nullvektor adódik. Egyes vektorrendszerek lineáris kombinációjaként úgy is megkaphatjuk a nullvektort, ha a lineáris kombinációban szereplő skalárok nem mindegyike nulla. Az ilyen vektorrendszereket **lineárisan függő vektorrendszereknek** nevezzük. Ellenkező estben a vektorrendszert lineárisan függetlennek nevezzük. Kicsit részletesebben: egy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszert **lineárisan független vektorrendszernek** nevezünk, ha lineáris kombinációjuk csak úgy lehet egyenlő a nullvektorral, ha az abban szereplő skalárok mindegyike nulla. Képletben ez így fejezhető ki:

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0} \quad \Longrightarrow \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0.$$

A 9.11. Tétel szerint lineárisan független vektorrendszerhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként nem lehet a vektortér minden vektorát előállítani, de ha valamelyiket igen, akkor csak egyféleképpen. Egy vektortér egy vektorrendszerét a vektortér egy **generátorrendszerének** nevezzük, ha lineáris kombinációjukként a vektortér minden vektora előállítható. Egy generátor-rendszer vektorainak lineáris kombinációjaként a vektortérnek nem minden vektora állítható elő egyféleképpen. Ha igen, akkor az illető generátorrendszet a vektortér bázisának nevezzük. Tehát egy vektortér $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszeréről akkor mondjuk, hogy a vektortérnek egy **bázisa**, ha a benne szereplő vektorok lineáris kombinációjaként a vektortér minden vektora előállítható egyféleképpen. A 9.25. Tétel szerint ha egy vektortérnek van n vektort tartalmazó bázisa, akkor a vektortér minden bázisa n vektort tartalmaz. A bázisokban lévő vektorok közös számát a vektortér **dimenziójának** nevezzük. Például, a térbeli vektorok vektorterének dimenziója 3, mert három nem egysíkú vektor lineáris kombinációjaként minden térbeli vektor előállítható egyféleképpen. Egy F számtestből képezett F^n vektortér dimenziója n, mert az $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vektorok rendszere az F^n vektortér egy bázisát alkotják, ahol $\underline{e}_i$ az a sorozat, amelynek i-dik eleme 1, az összes többi pedig 0.
Egy F számtest feletti V vektortér vektorainak valamely nem üres W részhalmaza lehet olyan, hogy W önmaga is vektortér a V-beli összeadásra és a V vektoraira értelmezett skalárral való szorzásra nézve. Ilyenkor azt mondjuk, hogy W **altér** a V vektortérben. Gondoljunk például arra, hogy a térbeli vektorok V vektorterében egy adott síkkal párhuzamos összes vektor W halmaza V-nek egy altere. A 9.30. Tétel szerint egy F test feletti V vektortér valamely nem üres W részhalmaza akkor és csak akkor altér, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in W$ vektorokra és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárokra $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W$ teljesül. Könnyen igazolható, hogy egy F számtest feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorai esetén

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_i \in F\}$$

V-nek egy altere, amelyet az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok által **generált altérnek** nevezünk. A 9.36. Tétel szerint ezen altér dimenziója megegyezik az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok között levő lineárisan független vektorok számának maximumával. Ha az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, akkor az általuk generált altér dimenziója n, továbbá az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok ennek az altérnek egy bázisát alkotják.

A vektorterekkel kapcsolatos további fogalmakat a jegyzet 9. fejezete tartalmazza.

2. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek, a Gauss-módszer

Ebben a fejezetben definiáljuk a számtestek feletti lineáris egyenletrendszer fogalmát, és ismertetjük egyik megoldási módszerüket, a Gauss-módszert.

2.1. A lineáris egyenletrendszer fogalma

2.1. Definíció *Lineáris egyenletrendszeren olyan egyenletrendszert értünk, amely véges sok elsőfokú egyenletből áll és véges sok ismeretlent tartalmaz.*

Az m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

amelyben szereplő a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ un. együtthatók és a b_i $(1 \leq j \leq m)$ un. konstansok valamely $\mathbb{F}$ számtest elemei. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy egy $\mathbb{F}$ számtest feletti egyenletrendszerről van szó. Egy lineáris egyenletrendszert homogén lineáris egyenletrendszernek nevezünk, ha konstansainak mindegyike egyenlő 0-val.

2.2. Definíció *Egy F számtest feletti m egyenletből álló, n-ismeretlent tartalmazó*

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásain (ha vannak) az F^n vektortér olyan $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ *vektorait értünk, amelyekre F-ben teljesül az*

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_i$$

egyenlőség minden $i = 1, 2, \cdots, m$ indexre.

Egy lineáris egyenletrendszer általános alakjában szereplő együtthatókat kiemelhetjük az egyenletrendszerből úgy, hogy az egymáshoz viszonyított helyzetük változatlan maradjon. Így ezen adatok táblázatos formában felírt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

elrendezését kapjuk.

Ha a konstansokat is kiemeljük az együtthatókkal együtt, akkor az

$$(\mathbf{A}, \underline{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

táblázatos formát kapjuk. Itt $\underline{b}$ azt az F^m vektortérbeli vektort (azaz sorozatot) jelöli, amelynek i-dik eleme egyenlő a lineáris egyenletrendszerben szereplő b_i konstanssal, azaz

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

A mátrix fogalmának pontos definíciója a 2. fejezetben található (3.1. Definció). Ennek megfelelően a fenti két táblázatos forma egy-egy mátrixot jelöl. Az $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixot a lineáris egyenletrendszer mátrixának, az $m \times (n+1)$-típusú $(\mathbf{A}, \underline{b})$ mátrixot pedig a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük. Mindkét mátrixban a j-dik ($j = 1, \ldots, n$) oszlopban szereplő elemek sorozata (a $\underline{b}$ vektorhoz hasonlóan) úgy tekinthető, mint az F^m vektortér egy vektora; ezt az

$$\underline{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

vektort a lineáris egyenletrendszer (illetve a fenti mátrixok) j-dik oszlopvektorának nevezzük.

Mint látni fogjuk, egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa fontos szerepet játszik a lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának, illetve a megoldások előállításának vizsgálatában.

Ha egy lineáris egyenletrendszeren az alábbi három un. elemei átalakítás bármelyikét is alkalmazzuk, akkor ez az átalakítás az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszert eredményez, azaz az átalakítás után keletkezett lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza megegyezik az átalakítás előtti lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazával.

Egy lineáris egyenletrendszerek elemi átalakításain a következő átalakításokat értjük:

(1) két egyenlet felcserélése,

(2) valamelyik egyenletnek egy nullától különböző skalárral való szorzása,

(3) az egyik egyenlethez egy tőle különböző egyenlet skalárszorosának hozzáadása.

Egy lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai az egyenletrendszer kibővített mátrixán a sorokra vonatkozó következő elemi átalakításokat (un. elemi sorműveleteket) eredményezik:

(1) a mátrix két különböző sorának felcserélése,

(2) a mátrix egy sorának egy nullától különböző skalárral való szorzása,

(3) a mátrix egyik sorához egy tőle különböző sor skalárszorosának hozzáadása.

Ennek megfelelően egy lineáris egyenletrendszert megoldhatunk úgy is, hogy felírjuk az egyenletrendszer kibővített mátrixát, azon elemi sorműveleteket hajtunk végre, majd megoldjuk azt a lineáris egyenletrendszert, amelynek kibővített mátrixa az elemi sorműveletek alkalmazásával keletkezett mátrix. Mint látni fogjuk, egy lineáris egyenletrendszer könnyen megoldható, ha kibővített mátrixa sorlépcsős alakú. A sorlépcsős alakú mátrix fogalmát és a fogalommal kapcsolatos alapvető eredményt a következőkben tárgyaljuk.

2.2. Mátrixok sorlépcsős alakja

Először definiáljuk mátrix főelemeinek fogalmát.

2.3. Definíció *Egy*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} elemét főelemnek nevezzük, ha az a_{ij} elem az i-dik sor első nem nulla eleme, azaz $a_{ij} \neq 0$ és $a_{ik} = 0$ minden j-nél kisebb pozitív egész k indexre. Ha egy sorban minden elem nulla, akkor annak a sornak nincs főeleme.

2.4. Definíció *Egy mátrixot sorlépcsős alakúnak nevezünk, ha teljesíti az alábbi három feltétel mindegyikét.*

(1) A mátrix csupa nullákat tartalmazó sorai (ha vannak ilyenek), a mátrix utolsó sorai.

(2) A mátrixban a nem nulla sorok főelemei alatt csak 0-ák állhatnak;

(3) A mátrix bármely két egymás után következő nem nulla sora esetén a lentebbi sor főeleme későbbi oszlopban jelenik meg, mint a felette levő sor főeleme, azaz a lentebbi sor főeleme előtt több nulla áll, mint a felette levő sor főeleme előtt.

Ha egy mátrixra a fenti három feltételen túl az is teljesül, hogy nem csak a főelemek alatt, hanem a főelemek felett is nullák állhatnak, továbbá minden főelem egyenlő 1-gyel, akkor azt mondjuk, hogy a mátrix redukált sorlépcsős alakú.

Példa sorlépcsős alakú mátrixra (a pirossal jelölt elemek a főelemek):

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszerek megoldásához fontos lesz számunkra a következő tétel.

2.5. Tétel *A sorokra vonatkozó elemi átalakításokkal minden F számtest feletti mátrix sorlépcsős alakra hozható.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ egy F számtest feletti tetszőleges $m \times n$ típusú mátrix. Feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ nem nulla, és sorainak száma legalább kettő (ellenkező esetben a mátrix már sorlépcsős alakú. Sorok esetleges cseréjével elérjük, hogy a mátrix csupa nullákat tartalmazó sorai (ha vannak ilyenek) a mátrix utolsó soraiba kerüljenek. Az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közül jelölje j annak a nem nulla oszlopvektornak az indexét, amely előtt álló oszlopvektorok (ha vannak ilyenek) mindegyike nullvektor. Feltehetjük, hogy a sorok megfelelő cseréje után mátrixunk olyan alakú, amelyben az első sor j-dik eleme, azaz az a_{1j} elem nem nulla. Ez lesz az első sor főeleme. Az i-dik ($i \geq 2$) sorból vonjuk ki az első sor a_{ij}/a_{1j}-szeresét. Ezzel olyan mátrixot kapunk, amelyben az a_{1j} főelem alatti elemek mindegyike nulla. Takarjuk le az első sort. Ha az így keletkezett mátrix minden eleme nulla, vagy egyetlen sora van, akkor a vizsgált mátrixot lépcsős alakra hoztuk. Ellenkező esetben a fenti eljárást alkalmazzuk az első sor letakarásával keletkezett mátrixra. Az eljárást véges lépésben befejezzük, melynek eredményeként olyan sorlépcsős mátrix keletkezik, amelyet az eredetiből elemi sorműveletek alkalmazásával nyertünk. □

A 2.5. Tétel bizonyításában szereplő eljárást szemlélteti a következő példa.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A 2.5. Tétel bizonyításából következik, hogy a sorokra vonatkozó elemi átalakításokkal minden F számtest feletti mátrix redukált sorlépcsős alakra hozható. Ha az előző példában végeredményként kapott sorlépcsős mátrixban a harmadik sort hozzáadjuk az első sorhoz, a harmadik sor kétszeresét kivonjuk a második sorból, és a negyedik sort hozzáadjuk a második sorhoz, akkor az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk, amely redukált sorlépcsős alakú.

Még egy példa:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ez a mátrix nem csak sorlépcsős alakú, hanem egyben redukált sorlépcsős alakú is.

A következő fejezetben a lineáris egyenletrenszerek egy megoldási módszerével, illetve annak egy kissé módosított változatával foglalkozunk.

2.3. A Gauss-módszer, illetve a Gauss-Jordan-módszer

A 2.5.Tétel szerint minden számtest feletti mátrix sorlépcsős alakra hozható, így minden lineáris egyenletrendszer elemi átalakításokkal olyan alakra hozható, melynek mátrixa sorlépcsős alakú. Erre a tényre épül a lineáris egyenletrendszerek egyik megoldási módszere, a Gauss-módszer.

A Gauss-módszer. A Gauss-módszer első szakaszában a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát sorlépcsős alakra hozzuk. Ha ez az alak tartalmaz $[0, 0, \ldots, 0, c]$ alakú sort úgy, hogy $c \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert ez arra utal, hogy a kibővített mátrix sorlépcsős alakjához felírt, az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszerben az ennek a sornak megfelelő egyenlet $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c$ alakú, amely $c \neq 0$ esetén nem teljesülhet. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a kibővített mátrix sorlépcsős alakja nem tartalmaz ilyen sort. Mielőtt ezt megtennénk, vezessük be a következő elnevezéseket. Egy lineáris egyenletrendszer x_j változóját kötött változónak nevezzük, ha a kibővített mátrix sorlépcsős alajának j-dik oszlopában van főelem. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy x_j szabad változó. Ha nincsenek szabad változók, akkor az esetleg előforduló $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ alakú egyenletek elhagyása után olyan egyenletrendszert kapunk, melyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, és ennek az egyenletrendszernek a mátrixa olyan diagonális mátrix, melynek főátlójában minden elem nullától különböző. Ekkor az egyértelmű megoldást megkaphatjuk, ha az utolsó egyenletből meghatározzuk az x_n ismeretlen értékét, majd ezt behelyettesítve az utolsó előtti egyenletbe, abból kifejezzük az x_{n-1} értékét. Folytatva ezt az eljárást, megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldását. Ha vannak szabad változók, akkor azokat paraméterként kezelve, átrendezés után az előző esetnek megfelelő alakot kapunk, amelyből a kötött változók egyértelműen kifejezhetők (a szabad változók segítségével). Mivel a szabad változók helyére az alaptest tetszőleges elemét beírhatjuk, ezért az eredeti egyenletrendszernek ebben az esetben több megoldása, végtelen sok elemet tartalmazó test esetén végtelen sok megoldása van.

Feladat. Gauss-módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$\begin{array}{cccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 8 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = 6 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor kétszeresét, a harmadik sorból pedig az első sor háromszorosát. Eredményként a következő mátrixot kapjuk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & -22 \end{array}\right].$$

Vonjuk ki a harmadik sorból a második sort! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & -5 & 0 & | & -10 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \end{bmatrix}.$$

Ez az eredeti mátrix sorlépcsős alakja. Mivel ezen mátrix első három oszlopának mindegyikében van főelem, ezért a lineáris egyenletrendszernek nincs szabad változója, ami arra utal, hogy a lineáris egyenletrendszer egyértelműen oldható meg.

A sorlépcsős mátrixhoz tartozó, az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ & -5x_2 & & = & -10 \\ & & -4x_3 & = & -12 \end{array}$$

melynek (egyetlen) megoldása: $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$.

Feladat. Gauss-módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 7 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 7 \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor kétszeresét. Eredményként a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 1 \\ 0 & -5 & 5 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

Ebben az első sor főeleme 1, a második sor főeleme -5. Mivel az első két oszlopban van főelem, a harmadik oszlopban viszont nincs, ezért x_1 és x_2 kötött változók, x_3 pedig szabad változó.

A sorlépcsős mátrixhoz tartozó, az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ & -5x_2 & +5x_3 & = & 5, \end{array}$$

Mivel x_1 és x_2 kötött változók, x_3 pedig szabad változó, ezért az x_3-at tartalmazó tagoknak az egyenletek jobb oldalára való átvitelével keletkezett egyenletrendszer:

$$
\begin{array}{rrcl}
x_1 & +2x_2 & = & 1+3x_3 \\
 & -5x_2 & = & 5-5x_3.
\end{array}
$$

Ennek megoldása az az $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ vektor, melyben $x_2 = x_3 - 1$ és $x_1 = x_3 + 3$, azaz

$$
\underline{x} = \begin{bmatrix} x_3+3 \\ x_3-1 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

ahol x_3 tetszőleges valós szám. Tehát az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van.

Feladat Gauss-módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$
\begin{array}{rrrcl}
-x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\
 & -x_2 & +x_3 & = & 0 \\
x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0
\end{array}
$$

homogén lineáris egyenletrendszert!

Megoldás. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}.
$$

Adjuk az első sort a harmadik sorhoz. Eredményként a következő mátrixot kapjuk:

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.
$$

Adjuk a második sor kétszeresét az első sorhoz. A keletkezett mátrix:

$$
\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.
$$

Ha megszorozzuk ennek a mátrixnak az első két sorát (-1)-gyel, akkor az

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

mátrixot kapjuk, amely a kiinduló kibővített mátrix redukált sorlépcsős alakja. Mivel ezen mátrix első két oszlopában szerepel főelem, a harmadik oszlopban nem, ezért x_1 és x_2 a kötött változók, x_3 pedig a szabad változó.

A redukált sorlépcsős mátrixhoz tartozó, az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & -3x_3 & = & 0 \\ & x_2 & -x_3 & = & 0. \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

A szabad változót (azaz az x_3-at) tartalmazó tagokat vigyük át a jobb oldalra, így az

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & 3x_3 \\ & x_2 & & = & x_3 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}$$

egyenletrendszert kapjuk, amiből $x_1 = 3x_3$ és $x_2 = x_3$ adódik. Így a megoldásvektor:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$

Tehát a homogén lineáris egyenletrendszer megoldásvektorainak halmaza az F^3 vektortérnek egy alterét alkotják; ez az altér a

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektor által generált altér. Ennek az altérnek a dimenziója 1.

A Gauss-Jordan-módszer. A Gauss-Jordan-módszer annyiban különbözik a Gauss-módszertől, hogy a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixán olyan elemi sorműveleteket hajtunk végre, amelyek az egyenletrendszer kibővített mátrixát redukált sorlépcsős alakra hozza, azaz nem csak a főelemek alatti, hanem a főelemek feletti elemeket is kinullázuk (ha vannak ilyenek).

Feladat. A Gauss-Jordan módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert!

Megoldás. A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{array}\right].$$

Cseréljük fel a két sort (ez annak felel meg, hogy az egyenletrendszerben felcseréljük a két egyenletet)! A keletkezett mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \end{array}\right].$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor kétszeresét! A keletkezett mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \end{array}\right].$$

Adjuk az első sorhoz a második sor 1/5-ét! A keletkezett mátrix:

$$\left[\begin{array}{rrrcr} 1 & 0 & 4/5 & | & 8/5 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \end{array}\right].$$

Az ehhez tartozó, az eredetivel ekvivalens egyenletrenszer:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & +4/5x_3 & = & 8/5 \\ & +5x_2 & -x_3 & = & 3. \end{array}$$

Az x_1 és x_2 kötött változók, az x_3 pedig szabad változó. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $x_1 = -4/5x_3 + 8/5$, $x_2 = 1/5x_3 + 3/5$. A lineáris egyenletrenszer x_1, x_2, x_3 megoldásait úgy is tekinthetjük, mint egy térbeli vektor három koordinátája, azaz azt is mondhatjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásai az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 8/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

térbeli vektorok.

A fejezet végén egy példát mutatunk a lineáris egyenletrendszerek gyakorlatban való alkalmazására.

Példa Egy hazai vegyipari gyárnak, amelyben négy féle vegyianyagot állítanak elő, három különböző országbeli gyár felé b_1, b_2, illetve b_3 millió dollár tartozása van. Egy adott termelési időszak végén a három tartozás egyikét kell rendezni, de az csak a termelési időszak végén derül ki, hogy melyiket. A vegyipari gyár adott időszakra vonatkozó termelésének tervezéséhez tudni kellene, hogy az egyes üzemegységekben a négyféle vegyipari anyagból elő lehet-e állítani annyit, hogy azoknak a három külföldi gyár bármelyikénél, az adott országban érvényes áron való értékesítésével keletkezett jövedelem pontosan annyi legyen, mint amennyi az adott gyár felé való tartozás összege.

Jelölje a_{ij} $(i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$ azt, hogy az i-dik külföldi gyár hány dollárért vásárolja fel a hazai gyár által előállított j-dik vegyianyag egy egységét. Ha x_1, x_2, x_3, x_4 jelöli az adott időszakban az egyes vegyianyagokból előállítottak mennyiségét, akkor az i-dik külföldi gyár ezekért $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+a_{i4}x_4$ dollárt fizet. A termelés tervezésével kapcsolatos fenti kérdés tehát úgy is megfogalmazható, hogy az

$$\begin{array}{lllll} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +a_{14}x_4 & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +a_{24}x_4 & = b_2 \\ a_{31}x_1 & +a_{32}x_2 & +a_{33}x_3 & +a_{34}x_4 & = b_3 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszernek van-e megoldása, és ha van, akkor melyek azok. Erre a kérdésre a Gauss-módszer (vagy a Gauss-Jordan-módszer) alkalmazásával választ adhatunk.

3. fejezet

Mátrixalgebra

Az előző fejezetben már láttuk, hogy egy számtest feleti m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer együtthatóit, illetve konstansait tartalmazó m sorból és $n+1$ oszlopból álló táblázatos alakzat fontos szerepet játszott a lineáris egyenletrendszer megoldásában. A matematika más területein is jelentős szerepük van az ilyen alakzatoknak, amelyeket (mint ahogy arra már korábban is utaltunk) mátrixoknak fogunk nevezni. Számunkra nem csak a számtestek elemeiből képezett mátrixok lesznek fontosak, a 7. fejezetben olyan mátrixokat fogunk vizsgálni, amelyek elemei valamilyen számtest feletti polinomok. Mivel ezen polonomok halmaza nem alkot testet, csak gyűrűt (pontosabban: egységelemes kommutatív gyűrűt), ezért a mátrix definíciójában azt követeljük meg, hogy az elemei valamely gyűrű elemei legyenek.

3.1. A márix fogalma

3.1. Definíció *Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixon olyan leképezést értünk, amely minden (i, j) rendezett párhoz egyértelműen hozzárendel egy R-beli a_{ij}-vel jelölt elemet, ahol $i = 1, 2, \ldots m$ és $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Az előző definíció alapján értelmezett $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix értékkészletét alkotó a_{ij} elemeket elrendezhetjük egy m sorból és n oszlopból álló táblázatba úgy, hogy az a_{ij} elem ennek a táblázatnak az i-dik sorába, illetve a j-dik oszlopába kerül. Tehát az $\mathbf{A}$

mátrix értékkészlete a következőképpen szemléltethető:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Az előzőeknek megfelelően, egy $m \times n$-típusú mátrix úgy is definiálható, mint mn elemnek m sorból és n oszlopból álló táblázatba való elrendezése. Ebben a jegyzetben (a szokásnak megfelelően) a mátrixokat mindig táblázatos formában adjuk meg.

Egy gyűrű feletti $m \times n$ típusú

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix esetén az

$$a_{i1}, \dots, a_{in}$$

elemsorozatot az **A** mátrix i-dik sorának, az

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

elemsorozatot az **A** mátrix j-dik oszlopának nevezzük.

Ha **A** egy F számtest feletti $m \times n$ típusú mátrix, akkor az **A** mátrix j-dik oszlopát alkotó

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in F^m$$

elemsorozatot az **A** mátrix j-dik oszlopvektorának is szoktuk nevezni. Hasonlóan, a sorokra a sorvektor kifejezést is szoktuk használni.

Jelölések mátrixokra:

$$\mathbf{A}, \quad [a_{ij}], \quad \mathbf{A}_{m\times n}, \quad [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Egy $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának j-dik elemét ${}_i[\mathbf{A}]_j$ módon is fogjuk jelölni.

3.2. Definíció *Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és elemeik rendre megegyeznek.*

Ha $k = min\{m, n\}$, akkor az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix azonos indexű elemeiből álló

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$$

elemsorozatot az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának nevezzük (ennek első két eleme a fenti $\mathbf{A}$ mátrix kék elemei). Az $\mathbf{A}$ mátrix elemiből álló

$$a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{k\ n-(k-1)}$$

elemsorozatot az $\mathbf{A}$ mátrix mellékátlójának nevezzük (ennek első két eleme a fenti $\mathbf{A}$ mátrix zöld elemei). Figyeljük meg, hogy a mellékátlóban álló elemeknél az indexek összege $n + 1$.

3.3. Definíció *Egy $m \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltján azt az $\mathbf{A}^T$ módon jelölt $n \times m$ típusú mátrixot értjük, amelyben az i-dik sor $(i = 1, \dots n)$ megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik oszlopával.*

3.4. Megjegyzés A definíció alapján tehát : ${}_i[\mathbf{A}^T]_j = {}_j[\mathbf{A}]_i$ tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra. Világos, hogy egy mátrix transzponáltját úgy is megkaphatjuk, hogy tükrözzük a főátlójára.

3.5. Definíció *Egy mátrixot négyzetes mátrixnak nevezünk, ha sorainak száma megegyezik oszlopainak számával.*

3.6. Definíció *Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix főátlójában álló elemeinek összegét az $\mathbf{A}$ mátrix nyomának nevezzük és $tr(\mathbf{A})$ módon jelöljük.*

3.2. Műveletek mátrixok között

3.7. Definíció *Azonos, $m \times n$ típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixok összegén az ugyancsak $m \times n$ típusú

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixot értjük.

3.8. Megjegyzés *Az összeadást tehát csak azonos típusú mátrixok között értelmezzük.*

3.9. Tétel *Tetszőleges gyűrű feletti $m \times n$ típusú mátrixok halmaza a mátrixok (előzőekben definiált) összeadására nézve kommutatív csoportot alkot, azaz az öszeadás asszociatív és kommutatív, a*

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix (az un. $m \times n$ típusú nullmátrix) a nullelem, és egy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$$

mátrix ellentettje a

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$$

mátrix.

Bizonyítás. A definíciók alapján nyílvánvaló. □

3.10. Tétel *Tetszőleges $m \times n$ típusú $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T,$$

azaz azonos típusú márixok összegének transzponáltja megegyezik a mátrixok transzponáltjainak összegével.

Bizonyítás. Tetszőleges $i \in \{1,\dots,m\}$ és $j \in \{1,\dots,n\}$ indexek esetén

$$_i[(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T]_j = \ _j[(\mathbf{A}+\mathbf{B})]_i = \ _j[\mathbf{A}]_i +_j [\mathbf{B}]_i = \ _i[\mathbf{A}^T]_j +_i [\mathbf{B}^T]_j = \ _i[\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T]_j.$$

Így

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

□

3.11. Tétel *Azonos típusú négyzetes mátrixok összegének nyoma megegyezik a mátrixok nyomának összegével.*

Bizonyítás. Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-típusú mátrixok, akkor

$$tr(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii}) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\right) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B}).$$

□

3.12. Definíció *Egy $m \times n$ típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

és egy $n \times k$ típusú

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

mátrix $\mathbf{AB}$ szorzatán azt az $m \times k$ típusú mátrixot értjük, amelyben az i-dik sor j-dik eleme egyenlő a

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

szorzatösszeggel.

Figyeljük meg, hogy az $\mathbf{AB}$ szorzat akkor és csak akkor van értelmezve, ha $\mathbf{A}$ oszlopainak száma megegyezik $\mathbf{B}$ sorainak számával.

Ha értelmezve van az $\mathbf{AB}$ szorzat és a $\mathbf{BA}$ szorzat is (például, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-típusú (un. négyzetes) mátrixok, akkor nem feltétlenül teljesül az $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ egyenlőség, azaz a mátrixok szorzása általában nem kommutatív.

3.13. Tétel *Ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-tipusú mátrixok, akkor $tr(\mathbf{AB}) = tr(\mathbf{BA})$.*

Bizonyítás

$$tr(\mathbf{AB}) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{it}b_{ti}\right) = \sum_{t=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ti}a_{it}\right) = tr(\mathbf{BA}).$$

$\square$

Legyen F egy számtest. Jelölje $[\underline{e}_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ az F^n vektortér azon vektorát, melynek megfelelő sorozatban az i-dik elem egyenlő 1-gyel, az összes többi pedig egyenlő 0-val. Mivel minden F^n-beli vektor egy $n \times 1$-típusú mátrixként is kezelhető, ezért létezik az F^n-beli $\underline{v}$ vektoroknak F feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixokkal való $\mathbf{A}\underline{v}$ szorzata. Ilyenkor

$$\mathbf{A}\underline{e}_j = \underline{a}_j$$

teljesül minden j oszlopindexre, ahol $\underline{a}_j$ jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopvektorát, $\underline{e}_j$ pedig azt az F^n-beli vektort, amelynek (mint sorozatnak) a j-dik eleme 1, az öszs többi eleme pedig 0.

3.14. Definíció *Ha 0 jelöli egy R egységelemes gyűrű nullelemét és 1 az egységelemét, akkor tetszőleges n pozitív egész szám esetén azt az $n \times n$-títusú mátrixot, melynek főátlójában 1-esek állnak, a mátrix összes többi eleme pedig 0, $n \times n$-típusú egységmátrixnak nevezzük és $\mathbf{E}_n$-nel (vagy csak egyszerűen $\mathbf{E}$-vel) jelöljük. Tehát az $n \times n$-típusú egységmátrix a következő alakú:*

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

A szorzás definíciója alapján igen egyszerűen adódik, hogy tetszőleges n sorból álló $\mathbf{A}$ és tetszőleges n oszlopból álló $\mathbf{B}$ mátrixra teljesülnek az $\mathbf{E}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$ és $\mathbf{B}\mathbf{E}_n = B$ egyenlőségek.

3.15. Tétel *Tetszőleges $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ mátrixok esetén az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat. Ha a szorzatok értelmezve vannak, akkor $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Valamely $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat akkor és csak akkor létezik, ha $\mathbf{B}$ egy $n \times k$ típusú, $\mathbf{C}$ pedig egy $k \times t$ típusú mátrix, amely akkor és csak akkor teljesül, ha létezik az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat. A fenti jelöléseket használva,

$${}_i[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_j = \sum_{u=1}^{k}({}_i[(\mathbf{AB})]_u \, {}_u[\mathbf{C}]_j) = \sum_{u=1}^{k}((\sum_{v=1}^{n} {}_i[\mathbf{A}]_v \, {}_v[\mathbf{B}]_u) \, {}_u[\mathbf{C}]_j) =$$

$$= \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}((\,{}_i[\mathbf{A}]_v\,{}_v[\mathbf{B}]_u)\,{}_u[\mathbf{C}]_j) = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}(\,{}_i[\mathbf{A}]_v(\,{}_v[\mathbf{B}]_u\,{}_u[\mathbf{C}]_j)) =$$

$$\sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{k}(\,{}_i[\mathbf{A}]_v(\,{}_v[\mathbf{B}]_u\,{}_u[\mathbf{C}]_j)) = \sum_{v=1}^{n}(\,{}_i[\mathbf{A}]_v\sum_{u=1}^{k}({}_v[\mathbf{B}]_u\,{}_u[\mathbf{C}]_j)) =$$

$$\sum_{v=1}^{n}(\,{}_i[\mathbf{A}]_v\,{}_v[\mathbf{BC}]_j) = \,{}_i[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_j$$

minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre. Tehát $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. □

3.16. Tétel *Tetszőleges gyűrű feletti* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *mátrixok esetén az* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ *mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van az* $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ *szorzatösszeg. Ha a szóban forgó mátrixok értelmezve vannak, akkor* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Valamely $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén az $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok $n \times k$ típusúak, amely akkor és csak akkor igaz, ha létezik az $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ szorzatösszeg. Ebben az esetben

$${}_i[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_j = \sum_{u=1}^{n}\,{}_i[\mathbf{A}]_u\,{}_u[\mathbf{B}+\mathbf{C}]_j =$$

$$= \sum_{u=1}^{n}\,{}_i[\mathbf{A}]_u\,{}_u[\mathbf{B}]_j + \sum_{u=1}^{n}\,{}_i[\mathbf{A}]_u\,{}_u[\mathbf{C}]_j =_i [\mathbf{AB}]_j +_i [\mathbf{AC}]_j =_i [\mathbf{AB}+\mathbf{AC}]_j.$$

□

Az előző tételhez hasonlóan igazolható, ezért a bizonyítását nem részletezzük a következő tételnek.

3.17. Tétel *Tetszőleges* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *mátrixok esetén a* $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}$ *mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van a* $\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ *szorzatösszeg. Ha a szóban forgó mátrixok értelmezve vannak, akkor* $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.

3.18. Tétel *Tetszőleges R gyűrű feletti $n \times n$ típusú mátrixok $M_n(R)$ halmaza a mátrixok összeadására és szorzására nézve gyűrűt alkot. Ez a gyűrű általában nem kommutatív. Ha R egységelemes gyűrű, akkor az $M_n(R)$ mátrixgyűrű is egységelemes; benne az*

$$\mathbf{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix (az un. egységmátrix) az egységelem.

Bizonyítás. A 3.9. Tétel szerint $M_n(R)$ kommutatív csoportot alkot az összeadásra nézve. A 3.15. Tétel szerint a szorzás asszociatív az $M_n(R)$ halmazon. A 3.16. Tétel és a 3.17. Tétel szerint az $M_n(R)$ halmazon a szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve. Tehát $M_n(R)$ gyűrűt alkot a mátrixok öszeadására és szorzására nézve. $\square$

3.19. Tétel *Egy kommutatív gyűrű feletti $m \times n$ típusú $\mathbf{A}$ és $n \times k$-típusú $\mathbf{B}$ mátrixok esetén*

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Bizonyítás. Az $(\mathbf{AB})^T$ mátrix i-dik sorának j-dik eleme egyenlő a $\mathbf{AB}$ mátrix j-dik sorának i-dik elemével, azaz a

$$\sum_{t=1}^{n} a_{jt}b_{ti}$$

szorzatösszeggel. A $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ márix i-dik sorának j-dik eleme egyenlő a $\mathbf{B}^T$ mátrix i-dik sorának (azaz a $\mathbf{B}$ mátrix i-dik oszlopának) az $\mathbf{A}^T$ mátrix j-dik oszlopával (azaz az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik sorával) képezett

$$\sum_{t=1}^{n} b_{ti}a_{jt} = \sum_{t=1}^{n} a_{jt}b_{ti}$$

szorzatösszeggel. Ebből már adódik a tétel állítása. $\square$

3.20. Definíció *Egy R gyűrű feletti $m \times n$ típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixnak az R egy α elemével képezett $\alpha\mathbf{A}$ szorzatán az

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

R feletti mátrixot értjük.

3.21. Tétel *Egy F számtest elemeiből képezett $m \times n$ típusú mátrixok $M_{m\times n}(F)$ halmaza mn-dimenziós vektorteret alkot az F számtest felett. Ebben a vektortérben az $\mathbf{E}_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ mátrixok egy bázist alkotnak, ahol $\mathbf{E}_{i,j}$ jelöli azt az $m \times n$ típusú mátrixot, melynek i-dik sorában a j-dik elem 1, az összes többi elem pedig a nulla.*

Bizonyítás A 3.9. Tétel szerint $M_{m\times n}(F)$ kommutatív csoportot alkot a mátrixok összeadására nézve. Igen egyszerűen igazolható, hogy mátrixoknak skalárokkal képezett szorzatára teljesül a vektortér definíciójában szereplő négy azonosság mindegyike. Így $M_{m\times n}(F)$ vektorteret alkot az F számtest felett. Mivel tetszőleges $\mathbf{A} \in M_{m\times n}(F)$ vektorra

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\mathbf{E}_{ij}),$$

ezért a $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok lineári kombinációjaként az $M_{m\times n}(F)$ vektortér minden mátrixa előállítható. Egyszerűen igazolható, hogy az $\mathbf{E}_{ij}$ mátrixok lineárisan függetlenek. Így az $\mathbf{E}_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ mátrixok az $M_{m\times n}(F)$ vektortér egy bázisát alkotják. Mivel ebben a bázisban mn mátrix van, ezért az $M_{m\times n}(F)$ vektortér dimenziója mn. □

4. fejezet

A determináns

Ebben a fejezetben definiáljuk tetszőleges kommutatív gyűrű feletti (pl. egész számok feletti, racionális számok feletti, valós számok feletti, komplex számok feletti, illetve valós vagy komplex együtthatós polinomok feletti) $n \times n$-típusú (négyzetes) mátrix determinánsának fogalmát, és ismertetjük a determinás fogalmával kapcsolatos alapvető eredményeket.

4.1. A determináns fogalma

4.1. Definíció *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy R kommutatív gyűrű feletti (négyzetes) mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix $det(\mathbf{A})$ módon jelölt determinánsán az R gyűrű következő elemét értjük:

1. *Ha $n = 1$, azaz $\mathbf{A} = [a_{11}]$, akkor $det(\mathbf{A}) = a_{11}$.*
2. *Ha $n = 2$, azaz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, akkor $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in R$.*
3. *Ha $n > 2$, akkor*

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

amely képletben $A_{1k} = (-1)^{1+k} D_{1k}$, ahol D_{1k} jelöli az $\mathbf{A}$ mátrixból az első sor és a k-dik oszlop elhagyásával keletkezett $(n-1) \times (n-1)$ típusú mátrix determinánsát.

4.2. Definíció *Egy négyzetes mátrixot reguláris mátrixnak nevezünk, ha a determinánsa nem nulla. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy a mátrix szinguláris.*

4.3. Megjegyzés Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix determinánsát $|\mathbf{A}|$ módon is szoktuk jelölni. Ha fel akarjuk tüntetni az $\mathbf{A}$ mátrix elemeit is, akkor egy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát jelölhetjük még a következőképpen is:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Egy $n \times n$ típusú mátrix determinánsát n-edrendű determinánsnak is szoktuk nevezni. Annak ellenére, hogy egy R kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrix determinánsa az R egy eleme, mégis szoktunk beszélni egy determináns oszlopairól, illetve sorairól. Ilyenkor a szóbanforgó mátrix oszlopaira, illetve soraira gondolunk.

Példa Definíció alapján számoljuk ki az alábbi, az egész számok gyűrűje felett determinánst

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}!$$

Megoldás.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$-\left(\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) - 5\left(-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= 2(-2+6-8) - (-4-2) - 5(-1+11) = -8+6-50 = -52.$$

4.2. A determináns alaptulajdonságai

Tetszőleges R kommutatív gyűrű feletti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixra (ahol $n \geq 2$), vezessük be a következő jelöléseket:

Tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexekre, jelölje D_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrixból az i-dik sor és a j-dik oszlop törlésével keletkezett $(n-1) \times (n-1)$ típusú mátrix determinánsát (amelyet az i-sor j-dik eleméhez tartozó aldeterminánsnak nevezünk). Legyen

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

amit az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsnak nevezünk.

Az

$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

szorzatösszeget az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sora szerinti, az

$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

szorzatösszeget az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopa szerinti kifejtésének nevezzük.

Egy legalább két sort tartalmazó négyzetes mátrix determinánsa tehát nem más, mint az első sora szerinti kifejtése.

Nem nehéz belátni, hogy egy 2×2 típusú mátrix bármely sora, illetve bármely oszlopa szerinti kifejtése megegyezik a mátrix determinánsával. Ennél több is igaz:

4.4. Tétel *(Kifejtési tétel) Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrix bármely sora, illetve bármely oszlopa szerinti kifejtése megegyezik a mátrix determinánsával (azaz az első sor szerinti kefejtésével).*

A következő tételt a Kifejtési tétellel együtt a későbbiekben alkalmazni fogjuk.

4.5. Tétel *(Ferde kifejtési tétel) Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti, legalább két sort tartalmazó négyzetes mátrix esetén, egymástól különböző i, j és k indexekre*

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$

és

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0$$

teljesül.

A 4.4. Tétel és a 4.5. Tétel eredményeit a következő két képletben foglalhatjuk össze:

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} det(\mathbf{A}) & ha\ i = k \\ 0 & ha\ i \neq k \end{cases}$$

és

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} det(\mathbf{A}) & ha\ j = k \\ 0 & ha\ j \neq k. \end{cases}$$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt.

4.6. Tétel *Kommutatív gyűrű feletti tetszőleges négyzetes A mátrix esetén $det(A) = det(A^T)$, azaz egy négyzetes mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával.*

A következő tételek a determinánsok egy sorával, illetve oszlopával kapcsolatos alaptulajdonságokat tartalmazzák.

4.7. Tétel *Ha egy determináns valamely sorában vagy oszlopában minden elem 0, akkor a determináns értéke egyenlő 0-val.*

Bizonyítás. Legyen **A** olyan $n \times n$ típusú mátrix, amelynek i-dik sorában (vagy oszlopában) minden elem nulla. Akkor a mátrix i-dik sora (vagy i-dik oszlopa) szerinti kifejtése egyenlő 0-val. Így a Ferde kifejtési tétel miatt $det(\mathbf{A}) = 0$. $\square$

4.8. Tétel *Ha egy R kommutatív gyűrű feletti* **A** *négyzetes mátrix valamely sorában vagy oszlopában álló elemek mindegyikét megszorozzuk az R valamely α elemével, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa megegyezik az* **A** *mátrix determinánsának α-szorosával.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{i,\alpha}$ az a mátrix, amit egy $n \times n$ típusú **A** mátrixból úgy kapunk, hogy annak i-dik sorában álló elemek mindegyikét megszorozzuk az R valamely α elemével. Az $\mathbf{A}_{i,\alpha}$ mátrix i-dik sora szerinti kifejtése:

$$det(\mathbf{A}_{i,\alpha}) = \alpha a_{i1}A_{i1} + \alpha a_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha a_{in}A_{in} = \alpha(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = \alpha det(\mathbf{A}),$$

felhasználva a Kifejtési tételt is. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. $\square$

4.9. Tétel *Ha egy R kommutatív gyűrű feletti $n \times n$ típusú A mátrix valamely sorában (vagy oszlopában) álló elemek mindegyike csupa kéttagú összeg: $x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n$, akkor az* **A** *mátrix deteminánsa megegyezik azon* **B** *és* **C** *mátrixok determinánsának összegével, ahol a* **B**, *illetve* **C** *mátrix szóban forgó sorában (vagy oszlopában) lévő elemek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek, illetve (***C***-nél) az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ elemek, a többi helyen levő elemek pedig rendre megegyeznek (mind a* **B**, *mind a* **C** *mátrixnál) az* **A** *mátrix ugyanazon helyen álló elemeivel. Képletben (2×2 típusú mátrix 2. sorára):*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás. Legyenek **A**, **B** és **C** a tételben szereplő mátrixok! A bizonyítást az i-dik sorra végezzük el. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. Tegyük fel tehát, hogy az **A** mátrix i-dik sora $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$. Alkalmazva a Kifejtési tételt az **A** mátrix i-dik sorára:

$$det(\mathbf{A}) = (x_1 + y_1)A_{i1} + (x_2 + y_2)A_{i2} + \cdots + (x_n + y_n)A_{in} =$$

$$= (x_1A_{i1} + x_2A_{i2} + \cdots + x_nA_{in}) + (y_1A_{i1} + y_2A_{i2} + \cdots + y_nA_{in}) = det(\mathbf{B}) + det(\mathbf{C}).$$

$\square$

A következő tételek a determinánsok két sorával, illetve oszlopával kapcsolatos alaptulajdonságokat tartalmazzák.

4.10. Tétel *Ha egy determináns két különböző sora (vagy két különböző oszlopa) rendre ugyanazon elemeket tartalmazza, akkor a determináns értéke a* 0*.*

Bizonyítás. Ha egy $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix i-dik és k-dik ($i \neq k$) sorában levő elemek rendre megegyeznek, akkor az $i \neq k$ indexekre alkalmazva a ferde kifejtési tételt, valamint a kifejtési tételt:

$$0 = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = det(\mathbf{A}).$$

Hasonlóan igazolható az oszlopokra vonatkozó állítás. □

4.11. Tétel *Ha egy R kommutatív gyűrű elemeiből képezett determináns valamelyik sorához (vagy oszlopához) hozzáadjuk egy tőle különböző sor (vagy oszlop) valamely R-beli elemmel való szorzatát, akkor a determináns értéke nem változik.*

Bizonyítás. Adjuk az $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorhoz a j-dik $j \neq i$ sor $\alpha \in R$ szorosát. Az így keletkezett mátrix i-dik sorában álló elemek

$$a_{i1} + a_{j1}, a_{i2} + a_{j2}, \dots, a_{in} + a_{jn}.$$

A 4.9. Tétel és a 4.8. Tétel szerint ennek a mátrixnak a determinánsa egyenlő $det(\mathbf{A}) + \alpha det(\mathbf{B}$-vel, ahol $\mathbf{B}$ olyan mátrix, amelyben az i-dik és j-dik sorok megegyeznek. Mivel $i \neq j$, ezért a 4.10. Tétel szerint $det(\mathbf{B}) = 0$. Így a vizsgált mátrix determinánsa valóban egyenlő az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsával. □

4.12. Tétel *Ha egy determinánsban két különböző sort (vagy oszlopot) egymással felcserélünk, akkor a determináns előjelet vált.*

Bizonyítás. A sorokra vonatkozó állítást bizonyítjuk. Legyenek $i < j$ tetszőleges sorindexek. Cseréljük fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixban az i-dik és a j-dik sort. Az

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk (amelynek az elemei az i-dik és j-dik sor kivételével rendre megegyeznek az $\mathbf{A}$ mátrix ugyanazon helyen álló elemivel). Olyan átalakításokat hajtunk végre az $\mathbf{A}'$ mátrixnak csak az i-dik és j-dik során (a j-dik sort kivonjuk az i-dik sorból, majd az így keletkezett i-dik sort hozzáadjuk a j-dik sorhoz, végül pedig az így adódó j-dik sort kivonjuk az i-dik sorból) amely átalakításokkal a determinánsa nem változik (lásd a 4.11. Tételt és a 4.8. Tételt):

$$det(\mathbf{A}') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \dots & a_{jn}-a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1}-a_{i1} & a_{j2}-a_{i2} & \dots & a_{jn}-a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -det(\mathbf{A}).$$

□

Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát.

Megoldás. Vonjuk ki a második sorból az első sor 5-szörösét, a harmadik sorból az első sor 9-szeresét, és a negyedik sorból az első sor 13-szorosát, majd vonjuk ki a harmadik sorból a második sor 2-szeresét. Akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix}.$$

Mivel a harmadik sor minden eleme 0, ezért a determináns értéke 0.

4.13. Tétel *(A determinánsok szorzástétele) Azonos típusú, négyztes mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő a tényezők determinánsainak szorzatával.*

4.3. A Vandermonde-determináns

4.14. Definíció *Az* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ *elemsorozat által meghatározott Vandermonde-determinánsnak nevezzük az*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

determinánst.

4.15. Tétel *Az* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ *elemsorozat által meghatározott Vandermonde-determináns értéke megegyezik a* $\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i - a_j)$ *szorzattal, azaz az összes olyan* $a_i - a_j$ *különbségek szorzatával, amelyben szereplő indexekre teljesül, hogy az első tag indexe nagyobb a második tag indexénél.*

Bizonyítás (teljes indukció) $n = 2$-re igaz az állítás, mert az a_1, a_2 elemsorozat által meghatározott Vandermonde-determinánsra:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

Legyen $n > 2$ tetszőleges egész szám. Tegyük fel, hogy a tétel állítása igaz $n-1$-re, azaz minden $n-1$ elemű sorozat által meghatározott Vandermonde-determináns értéke megegyezik az illető elemsorozatból képezett azon különbségek szorzatával, amelyben az első tag indexe nagyobb a második tag indexénél. Megmutatjuk, hogy az előzőekből következik, hogy a tétel állítása igaz n-re is. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ tetszőleges elemsorozat. Ha a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Vandermonde-determináns n-dik sorából kivonjuk az $(n-1)$-dik sor a_1-szeresét, azután az $(n-1)$-dik sorból az $(n-2)$-dik sornak ugyancsak az a_1-szeresét, és így tovább, végül a második sorból az első sor a_1-szeresét, akkor D-re a

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

alakot kapjuk. Ha ezt a determinánst kifejtjük az első oszlopa szerint, akkor azt kapjuk, hogy

$$D = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1a_2 & a_3^2 - a_1a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1a_n \\ a_2^3 - a_1a_2^2 & a_3^3 - a_1a_3^2 & \ldots & a_n^3 - a_1a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-1} - a_1a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix},$$

amely egy $(n-1)$-edrendű determináns. Ha ennek minden oszlopból kiemeljük a közös tényezőket (azaz a j-dik oszlopból az $a_j - a_1$ különbséget), akkor D-re

$$D = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

adódik, amelyben szereplő determináns az $a_2, a_3, \dots, a_n$ elemsorozathoz tartozó $(n-1)$-edrendű Vandermonde-determináns. Az indukciós feltétel miatt ennek értéke megegyezik a $\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j)$ szorzattal. Így

$$D = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\left(\prod_{2\le j<i\le n}(a_i - a_j)\right) = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j).$$

$\square$

5. fejezet

Mátrix inverze

Egységelemes R gyűrű feletti $n \times n$ típusú mátrixok egységelemes $M_n(R)$ gyűrűjében beszélhetünk egy mátrix inverzéről, ha létezik.

5.1. Definíció *Egy egységelemes R gyűrű feletti $\mathbf{A} \in M_n(R)$ négyzetes mátrix inverzén azt az $\mathbf{A}^{-1} \in M_n(R)$ mátrixot értjük, amelyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ teljesül, ahol $\mathbf{E}$ jelöli az $n \times n$-típusú egységmátrixot. Ekkor azt is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ invertálható mátrix.*

5.2. Megjegyzés Ha egy (négyzetes) $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, akkor az $\mathbf{A}$ inverze is invertálható (ugyanis az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix inverze az $\mathbf{A}$ mátrix).

5.3. Tétel *Ha az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(R)$ mátrixoknak van inverze, akkor az $\mathbf{AB}$ szorzatnak és a $\mathbf{BA}$ szorzatnak is van inverze, mégpedig $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ és $(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.*

Bizonyítás. Mivel

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AEA}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

és

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{EB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E},$$

ezért

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy
$$(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$
$\square$

A következőkben számtest elemiből képezett (négyzetes) mátrixok invertálhatóságára adunk szükséges és elégséges feltételt a determinánsuk segítségével.

Mint ahogy azt már korábban definiáltuk, egy kommutatív gyűrű elemeiből képezett $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixot reguláris mátrixnak nevezünk, ha $det(\mathbf{A}) \neq 0$. Viszont azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ szinguláris mátrix, ha $det(\mathbf{A}) = 0$.

5.4. Tétel *Egy F számtest elemeiből képezett reguláris mátrixnak van egy és csak egy inverze. Szinguláris mátrixnak nincs inverze.*

Bizonyítás. Legyen
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
egy F számtest elemeiből képezett reguláris mátrix. Képezzük az
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
mátrixot, ahol A_{ij} jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának és j-dik oszlopának metszetében álló a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Figyeljük meg, hogy az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot úgy képezzük, hogy minden eleme helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst, az így keletkezett mátrixot transzponáljuk, majd ezt a mátrixot megszorozzuk az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának reciprokával. Mivel $\mathbf{A}$ reguláris, ezért a determinánsa az F számtest egy nem 0 eleme, és ezért van F-ben reciproka (másképpen: inverze). Tehát az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix jól definiált.

A mátrixok szorzásának definíciója alapján az
$$\mathbf{AA}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix i-dik sorának j-dik eleme (a Kifejtési tétel és a Ferde kifejtési tétel szerint) egyenlő a következővel:

$$\frac{1}{det(\mathbf{A})}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}) = \begin{cases} 1 & ha\ i = j \\ 0 & ha\ i \neq j. \end{cases}$$

Tehát $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Hasonlóan igazolható, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Így az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

mátrix az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix inverze.

Annak bizonyításához, hogy $\mathbf{A}$-nak pontosan egy inverze van, tegyük fel, hogy egy $\mathbf{B}$ mátrix is inverze az $\mathbf{A}$ mátrixnak. Akkor

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{E} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Már csak annak igazolása van hátra, hogy szinguláris mátrixnak nincs inverze. Legyen $\mathbf{A}$ egy szinguláris mátrix. Tegyük fel, indirekt módon, hogy A-nak van inverze. Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ egy inverze. Akkor (használva a determinánsok szorzástételét is)

$$1 = det(\mathbf{E}) = det(\mathbf{A}\mathbf{B}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}) = 0det(\mathbf{B}) = 0,$$

ami ellentmondás. Tehát egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze. □

5.5. Definíció *Adott $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixhoz hozzárendelt*

$$Adj(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot az $\mathbf{A}$ mátrix adjungáltjának nevezzük.

Az előző tétel alapján azt is mondhatjuk, hogy egy reguláris mátrix inverzét úgy származtathatjuk, hogy determinánsának reciprokával megszorozzuk a mátrix adjungáltját.

Példa. Adjuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét, ha létezik.

$|\mathbf{A}| = 2$, így

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ . & . & . \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ . & . & . \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ha $\mathbf{X}$ egy reguláris $\mathbf{A}$ mátrix inverze és $\underline{x}_j$ ennek az $\mathbf{X}$ mátrixnak a j-dik oszlopvektora, akkor az $\mathbf{A}\underline{x}_1$ szorzat megegyezik az egységmátrix j-dik oszlopvektorával. Így egy négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix inverzének oszlopvektorait úgy is megkaphatjuk, hogy megoldjuk az n darab $\mathbf{A}\underline{x}_1 = \underline{e}_1, \ldots \mathbf{A}\underline{x}_n = \underline{e}_n$ lineáris egyenletrendszert, ahol $\underline{e}_j$ jelöli az $\mathbf{E}_n$ egységmátrix j-dik oszlopvektorát. Ha $\mathbf{A}$ reguláris, akkor mind az n egyenletrendszer egyértelműen megoldható. A j-dik egyenletrendszer megoldása adja az A mátrix inverzének j-dik oszlopvektorát. Ha ezeket a lineáris egyenletrendszereket külön-külön oldanánk meg, akkor ugyanazon számolási lépéseket ismételgetni kellene, viszont az alábbi példa mutatja, hogy a lineáris egyenletrendszereket egyszerre is megoldhatjuk. A következő példa ezt a módszert szemlélteti.

Példa Adjuk meg az $bfA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét!

Írjuk fel az $\mathbf{A}\underline{x}_1 = \underline{e}_1$ és $\mathbf{A}\underline{x}_2 = \underline{e}_2$ lineáris egyenletrendszerek együttes kibővített mátrixát, azaz az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixot. Ezt olyan redukált sorlépcsős alakra lehet hozni, amelyben az $\mathbf{A}$ mátrix helyére az $\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ egységmátrix kerül. A korábban említettek alapján, az egységmátrix mögött megjelenő mátrix lesz a $\mathbf{A}$ mátrix inverze. Ha elvégezzük a számításokat, akkor a (mi példánkban már felírt) kibővített mátrix redukált sorlépcsős alakja a következő alakú lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Tehát az $\mathbf{A}$ mátrix inverze az $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ mátrix.

5.6. Megjegyzés *Ha egy egységelemes R gyűrű feletti $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixhoz van olyan R feletti $\mathbf{X}$ négyzetes mátrix, amelyre $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ teljesül, akkor azt is szoktuk mondani, hogy $\mathbf{X}$ az $\mathbf{A}$ mátrix jobb oldali inverze. Ha $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{X}$ az $\mathbf{A}$ bal oldali inverze. Ha egy számtest feletti négyzetes mátrixnak van bal oldali vagy jobb oldali inverze, akkor a determinánsok szorzástétele miatt $\mathbf{A}$ reguláris mátrix, és így $\mathbf{A}$-nak van inverze.*

5.7. Tétel *Egy F számtest elemeiből képezett reguláris $\mathbf{A}$ mátrix inverzének determinánsa megegyezik az $\mathbf{A}$ determinánsának reciprokával. Képletben: $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$.*

Bizonyítás. A determinánsok szorzástétele alapján

$$1 = |\mathbf{E}| = |\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}||\mathbf{A}^{-1}|,$$

amiből $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$ adódik. □

Példa. Adjuk meg az $\mathbf{A}^5\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$ mátrix determinánsát, ha

$$|\mathbf{A}| = 2, \ |\mathbf{B}| = 10, \ |\mathbf{C}| = -5.$$

A determinánsok szorzástétele miatt

$$|\mathbf{A}^5\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}| = |\mathbf{A}^5||\mathbf{B}||\mathbf{C}^{-1}| = |\mathbf{A}|^5|\mathbf{B}||\mathbf{C}^{-1}| = 32 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -64.$$

6. fejezet

Mátrix rangja

Ebben a fejezetben definiáljuk egy számtest elemeiből képezett mátrix rangjának fogalmát, és megmutatjuk, hogy egy számtet elemeiből képezett mátrix rngja megyegyzik a mátrixból kiválasztható nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximumával. Vizsgáljuk továbbá lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságát a lineáris egyenletrendszerek mátrixának rangja és kibővített mátrixának rangja közötti kapcsolata alapján.

6.1. Mátrix rangja

6.1. Definíció *Egy F számtest elemeiből képezett $m \times n$ típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix oszlopvektorai között lévő lineárisan függetlenek számának maximumát az $\mathbf{A}$ *mátrix rangjának nevezzük.*

6.2. Definíció *Legyenek $m, n \geq 1$ tetszőleges egész számok. Legyenek továbbá*

$$1 \leq i_1 < i_1 < \dots < i_k \leq min\{m, n\}$$

és

$$1 \leq j_1 < j_1 < \cdots < j_k \leq min\{m, n\}$$

*tetszőleges egész számok! Egy $m \times n$ típusú **A** mátrixból képezett*

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

*k-adrendű determinánst az **A** mátrix egy k-adrendű aldeterminánsának nevezzük.*

Egy **A** mátrixnak valamely r -edrendű aldeterminánsát tehát úgy képezzük, hogy az **A** mátrixból kiválasztunk r sort (a definícióban ezek voltak a mátrix i_1-dik, i_2-dik, ... , i_k-dik sorai) és r oszlopot (a definícióban ezek voltak a mátrix j_1-dik, j_2-dik, ... , j_k-dik oszlopai) és képezzük az ezek metszetében lévő elemek eredeti elrendezésével keletkezett $r \times r$-típusú mátrix determinánsát. Például, ha az

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 8 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

mátrixban rögzítjük a második és negyedik sor, valamint az első és negyedik oszlopot, akkor az így keletkezett másodrendű aldetermináns az

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsa, ami -4-gyel egyenlő.

6.2. Mátrix rangjának és aldeterminánsainak kapcsolata

6.3. Tétel *Számtest elemeiből képezett mátrix rangja megegyezik a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű aldeterminánsok rendszámának maximumával.*

Bizonyítás. Legyen F egy számtest és

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

egy F feletti tetszőleges mátrix. Jelölje r a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű aldeterminánsok rendszámának maximumát. Akkor van A-ban egy nem nulla értékű r-edrendű aldetermináns, de az összes r-nél nagyobb rendű aldeterminánsok (ha vannak ilyenek) mindegyikének értéke nulla. Jelölje

$$D = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix}$$

az $\mathbf{A}$ mátrix egy nem nulla értékű r-edrendű aldeterminánsát, továbbá jelölje $\mathbf{B}$ a D determináns mátrixát, azaz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{bmatrix}.$$

Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixnak a $\mathbf{B}$ mátrix képzéséhez felhasznált j_1-edik, j_2-edik, $\dots j_r$-edik oszlopvektoraiból álló vektorrendszer lineárisan független. Tegyük fel, hogy

$$\xi_1\underline{a}_{j_1} + \dots + \xi_r\underline{a}_{j_r} = \underline{0},$$

ahol $\underline{a}_{j_1}, \dots, \underline{a}_{j_r}$ az $\mathbf{A}$ mátrix j_1-dik, $\dots j_r$-edik oszlopvektorai, $\xi_1, \dots, \xi_r$ pedig F-beli skalárok. Akkor a $\xi_1, \dots, \xi_r$ skalárokra teljesül az

$$\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_r} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \dots & a_{i_rj_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

egyenlőség. Az egyenlőség bal oldalán szereplő mátrix a $\mathbf{B}$ mátrix. Mivel a $\mathbf{B}$ márix D determinánsa nem egyenlő nullával, azért a $\mathbf{B}$ mátrixnak van inverze a 5.4. Tétel szerint.

Beszorozva ezzel az inverzzel az egyenlőséget balról, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_r \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ezért $\xi_k = 0$ minden $k = 1, \dots, r$ indexre. Tehát az $\underline{a}_{j_1}, \dots, \underline{a}_{j_r}$ oszlopvektorok lineárisan függetlenek.

Legyen $j \notin \{j_1, \dots, j_r\}$ tetszőleges index. Megmutatjuk, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopvektora előáll az $\mathbf{A}$ mátrix j_1-edik, j_2-edik, $\dots j_r$-edik oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Legyen i tetszőleges sorindex ($1 \le i \le m$). Képezzük az

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_r} & a_{i_1 j} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_r} & a_{i_2 j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \dots & a_{i_r j_r} & a_{i_r j} \\ a_{i j_1} & a_{i j_2} & \dots & a_{i j_r} & a_{i j} \end{bmatrix}$$

mátrixot. Minden $i = 1, 2, \dots m$ indexre az $\mathbf{A}_i$ mátrix determinánsa nulla. Ez azért igaz, mert $i \in \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ esetén az $\mathbf{A}_i$ mátrix két sora egymással megegyezik (és így $det(\mathbf{A}_i) = 0$), $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ esetén pedig $det(\mathbf{A}_i)$ az $\mathbf{A}$ mátrix egy $r+1$-edrendű aldeterminánsa (és így $det(\mathbf{A}_i) = 0$, mert az $\mathbf{A}$ mátrix rangja r). Jelölje D_k ($k = 1, \dots, r$) az $\mathbf{A}_i$ mátrixban az utolsó sor a_{i,j_k} eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. (Megjegyezzük, hogy az $\mathbf{A}_i$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó előjeles aldetermináns egyenlő D-vel.) Az világos, hogy a D és D_k ($k = 1, \dots r$) determinánsok függetlenek az i indextől. Az utolsó sor szerinti kifejtést alkalmazva,

$$0 = det(\mathbf{A}_i) = a_{i,j_1} D_1 + \dots + a_{i,j_r} D_r + a_{ij} D.$$

Mivel ez a képlet minden $i = 1, 2, \dots, m$ index esetén érvényes, ezért kapjuk a

$$\underline{0} = \underline{a}_{j_1} D_1 + \dots + \underline{a}_{j_r} D_r + \underline{a}_j D$$

egyenlőséget, ahol $\underline{a}_{j_1}, \underline{a}_{j_2}, \dots \underline{a}_{j_r}, \underline{a}_j$ jelölik az $\mathbf{A}$ matrix j_1-edik, j_2-edik, $\dots$,j_r-edik, j-edik oszlopvektorát. Mivel $D \ne 0$ a feltétel miatt, ezért

$$\underline{a}_j = \frac{D_1}{D} \underline{a}_{j_1} + \dots + \frac{D_r}{D} \underline{a}_{j_r}.$$

Tehát az A mátrix j-dik oszlopvektora előáll az $\mathbf{A}$ mátrix j_1-edik, j_2-edik, $\ldots j_r$-edik oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként. Igy az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai között a j_1-dik, j_2-dik, $\ldots j_r$-dik oszlopvektorok egy maximálisan lineárisan független rendszert alkotnak. Így az $\mathbf{A}$ mátrix rangja egyenlő r-rel, azaz az $\mathbf{A}$ mátrixból kiválasztható nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximumával. $\square$

6.4. Megjegyzés Mint ahogy azt már korábban említettük, egy F számtest elemeiből képezett $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix sorai úgy is tekinthetők mint az F^n vektortér vektorai, ezért az $\mathbf{A}$ mátrix sorait az $\mathbf{A}$ mátrix sorvektorainak is nevezhetjük. Így tekinthetjük a mátrix sorvektorai (mint F^n-beli vektorok) között levő lineárisan függetlenek számának maximumát. Ez megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltjának rangjával. Mivel minden négyzetes mátrix determinánsa egyenlő a mátrix transzponáltjának determinánsával, ezért egy mátrixból kiválasztható nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximuma megegyezik a márix transzponáltjából kiválasztható nem nulla értékű aldeterminánsok rendszámának maximumával. Az előző tétel szerint ebből az következik, hogy egy mátrix rangja megegyezik a transzponáltjának rangjával. Így egy mátrixban az oszlopvektorok között levő lineárisan függetlenek számának maximuma (azaz a mátrix rangja) megegyezik a sorvektorai között levő lineárisan függetlenek számának maximumával.

6.3. Rangszámtétel

A ”Rangszámtétel” a mátrixok elemi átalakításaival kapcsolatos. Egy számtest feletti mátrix elemi átalakításain a következő átalakítások valamelyikét értjük:

- A mátrix két különböző oszlopát (illetve két különböző sorát) egymással felcseréljük.
- A mátrix valamelyik oszlopát (illetve valamelyik sorát) egy nem nulla számmal megszorozzuk.
- A mátrix egy oszlopához (illetve sorához) hozzáadjuk egy tőle különböző sorának (illetve oszlopának) számszorosát.

6.5. Tétel *(Rangszámtétel) Számtest elemeiből képezett mátrix rangja elemi átalakítások során nem változik.*

Bizonyítás. A 6.4. Megjegyzés szerint elegendő a tételt csak az oszlopokra vonatkozó elemi átalakításokra bizonyítani.

Mivel a vektorok lináris függetlensége a vektorok sorrendjének megválasztásától független, ezért egy mátrix rangja nem változik, ha két különböző oszlopát egymással felcseréljük.

A bizonyítás következő lépéseként megmutatjuk, hogy a mátrix rangja nem változik, ha valamelyik oszlopát megszorozzuk egy nem nulla számmal. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F számtest feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai, és legyen α tetszőleges F-beli nem nulla elem. Válasszuk ki az $\mathbf{A}$ mátrix egy oszlopát. Az általánosság mgszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez az első oszlop. Azt állítjuk tehát, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix rangja megegyezik annak a mátrixnak a rangjával, amit az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy kapunk, hogy annak első oszlopát megszorozzuk az α skalárral (a többi oszlopot változatlanul hagyjuk). Mivel $\alpha\underline{a}_1 \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$, ezért

$$\langle \alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle.$$

Legyen

$$\underline{a} = \xi_1 \underline{a}_1 + \cdots + \xi_n \underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$$

tetszőleges elem. Akkor

$$\underline{a} = (\frac{1}{\alpha}\xi_1)(\alpha\underline{a}_1) + \cdots + \xi_n \underline{a}_n$$

miatt

$$\underline{a} \in \langle \alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle,$$

és ezért

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle \subseteq \langle \alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle.$$

Tehát teljesül az

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle = \langle \alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$$

egyenlőség. A **??** Megjegyzés szerint ebből már következik a bizonyítandó állítás.

A bizonyítás harmadik részében azt igazoljuk, hogy egy mátrix rangja nem változik, ha valamelyik oszlopvektorához hozzáadjuk egy tőle különböző oszlopvektor konstansszorosát. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ $(n \geq 2)$ egy F test feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai, és legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Válasszuk ki a mátrix két oszlopát. Az általánoság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek az $\mathbf{A}$ mátrix első két oszlopai. Azt állítjuk tehát, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix rangja megegyezik annak a mátrixnak a rangjával, amelyet az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy kapunk, hogy annak első oszlopát kicseréljük az $\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2$ vektorra (a többi oszlopot változatlanul hagyjuk). Mivel $\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2 \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$, ezért

$$\langle(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_2),\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\rangle\subseteq\langle\underline{a}_1,\underline{a}_2\ldots,\underline{a}_n\rangle.$$

Legyen

$$a=\xi_1\underline{a}_1+\xi_2\underline{a}_2+\cdots+\xi_n\underline{a}_n\in\langle\underline{a}_1,\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\rangle$$

tetszőleges elem. Akkor

$$\underline{a}=\xi_1\underline{a}_1+(\alpha\xi_1+\xi_2-\alpha\xi_1)\underline{a}_2+\cdots+\xi_n\underline{a}_n=$$

$$=\xi_1(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_2)+(\xi_2-\alpha\xi_1)\underline{a}_2+\cdots+\xi_n\underline{a}_n$$

miatt

$$\underline{a}\in\langle(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_2),\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\rangle,$$

és ezért

$$\langle\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\rangle\subseteq\langle(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_2),\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\rangle.$$

Tehát teljesül az

$$\langle\underline{a}_1,\ldots,\underline{a}_n\rangle=\langle(\underline{a}_1+\alpha\underline{a}_2),\underline{a}_2,\ldots,\underline{a}_n\rangle$$

egyenlőség. A **??** Megjegyzés szerint ebből már következik a bizonyítandó állítás. □

A tétel alkalmazásával oldjuk meg a következő feladatot.

Feladat. Határozzuk meg a valós számok feletti

$$\begin{bmatrix}1&2&1&8\\2&-1&2&6\\3&1&-1&2\end{bmatrix}$$

mátrix rangját.

Megoldás. Adjuk a második sorhoz az első sor (-2)-szeresét, a harmadik sorhoz pedig az első sor (-3)-szorosát. A keletkezett mátrix

$$\begin{bmatrix}1&2&1&8\\0&-5&0&-10\\0&-5&-4&-22\end{bmatrix}.$$

Szorozzuk meg a második sort $-1/5$-del. A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix}1&2&1&8\\0&1&0&2\\0&-5&-4&-22\end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a második sor kétszeresét az első sorból, majd adjuk a második sor ötszörösét a harmadik sorhoz! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

egy nem nulla aldeterminánsa, így az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

mátrix rangja 3. Mivel közben elemi átalakításokat alkalmaztunk, ezért az eredeti mátrix rangja egyenlő 3-mal.

6.4. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának mátrixrangos feltétele

6.6. Tétel *Egy $\mathbb{F}$ test feletti lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha mátrixának rangja meggyezik a kibővített mátrixának rangjával. A lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha mátrixának és kibővített mátrixának rangja megegyezik az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek számával.*

Bizonyítás. Az, hogy az

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer megoldható, azzal ekvivalens, hogy az $\underline{b}$ vektor benne van az $\mathbb{F}^m$ vektortér $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorai által generált altérben, azaz

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle.$$

Mivel általában

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b} \rangle,$$

ezért az utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens (a 9. fejezetben szereplő 9.36. Tétel szerint), hogy az egyenlőség két oldalán szereplő alterek dimenziója ugyanaz. Ez azzal ekvivalens, hogy a két lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával.

Vizsgáljuk az egyértelmű megoldhatósággal kapcsolatos állítást. Tegyük fel, hogy a lineáris egyenletrendszer egyértelműen oldható meg, azaz van egy és csak egy olyan $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ vektor, amelyre teljesül az $c_1\underline{a}_1 + \cdots + c_n\underline{a}_n = \underline{b}$ egyenlőség. Megmutatjuk, hogy ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a szóban forgó vektorok lineárisan függnek egymástól, azaz $\xi_1\underline{a}_1 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n = \underline{0}$ teljesül úgy is valamely $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{F}$ skalárokkal, hogy azok közül valamelyik nem egyenlő a nullával. Akkor a $\begin{bmatrix} \xi_1 + c_1 \\ \xi_2 + c_2 \\ \vdots \\ \xi_n + c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ vektorra

$$(\xi_1 + c_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\xi_n + c_n)\underline{a}_n =$$

$$= (\xi_1\underline{a}_1 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n) + (c_1\underline{a}_1 + \cdots + c_n\underline{a}_n) = \underline{0} + \underline{b} = \underline{b}$$

teljesül, és így a $\begin{bmatrix} \xi_1 + c_1 \\ \xi_2 + c_2 \\ \vdots \\ \xi_n + c_n \end{bmatrix}$ vektor az egyenletrendszer $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$-től különböző megoldása, ami ellentmondás. Tehát az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, azaz a közöttük levő lineárisan függetlenek számának maximuma n (ami egyenlő az ismeretlenek számával). Mivel a $\underline{b}$ vektor az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorok lineáris kombinációja, ezért az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorok között levő lineárisan függetlenek száma is n.

Fordítva, tegyük fel, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$) vektorok és az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}$ vektorok között is a lineárisan függetlenek számának maximuma egyenlő az ismeretlenk számával, azaz n-nel. Akkor az egyenletrendszernek van megoldása a tétel első állítása szerint. Mivel az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért lineáris kombinációjukként minden vektor, így a $\underline{b}$ vektor is egyféleképpen állítható elő. Tehát a lineáris egyenletrendszernek egy megoldása létezik. $\square$

6.7. Tétel *Egy olyan lineáris egyenletrendszer, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixa reguláris.*

Bizonyítás. A 6.6. Tétel miatt egy n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának rangja és kiegészített mátrixának rangja egyenlő n-nel, azaz az ismeretlenek számával. A 6.3. Tétel szerint ez azzal ekvivalens, hogy az egyenletrendszer mátrixa reguláris. $\square$

6.8. Megjegyzés *Egy homogén lineáris egyenletrendszernek mindig van megoldása (a triviális megoldás). Ezért a homogén lineáris egyenletrendszereknél igazából az a probléma, hogy mikor van a triviálistól különböző megoldása. A 6.6. Tétel alapján egyszerűen adódik a következő eredmény.*

6.9. Tétel *Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának rangja kisebb az ismeretlenek számánál.*

6.10. Tétel *Egy olyan homogén lineáris egyenletrendszernek, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletredszer mátrixa szinguláris.*

Bizonyítás. A 6.7. Tétel felhasználásával az állítás nyílvánvaló. $\square$

7. fejezet

A Cramer-szabály

Ebben a fejezetben egy speciális egyenletrendszerre adunk megoldást a determináns fogalmának felhasználásával. Ezt a megoldási módszer a "Cramer-szabály" néven ismert.

7.1. Tétel *(A Cramer-szabály) Ha egy n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó* $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ *lineáris egyenletrendszer* $\mathbf{A}$ *mátrixa reguláris, akkor az egyenletrendszer egyértelműen megoldható, és ezt a megoldást a következő képlet szolgáltatja:*

$$x_k = \frac{det\mathbf{A}_k}{det\mathbf{A}} \ (k = 1, \ldots, n),$$

ahol az $\mathbf{A}_k$ *mátrixot az* $\mathbf{A}$ *mátrixból úgy származtatjuk, hogy annak k-dik oszlopa helyére beírjuk az egyenletrendszer konstansainak* $\underline{b}$ *oszlopvektorát.*

Bizonyítás Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix a feltétel szerint reguláris, ezért létezik inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Megszorozva ezzel az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenlőséget balról, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{x} = \mathbf{A}^{-1}\underline{b} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy

$$x_k = \frac{1}{det(\mathbf{A})}(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk}),$$

amelyben a

$$b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk}$$

szorzatösszeg megegyezik az

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix k-dik oszlopa szerinti kifejtésével, ami viszont (a Kifejtési tétel szerint) egyenlő $det(\mathbf{A}_k)$-val. Így

$$x_k = \frac{det\mathbf{A}_k}{det\mathbf{A}} \; (k = 1, \dots, n).$$

□

Feladat. A Cramer-szabály alkalmazásával oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert!

$$\begin{array}{cccc} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & = 4 \\ 3x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = 11 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & = 11 \end{array}$$

Megoldás. A lineáris egyenletrendszer mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix},$$

a konstansok oszlopvektora pedig

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Mivel

$$det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

$$det(\mathbf{A}_1) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180,$$

$$det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60,$$

$$det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60,$$

ezért

$$x_1 = \frac{det(\mathbf{A}_1)}{det(\mathbf{A})} = \frac{180}{60} = 3, \quad x_2 = \frac{det(\mathbf{A}_2)}{det(\mathbf{A})} = \frac{60}{60} = 1, \quad x_3 = \frac{det(\mathbf{A}_3)}{det(\mathbf{A})} = \frac{60}{60} = 1.$$

8. fejezet

Mátrix sajátértékei, sajátvektorai

Mint ahogy azt a bevezető fejezetben definiáltuk, adott F számtest esetén F^n jelöli az F elemeiből képezhető összes olyan n-elemű $\underline{x}$ sorozatok halmazát, ahol a sorozatokat oszlopos formában írtuk. Ekkor F^n elemei úgy is tekinthetők, mint n sorból és egyetlen oszlopból álló mátrixok. Így tetszőleges F feletti $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix és tetszőleges $\underline{x} \in F^n$ esetén elvégezhető $\mathbf{A}$-nak $\underline{x}$-szel képezett $\mathbf{A}\underline{x}$ szorzata. Bizonyos esetekben előfordulhat, hogy ez a szorzat az $\underline{x}$ vektornak egy $\lambda \in F$ számmal képezett szorzata. Ilyen esettel foglalkozunk a következő részben.

8.1. A sajátérték és a sajátvektor fogalma

8.1. Definíció *Egy F számtest valamely λ elemét az F számtest feletti $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha megadható olyan $\underline{x} \in F^n$ vektor, amelyre teljesül az*

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$$

egyenlőség. A feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ vektorokat az A mátrix sajátvektorainak (pontosabban, a λ sajátértékhez tartozó sajátvektoroknak) nevezzük.

8.2. Megjegyzés *Adott $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix esetén F^n minden vektora legfeljebb egy sajátértékhez tartozó sajátvektor lehet. Ugyanis, ha $\underline{x}$ egy $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix $\alpha, \beta \in F$ sajátértékekhez tartozó sajátvektor, akkor*

$$\alpha \underline{x} = \mathbf{A}\underline{x} = \beta \underline{x},$$

amiből $\underline{x} \neq \underline{0}$ miatt $\alpha = \beta$ következik.

8.3. Tétel *Tetszőleges $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix tetszőleges sajátértékéhez tartozó sajátvektorok a $\underline{0}$ vektorral együtt az F^n vektortér egy alterét alkotják.*

Bizonyítás. Jelölje W az F^n vektortér azon részhalmazát, amely a $\underline{0}$ vektorból és az $\mathbf{A}$ mátrix valamely λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektoraiból áll. Tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in W$ és tetszőleges $\xi, \eta \in F$ skalárok esetén

$$\mathbf{A}(\xi\underline{x} + \eta\underline{y}) = \xi(\mathbf{A}\underline{x}) + \eta(\mathbf{A}\underline{y}) = \xi(\lambda\underline{x}) + \eta(\lambda\underline{y}) = \lambda(\xi\underline{x} + \eta\underline{y}).$$

Tehát

$$\xi\underline{x} + \eta\underline{y} \in W.$$

A 9.30. Tétel miatt W az F^n vektortér egy altere. □

8.4. Definíció *Egy $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékeiből, illetve a nullvektorból álló alteret az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó un. sajátaltérnek nevezzük.*

Majd a 9. fejezetben definiáljuk a vektorterek dimenziójának fogalmát. Ennek alapján beszélhetünk egy sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziójáról is.

8.5. Definíció *Egy $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátaltér dimenzióját a sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük.*

8.2. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix sajátértékei

8.6. Definíció *Egy valós számokból álló négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikus mátrixnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Az $\mathbf{A}$ mátrixot ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.*

A szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokra (mint a valós számok számteste feletti mátrixokra) úgy is tekinthetünk, mint a komplex számok feletti olyan mátrixokra, amelyek elemei valós számok. Ezért beszélhetünk valós, illetve komplex sajátértékeikről is. A következő tétel arra ad választ, hogy mik lehetnek a szimmetrikus, illetve a ferdén szimmetrikus mátrixok komplex sajátértékei.

8.7. Tétel *Szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós szám. Ferdén szimmetrikus mátrix minden sajátértéke képzetes szám.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-típusú (azaz n-edrendű) valós elemű négyzetes mátrix. Legyen $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke. Akkor van olyan $\underline{0} \neq \underline{v} = \underline{x} + i\underline{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor, hogy

$$\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}.$$

Szorozzuk be ezt az egyenlőséget balról a $\underline{v}$ vektor konjugáltjának transzponáltjával. Ekkor az

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}\underline{v} = \lambda(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

egyenlőséget kapjuk. Vegyük mindkét oldal konjugáltjának transzponáltját. Ekkor

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}^T\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

adódik, felhasználva azt is, hogy valós szám megegyezik a konjugáltjával. Ha A szimmetrikus, akkor ezen utóbbi egyenlőség

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

alakú. A második és az utolsó egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\lambda(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2) = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2),$$

azaz

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy λ valós szám.

A ferdén szimmetrikus eset bizonyítása a szimmetrikus esettől csak annyiban különbözik, hogy az

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}^T\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

egyenlőségből

$$\overline{(\underline{v})}^T (-\mathbf{A})\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

következik, s ezért $\lambda = -\overline{\lambda}$ miatt $b = 0$, azaz $\lambda = ib$ adódik; tehát ferdén szimmetrikus esetben a λ sajátérték képzetes szám. $\square$

8.3. Mátrix karakterisztikus egyenlete

8.8. Definíció *Legyen* $\mathbf{A}$ *egy* F *számtest feletti* $n \times n$ *típusú (négyzetes) mátrix. A*

$$k_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n |\mathbf{A} - x\mathbf{E}|$$

polinomot az A *mátrix karakterisztikus polinomjának, az*

$$|\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = 0$$

egyenletet pedig az A *mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.*

Az előző definícióban $|\mathbf{A} - x\mathbf{E}|$ az $[\mathbf{A} - x\mathbf{E}]$ mátrix determinánsát jelöli. Tehát egy $n \times n$ típusú $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, illetve karakterisztikus egyenlete

$$k_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}),$$

illetve

$$det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = 0$$

módon is felírható.

A karakterisztikus polinom, illetve a katakterisztikus egyenlet definíciójában olyan mátrix determinánsa szerepel, amely mátrix főátlójában az F számtest feletti elsőfokú polinomok állnak. Mint ahogy azt már korábban említettük, adott számtest feletti polinomok halmaza egységelemes kommutatív gyűrűt alkot a polinomok összeadására és szorzására nézve, így a karakterisztikus polinom, illetve a katakterisztikus egyenlet definíciójában szereplő mátrix determinánsa értelmezve van.

8.9. Tétel *Egy* F *számtest valamely* λ *eleme akkor és csak akkor sajátértéke egy* F *feletti* A *mátrixnak, ha* λ *gyöke az* A *mátrix karakterisztikus egyenletének, azaz teljesül rá az* $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ *egyenlőség.*

Bizonyítás. $\lambda \in F$ akkor és csak akkor sajátértéke egy $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrixnak, ha van olyan $\underline{0} \neq \underline{x} \in F^n$ vektor, hogy

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda\underline{x} = \lambda\mathbf{E}\underline{x},$$

azaz

$$[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]\underline{x} = \underline{0}.$$

Ezen utóbbi kifejezés egy homogén lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja. λ tehát akkor és csak akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha ennek az egyenletrendszernek van nem-triviális megoldása, ami a 6.10. Tétel miatt azzal ekvivalens, hogy az $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]$ mátrix szinguláris, azaz

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0.$$

□

8.10. Megjegyzés *Egy $\mathbf{A} \in \mathbf{M_n}(\mathbf{F})$ mátrix sajátértékeinek, illetve sajátvektorainak meghatározását tehát azzal kezdjük, hogy meghatározzuk a mátrix karakterisztikus egyenletének F számtestbeli gyökeit. Ha vannak ilyenek (jelöljön egy sajátértéket λ), akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok az $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem-triviális megoldásvektorai lesznek. A megoldásvektorok halmaza (a sajátvektorok halmaza hozzávéve a nullvektort) a 8.3. Tétel miatt az F^n vektortér egy altere, ennek dimenziója, azaz a λ sajátérték geometriai multiplicitása megegyezik a fenti homogén lineáris egyenletrendszer megoldása során szabadon választható ismeretlenek számával (lásd a Gauss-módszert).*

8.11. Megjegyzés *Egy mátrixnak nincs mindig sajátértéke. Például az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

mátrix karakterisztikus egyenlete

$$x^2 + 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nincs gyöke a valós számok $\mathbb{R}$ halmazában, ezért az $\mathbf{A}$ mátrixnak nincs sajátértéke $\mathbb{R}$-ben.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixot, mint a komplex számok $\mathbb{C}$ számteste feletti mátrixot tekintjük, akkor karakterisztikus egyenletének megoldásai $\mathbb{C}$-ben $\pm i$, és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\pm i$.

8.12. Definíció *Egy $\mathbf{A}$ mátrix valamely λ sajátértékének algebrai multiplicitásán azt a pozitív egász számot értjük, amely megegyezik λ-nak, mint a $|\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökének multiplicitásával. Egy mátrix spektrumán a sajátértékeiből álló rendszert értjük, mindegyiket annyiszor véve, amennyi annak algebrai multiplicitása.*

8.13. Megjegyzés *Bizonyítás nélkül közöljük, hogy egy $\mathbf{A}$ mátrix valamely λ sajátértékének geometriai multiplicitása kisebb vagy egyenlő mint az algebrai multiplicitása.*

Példa. Az
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$
felső háromszögmátrix karakterisztikus egyenlete $(1-\lambda)^3 = 0$, így egyetlen sajátértéke van; ez egyenlő 1-gyel. Ennek a sajátértéknek 3 az algebrai multiplicitása. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sajátvektorokra
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
teljesül, amiből $z = 0$ adódik (x és y pedig tetszőleges olyan valós számok, amelyek egyike nem nulla). Így a sajátvektorra
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
adódik. Tehát a $\lambda = 1$ sajátérték saját altere az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített altér. Ennek dimenziója 2, így a $\lambda = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása 2. Tehát a geometriai multiplicitás kisebb az algebrai multiplicitásnál.

8.4. Mátrixok hasonlósága

8.14. Definíció *Egy F számtest feletti azonos típusú* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *négyzetes mátrixok esetén akkor mondjuk, hogy az* $\mathbf{A}$ *mátrix hasonló a* $\mathbf{B}$ *mátrixhoz, ha megadható olyan F feletti reguláris* $\mathbf{C}$ *mátrix, amelyre* $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ *teljesül.*

(1) Mivel tetszőleges négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A} = \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{E}$ teljesül, és mert $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1}$, ezért minden mátrix hasonló önmagához. Más szavakkal: a mátrixok hasonlósága reflexív reláció.

(2) Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ egyenlőség ekvivalens a $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}$ egyenlőséggel, ami $\mathbf{B} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$ alakban is írható, és ami annyit jelent, hogy $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Így tetszőleges $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor hasonló $\mathbf{B}$-hez, ha $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Azért a hasonlóság definíciójában a sorrendnek nincs jelentősége. Más szavakkal: a mátrixok hasonlósága szimmetrikus reláció.

(3) Ha az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, továbbá $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is hasonló mátrixok, akkor megadhatók olyan reguláris $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ mátrixok, amelyekre $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Y}\mathbf{X}$ teljesül. A determinánsok szorzástétele miatt $\mathbf{Y}\mathbf{X}$ reguláris mátrix. Továbbá $(\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}$. Így $\mathbf{A} = (\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{Y}\mathbf{X})$, ami annyit jelent, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ hasonló mátrixok. Tehát a mátrixok hasonlósága tranzitív reláció.

8.15. Tétel *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, így hasonló mátrixok spektruma közös.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egy F számtest elemeiből képezett hasonló mátrixok. Akkor van olyan F feletti reguláris $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$. Ezért az F tetszőleges λ elemére

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} - \mathbf{C}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}| =$$

$$= |\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{C}| = |\mathbf{C}^{-1}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}||\mathbf{C}| = |\mathbf{C}^{-1}||\mathbf{C}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| =$$

$$= |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{E}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}|.$$

Így

$$k_{\mathbf{A}}(x) = k_{\mathbf{B}}(x),$$

azaz az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek. Ebből már következik, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok spektruma közös. □

8.16. Megjegyzés *A 8.15. Tétel állításának megfordítása nem igaz. Például a valós elemű*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok esetén mindkét mátrix karakterisztikus polinomja x^2-2x+1, a mátrixok mégsem hasonlóak, hiszen az $\mathbf{E}$ egységmátrix csak önmagával hasonló.

9. fejezet

Vektortér

9.1. A vektortér fogalma és alaptulajdonságai

9.1. Definíció *Egy nem üres V halmazról akkor mondjuk, hogy vektorteret alkot az F számtest felett, ha a V halmazon értelmezve van egy $+$ összeadás úgy, hogy $(V;+)$ egy kommutatív csoport, továbbá minden $(\alpha, \underline{a}) \in \mathbb{F} \times V$ elempárhoz hozzá van rendelve egyértelműen egy V-beli $\alpha\underline{a}$ módon jelölt elem úgy, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ és $\underline{a}, \underline{b} \in V$ elemek esetén az alábbi egyenlőségek teljesülnek:*

(i) $\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b}$,

(ii) $(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a}$,

(iii) $(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a})$,

(iv) $1\underline{a} = \underline{a}$, *ahol* 1 *az* $\mathbb{F}$ *számtest egységelemét jelöli.*

9.2. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortérben $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül valamely $\underline{a}$ vektorra és α skalárra, ha $\underline{a} = \underline{0}$ vagy $\alpha = 0$.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $\underline{a} = \underline{0}$ vagy $\alpha = 0$, akkor $\alpha\underline{a} = \underline{0}$.

Legyen $\underline{a} \in V$ tetszőleges vektor. Akkor

$$0\underline{a} = (0 + 0)\underline{a} = 0\underline{a} + 0\underline{a},$$

amiből
$$0\underline{a} = \underline{0}$$
következik.

Legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Akkor
$$\alpha\underline{0} = \alpha(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0},$$
amiből
$$\alpha\underline{0} = \underline{0}$$
következik.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ teljesül valamely $\alpha \in F$ skalárra és $\underline{a} \in V$ vektorra. Elegendő megmutatni, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor $\underline{a} = \underline{0}$. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Akkor
$$\underline{a} = 1\underline{a} = (\frac{1}{\alpha}\alpha)\underline{a} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\underline{a}) = \frac{1}{\alpha}\underline{0} = \underline{0},$$
felhasználva a vektortér definíciójában szereplő negyedik azonosságot és a fentebb már bizonyítottakat. □

9.3. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}$ vektorára és tetszőleges $\alpha \in F$ skalárra, $\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}$, ahol $-\underline{a}$ az $\underline{a}$ vektor ellentettjét jelöli.*

Bizonyítás. A 9.2. Tétel és a vektortér definíciójában szereplő első azonosság felhasználásával,
$$\underline{0} = \alpha\underline{0} = \alpha(\underline{a} + (-\underline{a})) = \alpha\underline{a} + \alpha(-\underline{a}),$$
amiből
$$\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a})$$
adódik.

A 9.2. Tétel és a vektortér definíciójában szereplő második azonosság felhasználásával,
$$\underline{0} = 0\underline{a} = (\alpha + (-\alpha))\underline{a} = \alpha\underline{a} + (-\alpha)\underline{a},$$
amiből
$$-(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}$$
adódik. Tehát
$$\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}.$$
□

9.4. Definíció *Egy $\mathbb{F}$ számtest feletti V vektortér*

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$$

vektorainak az

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

skalárokkal képezett lineáris kombinációján az

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{a}_n \in V$$

vektort értjük. Akkor mondjuk, hogy egy $\underline{b} \in V$ vektor előáll az

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in V$$

vektorok lineáris kombinációjaként, ha megadhatók olyan

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

skalárok, amelyekkel teljesül a

$$\underline{b} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{a}_n$$

egyenlőség.

9.2. Vektorok lineáris függetlensége és lineáris függősége

9.5. Megjegyzés A 9.2. Tétel alapján tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok esetén

$$0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_n = \underline{0},$$

azaz a 0 skalárokkal képezett lineáris kombináció eredményeként a nullvektort kapjuk. A vektorterek elméletében fontos szerepet játszanak azok a vektorok, amelyeknél nincs is más lineáris kombináció, amely eredményeként a nullvektor adódik.

9.6. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér*

$$\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$$

vektorairól azt mondjuk, hogy lineárisan függetlenek, ha az

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

egyenlőségből

$$\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_n = 0$$

következik. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Ez utóbbi annyit jelent, hogy megadhatók olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ skalárok, amelyek között van legalább egy nem-nulla, s amelyekre fennáll az

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \dots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

egyenlőség.

9.7. Megjegyzés A vektorok lineáris függetlenségének definíciójában (9.6. Definíció) csak véges sok vektorból álló vektorrendszer lineáris függetlenségét definiáltuk, mert főleg ezzel a fogalommal foglalkozunk, de megjegyezzük, hogy a vektorok lineáris függetlensége vektorok tetszőleges számosságú (nem-üres) részhalmazára is értelmezhető. Egy F számtest feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges (nem-üres) vektorrendszerét lineárisan függetlennek nevezzük, ha annak bármely (nem-üres) véges részredszere lineárisan független.

A következőkben a lineáris független vektorrendszerekkel kapcsolatos alapvető tételeket ismertetjük.

9.8. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer bármely nem-üres részrendszere is lineárisan független.*

Bizonyítás. Ha az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ lineárisa független vektorrendszernek $\{\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_k}\}$ egy nem-üres lineárisan függő részrendszere, azaz

$$\alpha_{i_1} \underline{a}_{i_1} + \dots + \alpha_{i_k} \underline{a}_{i_k} = \underline{0}$$

úgy is teljesül valamely $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ skalárokkal, hogy közöttük van nullától különböző, akkor ezt a lineáris kombinációt úgy kiegészítve, hogy a benne nem szereplő $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$-beli vektorokat is beírjuk 0 együtthatókkal, akkor az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszernek olyan lineáris kombinációját kapjuk, amely a nullvektorral egyenlő, de a benne szereplő együtthatók között van olyan, amelyik nem nulla. Ez viszont ellentmond annak, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független. □

9.9. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazza a nullvektort.*

Bizonyítás. Mivel a nullvektor lineárisan függő, ezért a 9.8. Tétel szerint nem lehet eleme egy lineárisan független vektorrendszernek. □

9.10. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer páronként különböző vektorokból áll.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $\underline{a}$ vektor esetén

$$1\underline{a} + (-1)\underline{a} = \underline{0},$$

ezért az $\{\underline{a}, \underline{a}\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Így a 9.8. Tétel miatt egy lineárisan független vektorrendszer a vektortér valamely vektorát vagy nem tartalmazza, vagy ha tartalmazza, akkor pontosan egyszer. □

9.11. Tétel *Ha $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F számtest feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere, akkor a V bármely vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F számtest feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere. Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \ldots \alpha_n\underline{a}_n = \beta_1\underline{a}_1 + \cdots + \beta_n\underline{a}_n.$$

Akkor

$$(\alpha_1 - \beta_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{a}_n = \underline{0},$$

amiből

$$\alpha_i - \beta_i = 0,$$

azaz

$$\alpha_i = \beta_i$$

következik minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. □

9.12. Tétel *Ha $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ egy F számtest feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere, $\underline{b}$ pedig a vektortér olyan vektora, amely nem állítható elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer lineárisan független.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n + \beta\underline{b} = \underline{0}$$

valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Mivel $\underline{b}$ nem állítható elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért $\beta = 0$. Ekkor viszont

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}.$$

Mivel az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\alpha_i = 0$ minden $i = 1, \dots, n$ indexre. Mivel minden együttható egyenlő a nullával, ezért az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer lineárisan független.

9.13. Tétel *Egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $\underline{a}$ vektor nem a nullvektor. Legalább kételemű vektorendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a redszert alkotó vektorok egyikét sem lehet kifejezni a rendszerhez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer lineárisan független. Akkor $\underline{a}$ nem lehet a nullvektor, mert ha $\underline{a}$ a nullvektor lenne, akkor tetszőleges nem nulla α skalár esetén $\alpha\underline{a}$ a nullvektor lenne, amiből $\alpha = 0$ következne, mivel az egyelemű $\underline{a}$ vektorrendszer lineárisan független. Ez ellentmond annak, hogy α nullától különböző. Fordítva, ha $\underline{a}$ nem a nullvektor, akkor a 9.2. Tétel miatt az $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ feltételből $\alpha = 0$ következne, azaz az egyelemű $\underline{a}$ vktorrenszer lineárisan független. Foglalkozzunk ezek után a legalább két elemet tartalmazó vektorrendszerekkel.

Legyen $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$ $(n \geq 2)$ egy lineárisan független vektorrenszer. Tegyük fel, indirekt módon, hogy valamelyikük (például $\underline{a}_1$) kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_1 = \beta_2\underline{a}_2 + \cdots + \beta_n\underline{a}_n.$$

Akkor

$$\underline{0} = -\underline{a}_1 + \beta_2\underline{a}_2 + \cdots + \beta n\underline{a}_n,$$

azaz van a rendszert alkotó vektoroknak olyan lineáris kombinációja, amelynek eredményeként a nullvektor adódik, de az együtthatók között van nem nulla (ugyanis, az $\underline{a}_1$

együtthatója -1). Azt kapjuk tehát, hogy a vizsgált vektorrendszer lineárisan függő. Ez ellentmond az eredeti feltételnek, vagyis annak, hogy a vizsgált vektorrendszer lineárisan független. Mivel ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltételünk nem helyes. Így a vizsgált vektorok egyike sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n\}$ $(n \geq 2)$ olyan vektorrendszer, amelyben egyiket sem lehet kifejezni a többi lineáris kombinációjaként. Tegyük fel, indirekt módon, hogy a vektorrendszer nem lineárisan független (és így lineárisan függő). Akkor megadhatók olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalárok, hogy

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0},$$

és (például) $\alpha_1 \neq 0$. Akkor

$$\underline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{a}_2 + \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{a}_n,$$

azaz az $\underline{a}_1$ vektort ki lehet fejezni a rendszert alkotó többi vektor lineáris kombinációjaként. Ez ellentmond az eredeti feltételnek, vagyis annak, hogy a vektorrendszer egyik tagja sem fejezhető ki a többi lineáris kombinációjaként. Mivel ellentmondásra jutottunk, az indirekt feltételünk nem helyes. Így a vizsgált vektorokrendszer lineárisan független. □

Az előző tétel egyszerű következménye az alábbi tétel.

9.14. Tétel *Egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha az $\underline{a}$ vektor a nullvektor. Legalább kételemű vektorendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha legalább egyikük előállítható a redszerthez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként.*

9.15. Definíció *Egy V vektortér $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ lineárisan független vektorrendszerről azt mondjuk, hogy maximálisan lineárisan független, ha V tetszőleges b vektora esetén a $\{b, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő, azaz az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszert a V akármelyik vektorával egészíjük ki, lineárisan függő vektorrendszert kapunk.*

9.3. Generátorrendszer, bázis, dimenzió

9.16. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n\}$ vektorrendszerét a V vektortér egy generátorrendszerének nevezzük, ha V minden vektora előáll az $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

9.17. Megjegyzés A generátorrendszer fogalmát csak véges sok vektorból álló vektorrendszerre értelmeztük, de megjegyezzük, hogy tetszőleges számosságú (nemüres) vektorrendszerre is értelmezhető. Egy F számtest feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges (nem-üres) $\mathcal{G}$ vektorrendszerét a vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha a V vektortér bármely $\underline{v}$ vektorához megadható $\mathcal{G}$-nek olyan véges részrendszere, amelyhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként előállítható a $\underline{v}$ vektor. Jó példa erre egy F számtest feletti egyváltozós polinomok vektortere, amelyben az $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok generátorrendszert alkotnak.

9.18. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n\}$ generátorrendszerét minimális generátorrendszernek nevezzük, ha bárhogy is hagyunk el ebből a rendszerből vektorokat, akkor vagy az üres halmazt kapjuk, vagy a keletkezett vektorrendszer már nem generátorrendszer.*

9.19. Tétel *(Kicserélési tétel) Ha $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ egy lineárisan független vektorrendszere, $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$ pedig egy generátorrendszere egy F számtest feletti V vektortérnek, akkor bármely f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorhoz van olyan g_j vektor, hogy az*

$$\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_{i-1}, \underline{g}_j, \underline{f}_{i+1} \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy $dimV \geq 1$. Ekkor a generátorrendszer tartalmaz legalább egy nem nullvektort. Így, ha $n = 1$, akkor a független vektorrendszer vektora helyére beírva a generátorrendszer egy nem nulla vektorát, egy lineárisan független vektorrendszert kapunk. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $n \geq 2$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy van olyan $\underline{f}_i$ vektor (legyen ez, például, az $\underline{f}_1$ vektor), amelyet bármelyik $\underline{g}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ vektorral is cserélünk ki, a cserével keletkezett

$$\underline{g}_j, \ldots, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan függő. Akkor minden $j = 1, \ldots, m$ esetén vannak olyan $\beta_j, \alpha_{i,j}$ $(i = 2, \ldots, n)$ skalárok, hogy

$$\beta_j \underline{g}_j + \alpha_{2,j} \underline{f}_2 + \cdots + \alpha_{n,j} \underline{f}_n = \underline{0},$$

de az együtthatók között van olyan, amelyik nem a nulla. Mivel az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független (mert az

$$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

lineárisan független vektorrendszer nem üres részrendszere), ezért $\beta_j \neq 0$ tetszőleges $j = 1, \ldots, m$ index esetén. Tehát $\underline{g}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ kifejezhető az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorok lineáris kombinációjaként. Mivel a

$$\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$$

vektorrendszer generátorrendszer, ezért $\underline{f}_1$ kifejezhető a

$$\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$$

vektorok, és így az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineáris kombinációjaként. Ez viszont azt jelenti, hogy az

$$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan függő. Ez ellentmondás. Így az indirekt állítás nem helyes, azaz a tétel állítása az igaz. $\square$

9.20. Tétel *Ha $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ egy lineárisan független vektorrendszere, $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$ pedig egy generátorrendszere egy F számtest feletti V vektortérnek, akkor $n \leq m$.*

Bizonyítás. Az $\underline{f}_1$ vektorhoz van olyan vektor (pl. $\underline{g}_1$) úgy, hogy

$$\underline{g}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

lineárisan független vektorrendszer. Az $\underline{f}_2$-höz is van olyan vektor a generátorrendszerben, amit $\underline{f}_2$ helyébe írva, lineárisan független vektorrendszert kapunk. Ebben a $\underline{g}_2$ nem fordulhat elő kétszer, ezért ez a vektor nem egyenlő $\underline{g}_1$-gyel. Feltehetjü (az indexek esetleges felcserélése után), hogy ez a vektor a $\underline{g}_2$ vektor, azaz a

$$\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{f}_3, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független. Mivel azt az eljárást folytathatjuk mindaddig, amig a független vektorrendszer vektorai el nem fogynak, ezért $n \leq m$. □

9.21. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ vektorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük, ha V minden vektora előáll egyértelműen az $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Ha $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ egy F számtest feletti V vektortér bázisa, akkor tetszőleges $\underline{a} \in V$ vektorhoz van egy és csak egy F-beli elemekből álló olyan $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ elemsorozat, amelyre $\underline{a} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n$ teljesül. Az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárokat az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

9.22. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortér valamely nemüres vektorrendszere akkor és csak akkor bázis, ha független generátorrendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer egy bázis. Akkor a tér minden vektora előállítható (egyértelműen) a benne levő vektorok lineáris kombinációjaként, és így a vektorrendszer a vektortér generátorrendszere. Mivel minden vektort, így a nullvektort is csak egyféleképpen lehet előállítani a rendszerben levő vektorok lineáris kombinációjaként. Viszont a nullvektorra érvényes a

$$0\underline{a}_1 + 0\underline{a}_2 + \cdots + 0\underline{a}_n = \underline{0}$$

előállítás, ezért tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalárok esetén az

$$\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

feltételből

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

következik, azaz a vektorrendszer lineárisan független.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ egy lineárisan független generátorrendszer. Akkor a vektortér minden vektora előáll a rendszerhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként. Tegyük fel, hogy valamely b vektorra érvényesek az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{b}$$

és

$$\alpha_1'\underline{a}_1 + \alpha_2'\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n'\underline{a}_n = \underline{b}$$

előállítások. Akkor

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \alpha_1'\underline{a}_1 + \alpha_2'\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n'\underline{a}_n,$$

amiből

$$(\alpha_1 - \alpha_1')\underline{a}_1 + (\alpha_2 - \alpha_2')\underline{a}_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha_n')\underline{a}_n = \underline{0}$$

adódik. Mivel (a feltétel szerint) az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, minden $i = 1, \ldots, n$ indexre $\alpha_i - \alpha_i' = 0$, azaz $\alpha_i = \alpha_i'$. Tehát minden vektort pontosan egyféleképpen lehet előállítani az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer bázis. □

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő tételt.

9.23. Tétel *Tetszőleges F számtest feletti $V \neq \{\underline{0}\}$ vektortér tetszőleges, nemüres vektorrendszere esetén a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

1. *a vektorrendszer a V vektortér bázisa;*
2. *a vektorrendszer a V vektortér maximális független rendszere.*
3. *a vektorrendszer a V vektortér minimális generátorrendszere.*

9.24. Megjegyzés A bázis fogalmát csak véges sok vektorból álló vektorrendszerre értelmeztük, de megjegyezzük, hogy tetszőleges számosságú (nemüres) vektorrendszerre is értelmezhető. Egy F számtest feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges $\mathcal{B}$ vektorrendszerét a vektortér bázisának (pontosabban: Hamel-bázisának) nevezzük, ha a V

vektortér bármely $\underline{v}$ vektorához megadható $\mathcal{B}$-nek egy és csak egy olyan véges részrendszere, amelyhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként egyértelműen előállítható a $\underline{v}$ vektor. Egy F számtest feletti egyváltozós polinomok vektorterében az $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok halmaza a vektortér egy Hamel-bázisa. Tetszőleges számosság esetén is érvényes, hogy a bázis fogalma egybeesik a független generátorrendszer fogalmával.

9.25. Tétel *Ha egy F számtest feletti vektortérnek van n elemű bázisa, akkor bármely bázisa n vektort tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$ egy V vektortér egy-egy bázisa. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}$ bázisban lévő vektorok száma n. Mivel $\mathcal{B}'$ generátorrendszer, ezért $\mathcal{B}'$-ben legalább n vektor van az előző tétel miatt. Ha $\mathcal{B}'$-ben n-nél több vektor lenne, akkor $\mathcal{B}'$ tartalmazna legalább $n+1$ vektorból álló lineárisan független rendszert. Mivel $\mathcal{B}$ egy n-elemű generátorrendszer, ezért minden (véges) lineárisan független vektorrendszerben legfeljebb n elem van, amiből az ellentmondó $n+1 \leq n$ egyenlőséghez jutunk. Tehát a $\mathcal{B}'$ ben lévő vektorok száma is n. □

9.26. Definíció *Legyen n pozitív egész szám. Egy F számtest feletti vektorteret n-dimenziós vektortérnek nevezünk, ha V ben van n-elemű bázis. Az egyetlen vektorból (csak a nullvektorból) álló vektortér dimenzióján 0-át értünk. Ha egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortér nem tartalmaz véges bázist akkor azt mondjuk, hogy a vektortér végtelen dimenziós.*

9.27. Megjegyzés *Bizonyítható, hogy egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortérnek akkor és csak akkor van véges bázisa, ha van véges generátorrendszere. Így egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortér akkor és csak akkor végtelen dimenziós, ha nincs véges generátorrendszere.*

Példaként említjük, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortér dimenziója n, mert benne az n vektorból álló $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ vektorrendszer bázis, ahol $\underline{e}_i$ azt az n-elemű sorozatot jelöli, amelynek i-dik eleme 1, az összes többi pedig 0. Speciálisan, a térbeli vektorok vektorterének dimenziója egyenlő 3-mal.

Egy F számtest elemeiből képezett $m \times n$ típusú mátrixok halmaza mn-dimenziós vektortér az F számtest felett. Ebben a vektortérben az $E_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

mátrixok egy bázist alkotnak, ahol $E_{i,j}$ jelöli azt az $m \times n$ típusú mátrixot, melynek i-dik sorában a j-dik elem az 1, a mátrix összes többi eleme pedig a nulla.

Megemlítjük, hogy egy F számtest feletti polinomok vektorterének dimenziója végtelen, mert az $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok a vektortér egy bázisát képezik. Mivel ezek száma végtelen, ezért a vektortér nem tartalmazhat véges bázis, és így dimenziója végtelen.

9.28. Tétel *Legyen V egy F számtest feletti olyan vektortér, amelynek van véges bázisa. Akkor V bármely független vektorrendszere kiegészíthető V-beli vektorokkal úgy, hogy a kiegészítéssel keletkezett vektorrenszer a V egy bázisa. Más szavakkal: V minden független vektorrendszere benne van V egy bázisában.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a V vektortér tartalmaz egy n-elemű bázist. A 9.20. Tétel miatt minden független vektorrendszer legfeljebb n elemet tartalmaz. Legyen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ a V egy független vektorrendszere ($m \leq n$). Ha ez a vektorrendszer generátorrendszer, akkor a 9.22. Tétel szerint a vektortér bázisa; ekkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy nem bázis. Akkor van a V vektortérnek olyan $\underline{b}_{m+1}$ vektora, amely nem fejezhető ki a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként. A 9.12. Tétel miatt a $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}\}$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha ez generátorrendszer, akkor a bizonyítással készen vagyunk. Ellenkező esetben (az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy) van olyan $\underline{b}_{m+2}$ vektora a vektortérnek, hogy a $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \underline{b}_{m+2}\}$ vektorrendszer lineárisan független. A gondolatmenetet folytatva, egyszer csak kapunk egy olyan $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszert, amely bázisát alkotja a V vektortérnek. $\square$

Néhány példa:

- A térbeli vektorok vektorterének dimenziója 3.

- Tetszőleges $\mathbb{F}$ számtest feletti $\mathbb{F}^n$ vektortér dimenziója n: ebben a vektortérben az $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vektorok a vektortér egy bázisát alkotják, ahol $\underline{e}_i$ az az n-elemű sorozat, amelyben az i-dik elem az $\mathbb{F}$ számtest egységeleme, azaz 1, a többi elem pedig az $\mathbb{F}$ számtest nulleleme, azaz 0.

- Egy $\mathbb{F}$ számtest feletti egyváltozós polinomok $\mathbb{F}[x]$ vektorterében az $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok a vektortér egy Hamel-bázisát alkotják. Így az $\mathbb{F}[x]$ vektortér végtelen dimenziós.

9.4. Vektortér altere

9.29. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér valamely $W \neq \emptyset$ részhalmazát a V vektortér egy alterének nevezzük ha W a V beli műveletre és a V elemeinek az F-beli skalárokkal való szorzására nézve vektorteret alkot F felett.*

9.30. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortér valamely $W \neq \emptyset$ részhalmaza akkor és csak akkor altere a V vektortérnek, ha minden $\underline{a}, \underline{b} \in W$ és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárokra*

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen W a V vektortér egy altere. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in W$ tetszőleges vektorok, α, β pedig tetszőleges skalárok. Akkor $\alpha\underline{a}, \beta\underline{b} \in W$ és így

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in W$ vektorokra és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárokra

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W$$

teljesül. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in W$ tetszőleges vektorok. Az $\alpha = 1$ és $\beta = 1$ választás mellett, $\underline{a} + \underline{b} \in W$, így W zárt a V-n értelmezett összeadásra nézve. Legyen $\underline{a} \in W$ tetszőleges vektor, $\alpha \in F$ pedig tetszőleges skalár. Akkor a $\underline{b} = \underline{0}$ és $\beta = 0$ választással:

$$\alpha\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W.$$

Így (felhasználva a 9.3. Tételt is), ha $\underline{a} \in W$, akkor

$$-\underline{a} = (-1)\underline{a} \in W.$$

Tehát W zárt az összeadásra nézve, és emellett minden általa tartalmatott vektorral együtt tartalmazza annak ellentettjét is. Ebből már következik, hogy W csoportot alkot a V-n értelmezett összeadásra nézve. A fentiekből az is adódik, hogy $\alpha\underline{a} \in W$ minden $\alpha \in F$ és minden $\underline{a} \in W$ esetén. Természetesen ezekből már következik az is, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ és $\underline{a}, \underline{b} \in W$ elemek esetén az alábbi egyenlőségek teljesülnek:

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$

$$(\alpha+\beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a}),$$

$$1\underline{a} = \underline{a},$$

mivel ezek az egyenlőségek tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ és tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V$ elemekre teljesültek amiatt a feltétel miatt, hogy V vektortér F felett. Következésképpen W is vektortér az F számtest felett. □

9.31. Tétel *Egy V vektortér W_i $(i \in I)$ altereinek tetszőleges nem üres rendszere esetén $\cap_{i\in I} W_i$ is altere V-nek.*

Bizonyítás. Legyen W_i $(i \in I)$ egy V vektortér altereinek tetszőleges nem üres rendszere. Mivel a V nullvektora benne van a W_i alterek mindegyikében, ezért $\cap_{i\in I} W_i$ nem üres. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in \cap_{i\in I} W_i$ tetszőleges vektorok, α, β pedig tetszőleges skalárok. Akkor $\underline{a}, \underline{b} \in W_i$ minden $i \in I$ indexre teljesül, és ezért (a 9.30. Tételt is használva)

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W_i$$

minden $i \in I$ indexre, azaz

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in \cap_{i\in I} W_i.$$

A 9.30. Tétel miatt ebből az adódik, hogy $\cap_{i\in I} W_i$ a V vektortér egy altere. □

9.32. Definíció *Egy V vektortér $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorai által generált altéren az őket tartalmazó összes altér metszetét értjük. Ez megegyezik az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorokat tartalmazó legszűkebb altérrel. Az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorai által generált alteret $< \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n >$ módon jelöljük.*

9.33. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektoraira*

$$< \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n > = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\}.$$

Bizonyítás. A 9.30. Tétel miatt

$$\{\alpha_1\underline{a}_1 + \dots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in F\} \subseteq < \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n > .$$

Mivel $\{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$ olyan altér, amely tartalmazza az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok mindegyikét, ezért

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n > \subseteq \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Így

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n > = \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

□

9.34. Definíció *Egy F számtest feletti V vektortér $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektoraiból álló vektorrendszer rangján az általuk generált $< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >$ altér dimenzióját értjük. Egy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer rangját $\rho(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ módon fogjuk jelölni.*

9.35. Megjegyzés Az világos, hogy egy vektorrendszer rangja nem függ a benne szereplő vektorok sorrendjétől.

9.36. Tétel *Egy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorrendszer által generált altér dimenziója megegyezik az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok között levő lineárisan függetlenek számának maximumával.*

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F számtest feletti V vektortér tetszőleges vektorai. Legyen m az általuk kifeszített

$$W = < \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >$$

altér dimenziója. Legyen r az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok között levő lineárisan független vektorok számának maximuma. A 9.35. Megjegyzés szerint feltehetjük, hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ lineárisan függetlenek (így páronként különböző) vektorok V-ben. Világos, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r\}$ vektorrendszer lineárisan független W-ben is, így $r \leq m$. Az is nyílvánvaló, hogy az $\underline{a}_{r+1}, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok mindegyike kifejezhető az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, és így az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r\}$ vektorrendszer a W altér egy generátorrendszere. Ebből $m \leq r$ adódik, ami a fent bizonyított $r \leq m$ egyenlőtlenséggel együtt az $r = m$ egyenlőséget eredményezi. □

10. fejezet

Lineáris leképezés

10.1. A lineáris leképezés fogalma

10.1. Definíció *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való φ leképezését a V_1 vektortérnek a V_2-vektortérbe való lineáris leképezésének nevezzük, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ és tetszőleges $\alpha \in F$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}),$$

$$\varphi(\alpha\underline{a}) = \alpha\varphi(\underline{a}).$$

A V_1-ből V_2-be történő összes lineáris leképezés halmazát $Hom(V_1, V_2)$-vel fogjuk jelölni.

10.2. Tétel *Tetszőleges F számtest feletti V_1 és V_2 vektorterek esetén φ akkor és csak akkor lineáris leképezése V_1-nek V_2-be, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén*

$$\varphi(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b})$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. Akkor tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén

$$\varphi(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi(\alpha\underline{a}) + \varphi(\beta\underline{b}) = \alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b}).$$

Fordítva, tegyük fel, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való olyan leképezése, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén teljesül az

$$\varphi(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b})$$

egyenlőség. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok, és legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Akkor

$$\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(1\underline{a} + 1\underline{b}) = 1\varphi(\underline{a}) + 1\varphi(\underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}),$$

és

$$\varphi(\alpha\underline{a}) = \varphi(\alpha\underline{a} + 0\underline{b}) = \alpha\varphi(\underline{a}) + 0\varphi(\underline{b}) = \alpha\varphi(\underline{a}).$$

□

10.3. Megjegyzés *A 10.2. Tétel alapján, ha $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ egy F számtest feletti V vektortér bázisa, akkor tetszőleges*

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n \in V$$

vektor és V-nek valamely vektortérbe való φ lineáris leképezése esetén

$$\varphi(\underline{a}) = \alpha_1(\varphi(\underline{b}_1)) + \ldots \alpha_n(\varphi(\underline{b}_n)).$$

Ez és a következő tétel azt mutatja, hogy egy lineáris leképezés egyértelműen meg van határozva a vektortér egy bázisára való leszűkítése által.

10.4. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. A V_1 vektortér tetszőleges $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisához és a V_2 vektortér tetszőleges $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ vektorsorozatához megadható V_1-nek V_2-be való egy és csak egy olyan φ lineáris leképezése, amelyre*

$$\varphi(\underline{b}_i) = \underline{c}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül.

Bizonyítás. Tetszőleges

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n \in V_1$$

vektorra definiáljuk $\varphi(\underline{a})$-t a következőképpen:

$$\varphi(\underline{a}) = \alpha_1\underline{c}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{c}_n.$$

Könnyen ellenőzízhető, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való olyan lineáris leképezése, amelyre teljesül a tételben szereplő $\varphi(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ feltétel. A 10.3. Megjegyzés szerint világos, hogy a feltételeket teljesítő lineáris leképezés egyértelműen meg van határozva. □

10.5. Tétel *Ha φ egy V_1 vektortérnek egy V_2 vektortérbe való lineáris leképezése, akkor φ a V_1 nullvektorához a V_2 nullvektorát rendeli.*

Bizonyítás. Jelölje $\underline{0}_1$, illetve $\underline{0}_2$ a V_1, illetve a V_2 nullvektorát. Akkor

$$\varphi(\underline{0}_1) = \varphi(\underline{0}_1 + \underline{0}_1) = \varphi(\underline{0}_1) + \varphi(\underline{0}_1).$$

Hozzáadva az egyenlőség mindkét oldalához a $\varphi(\underline{0}_1)$ vektor ellentettjét, a

$$\underline{0}_2 = \varphi(\underline{0}_1)$$

adódik. □

10.2. Képtér, magtér, dimenziótétel

10.6. Definíció *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti tetszőleges vektorterek, és legyen φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való tetszőleges lineáris leképezése. A φ lineáris leképezés képterén a V_2 vektortér*

$$Im\varphi = \{\underline{b} \in V_2 : \ (\exists \underline{a} \in V_1)\ \varphi(\underline{a}) = \underline{b}\}$$

módon definiált részhalmazát, magterén pedig a V_1 vektortér

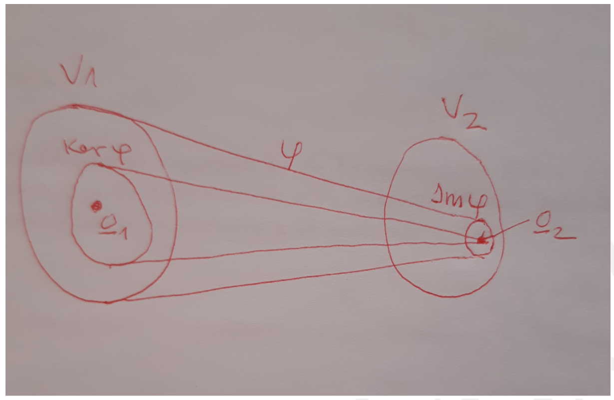
$$Ker\varphi = \{\underline{a} \in V_1 : \ \varphi(\underline{a}) = \underline{0}_2\}$$

módon definiált részhalmazát értjük, ahol $\underline{0}_2$ jelöli a V_2 vektortér nullvektorát.

10.7. Tétel *Ugyanazon F számtest feletti tetszőleges V_1 és V_2 vektorterek és tetszőleges $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés esetén $Im\varphi$ a V_2 vektortérnek, $Ker\varphi$ pedig a V_1 vektortérnek egy-egy altere.*

Bizonyítás. Az világos, hogy $Im\varphi \neq \emptyset$. Legyenek $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ az $Im\varphi$ tetszőleges vektorai. Akkor megadhatók olyan $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in V_1$ vektorok, amelyekre

$$\varphi(\underline{a}_1) = \underline{b}_1, \quad \text{és} \quad \varphi(\underline{a}_2) = \underline{b}_2$$



10.1. ábra. $Im\varphi$ és $Ker\varphi$

teljesül. Legyenek $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$\varphi(\alpha \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_2) = \alpha\varphi(\underline{a}_1) + \beta\varphi(\underline{a}_2) = \alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2,$$

amiből következik, hogy $\alpha \underline{b}_1 + \beta \underline{b}_2$ is benne van az $Im\varphi$-ben. Következésképpen $Im\varphi$ a V_1 vektortér egy altere.

Az előző tétel miatt $\underline{0}_1 \in Ker\varphi$. Igy $Ker\varphi \neq \emptyset$. Legyenek $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ a $Ker\varphi$ tetszőleges vektorai. Legyenek $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$\varphi(\alpha \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_2) = \alpha\varphi(\underline{a}_1) + \beta\varphi(\underline{a}_2) = \alpha \underline{0}_2 + \beta \underline{0}_2 = \underline{0}_2.$$

Tehát $\alpha \underline{a}_1 + \beta \underline{a}_2 \in Ker\varphi$. Így $Ker\varphi$ a V_1 vektortérnek egy altere. □

10.8. Tétel *(Dimenziótétel) Tetszőleges F számtest feletti tetszőleges V_1 és V_2 vektorterek és V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ lineáris leképezése esetén*

$$dim(V_1) = dim(Im\varphi) + dim(Ker\varphi).$$

Bizonyítás Legyen $dim(V_1) = n$ és $dim(Ker\varphi) = m$. Ha $m = n$, akkor $Ker\varphi = V_1$ és $Im\varphi = \{\underline{0}_2\}$ (itt $\underline{0}_2$ pedig a V_2 vektortér nullvektorát), és így $dim(V_1) = n = 0 + n = dim(Im\varphi) + dim(Ker\varphi)$. Tegyük fel, hogy $m < n$. Legyen $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ a $Ker\varphi$ egy bázisa. Ez kiegészíthető a V_1 egy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m, \underline{a}_{m+1}, \ldots, \underline{a}_n\}$ bázisává. Megmutatható (az olvasóra bízzuk), hogy $\{\varphi(\underline{a}_{m+1}), \ldots, \varphi(\underline{a}_n)\}$ egy bázisa az $Im\varphi$ altérnek, ami bizonyítja állításunkat. □

10.3. Vektorterek izomorfizmusa

10.9. Definíció *Egy $\varphi \in Hom(V_1, V_2)$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezünk, ha φ szürjektív (azaz, V_2-re képez) és injektív (azaz, kölcsönösen egyértelmű). Azt mondjuk, hogy egy V_1 vektortér izomorf egy V_2 vektortérrel, ha megadható V_1-nek V_2-re való izomorfizmusa (ekkor persze V_2 is izomorf V_1-gyel, s ezért azt is szoktuk mondani, hogy V_1 és V_2 egymással izomorfak).*

10.10. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek, és legyen φ V_1-nek V_2-be való izomorfizmusa. Akkor a V_1 tér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ vektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a V_2 tér $\varphi(\underline{a}_1), \ldots, \varphi(\underline{a}_m)$ vektorai lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Valamely $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in V_1$ vektorokra és $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ skalárokra

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_m\underline{a}_m = \underline{0}_1$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha_1\varphi(\underline{a}_1) + \cdots + \alpha_m\varphi(\underline{a}_m) = \underline{0}_2.$$

Ebből már egyszerűen következik a tétel állítása. $\square$

10.11. Tétel *Ugyanazon számtest feletti véges dimenziós vektorterek akkor és csak akkor izomorfak egymással, ha azonos dimenziójúak.*

Bizonyítás. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon számtest feletti véges dimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy $dim(V_1) = dim(V_2)$. Legyen $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ a V_1 vektortér, $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n\}$ pedig a V_2 vektortér egy-egy bázisa. Akkor van V_1-nek V_2-be olyan φ lineáris leképezése (10.4. Tétel), amely a $\underline{b}_i$ bázisvektorhoz a $\underline{c}_i$ bázisvektort rendeli ($i = 1, \ldots, n$). Mivel a $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n\}$ vektorrendszer bázisa V_2-nek, ezért φ szürjektív.

Legyenek

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$$

és

$$\underline{b} = \beta_1\underline{b}_1 + \cdots + \beta_n\underline{b}_n$$

tetszőleges V_1-beli vektorok. Ha $\varphi(\underline{a}) = \varphi(\underline{b})$, akkor

$$\alpha_1\varphi(\underline{b}_1) + \cdots + \alpha_n\varphi(\underline{b}_n) = \beta_1\varphi(\underline{b}_1) + \ldots \beta_n\varphi(\underline{b}_n),$$

és így

$$\alpha_1\underline{c}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{c}_n = \beta_1\underline{c}_1 + \ldots \beta_n\underline{c}_n,$$

amiből

$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \ldots n$$

adódik, azaz $\underline{a} = \underline{b}$. Tehát φ injective. Következésképpen φ V_1-nek V_2-re való izomorfizmusa.

Fordítva, tegyük fel, hogy V_1 és V_2 egymással izomorfak. A 10.10. Tétel alapján igen egyszerűen adódik, hogy $dim(V_1) = dim(V_2)$, ha figyelembe vesszük, hogy a bázis nem más mint egy maximális lineárisan független vektorrendszer. □

10.12. Definíció *Legyen V egy F számtest feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ a V egy bázisa. Tetszőleges*

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$$

vektor esetén jelölje $[\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ a következő n-elemű sorozatot:

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in F^n.$$

Az $[\underline{a}]_{\mathcal{B}} \in F^n$ sorozatot az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázis szerinti koordinátás alakjának, az $[\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ sorozat elemeit pedig az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázis szerinti koordinátáinak nevezzük.

10.13. Tétel *Legyen V egy F számtest feletti vektortér és $\mathcal{B}$ a V egy bázisa. Akkor tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V$ vektorok és tetszőleges $\alpha \in F$ skalár esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$[\underline{a} + \underline{b}]_{\mathcal{B}} = [\underline{a}]_{\mathcal{B}} + [\underline{b}]_{\mathcal{B}},$$

$$[\alpha\underline{a}]_{\mathcal{B}} = \alpha[\underline{a}]_{\mathcal{B}},$$

azaz a $\varphi : \underline{a} \mapsto [\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ a V vektortérnek az F^n vektortérre való izomorfizmusa.

Bizonyítás. A tétel állítása a korábbi állítások nyílvánvaló következménye. $\square$

10.14. Tétel *Egy F számtest feletti n-dimenziós V vektortér bármely $\mathcal{B}$ bázisa esetén a V tetszőleges $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ vektorrendszere akkor és csak akkor lineárisan független, ha az F^n vektortér $\{[\underline{a}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\underline{a}_m]_{\mathcal{B}}\}$ vektorrendszere lineárisan független.*

Bizonyítás. Mivel $\underline{a} \mapsto [\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ lineáris leképezés, ezért a 10.10. Tételből igen egyszerűen következik a tétel állítása. $\square$

10.4. Műveletek lineáris leképezések között

10.15. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ_1, φ_2 lineáris leképezései esetén $\varphi_1 + \varphi_2$ is V_1-nek V_2-be való lineáris leképezése, ahol a $\varphi_1 + \varphi_2$ leképezés a következőképpen van értelmezve:*

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \ : \ \underline{a} \ \mapsto \ \varphi_1(\underline{a}) + \varphi_2(\underline{a}), \quad \underline{a} \in V_1.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ esetén

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) + \varphi_2(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) =$$
$$\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b}) + \alpha\varphi_2(\underline{a}) + \beta\varphi_2(\underline{b}) =$$
$$\alpha(\varphi_1(\underline{a}) + \varphi_2(\underline{a})) + \beta(\varphi_1(\underline{b}) + \varphi_2(\underline{b})) =$$
$$\alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{a}) + \beta(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{b}).$$

Tehát, a 10.2. Tétel miatt, $\varphi_1 + \varphi_2$ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. $\square$

10.16. Definíció *A 10.15. Tételben definiált $\varphi_1 + \varphi_2$ lineáris leképezést a φ_1 és φ_2 lineáris leképezések összegének nevezzük.*

10.17. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. Ha φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineári leképezése, akkor*

$$-\varphi : \ \underline{a} \ \mapsto (-1)(\varphi(\underline{a})) \ \underline{a} \in V_1$$

is lineáris leképezése V_1-nek V_2-be.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok, $\alpha, \beta \in F$ pedig tetszőleges skalárok. Akkor

$$(-\varphi)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = (-1)(\varphi(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})) = (-1)(\alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b})) =$$
$$= (-1)(\alpha\varphi(\underline{a})) + (-1)(\beta\varphi(\underline{b})) = \alpha((-1)\varphi(\underline{a})) + \beta((-1)(\varphi(\underline{b})) =$$
$$= \alpha(-\varphi(\underline{a})) + \beta(-(\varphi(\underline{b})).$$

Tehát $-\varphi$ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. □

10.18. Definíció *A 10.17. Tételben definiált $-\varphi$ lineáris leképezést a $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés ellentettjének nevezzük.*

10.19. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ lineáris leképezése és tetszőleges $\alpha \in F$ skalár esetén az*

$$(\alpha\varphi) \; : \; \underline{a} \; \mapsto \; \alpha(\varphi(\underline{a})), \quad a \in V_1$$

módon definiált leképezés a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok és $\xi, \eta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$(\alpha\varphi)(\xi\underline{a} + \eta\underline{b}) = \alpha(\varphi(\xi\underline{a} + \eta\underline{b})) =$$
$$= \alpha(\xi\varphi(\underline{a}) + \eta\varphi(\underline{b})) = (\alpha\xi)\varphi(\underline{a}) + (\alpha\eta)\varphi(\underline{b}) =$$
$$= \xi(\alpha(\varphi(\underline{a})) + \eta(\alpha\varphi(\underline{b}) = \xi(\alpha\varphi)(\underline{a})) + \eta(\alpha\varphi)(\underline{b})$$

□

10.20. Definíció *A 10.19. Tételben szereplő $\alpha\varphi$ lineáris leképezést a φ lineáris leképezés α skalárral képezett szorzatának nevezzük.*

10.21. Tétel *Legyenek V_1, V_2, V_3 ugyanazon F számtest feletti vektorterek. Ha φ_1 a V_1-nek V_2-be, φ_2 pedig V_2-nek V_3-ba való lineáris leképezései, akkor a*

$$(\varphi_2\varphi_1)(\underline{a}) = \varphi_2(\varphi_1(\underline{a})), \quad a \in V_1$$

módon definiált leképezés a V_1 vektortérnek a V_3 vektortérbe való lineáris leképezése.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok és $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$(\varphi_2\varphi_1)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})) = \varphi_2(\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b})) =$$

$$= \alpha\varphi_2(\varphi_1(\underline{a})) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\underline{b})) = \alpha(\varphi_2\varphi_1)(\underline{a}) + \beta(\varphi_2\varphi_1)(\underline{b}).$$

□

10.22. Definíció *A 10.21. Tételben definiált $\varphi_2\varphi_1 \in Hom(V_1, V_3)$ lineáris leképezést a szóban forgó lineáris leképezések szorzatának nevezzük.*

10.5. Lineáris leképezés mátrixa

10.23. Tétel *Legyenek V_1, illetve V_2 ugyanazon F számtest feletti n, illetve m dimenziós vektorterek. Akkor V_1-nek V_2-be való tetszőlege φ lineáris leképezéséhez és V_1, illetve V_2 egy-egy rgzített $\mathcal{B}_1$, illetve $\mathcal{B}_2$ bázisához van egy és csak egy olyan $m \times n$ típusú, F feletti $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix, hogy V_1 tetszőleges $\underline{a}$ vektora esetén*

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1}$$

teljesül. Más szavakkal, a $\varphi(\underline{a}) \in V_2$ vektor $\mathcal{B}_2$ bázis szerinti koordinátás alakját (mint egy $m \times 1$ típusú mátrixot) úgy is megkaphatjuk, hogy képezzük az $m \times n$ típusú $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrixnak az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}_1$ bázis szerinti koordinátás alakjával (mint egy $n \times 1$ típusú mátrixszal) való szorzatát.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}_1 = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$. Jelölje $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ azt az $m \times n$ típusú mátrixot, melynek j-dik osztolvektora egyenlő a $\varphi(\underline{b}_j) \in V_2$ vektor $\mathcal{B}_2$ bázis szerinti koordinátás alakjával. Legyen $\underline{a} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{b}_j$ a V_1 vektortér tetszőleges vektora. Akkor

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = \left[\varphi(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{b}_j)\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(\underline{b}_j)\right]_{\mathcal{B}_2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [\varphi(\underline{b}_j]_{\mathcal{B}_2}) = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1}.$$

Ha egy $m \times n$ típusú $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ mátrixra is teljesül, hogy V_1 tetszőleges $\underline{a}$ vektora esetén

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{C}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1},$$

akkor minden $\underline{b}_j \in \mathcal{B}_1$ vektorra is teljesül, és ezért minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre

$$[\varphi(\underline{b}_j)]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{C}[\underline{b}_j]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{C}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix},$$

azaz a $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix j-dik oszlopa minden j indexre megegyezik a $\mathbf{C}$ mátrix j-dik oszlopával, amiből következik, hogy

$$\mathbf{C} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}.$$

Tehát egy és csak egy olyan mátrix létezik, amely teljesíti a tételbeli feltételeket; ez a mátrix a $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix. $\square$

Ha az $\mathbf{A}$ mátrix egy n-dimenziós V_1 vektortérnek egy m-dimenziós V_2 vektortérbe való rögzített bázisokhoz tartozó lineáris leképezése, akkor V_1 valamely $\underline{x}$ vektora akkor és csak akkor van benne a φ magterében, ha az $\underline{x}$ vektor V_1 rögzített bázisára vonatkozó $[\underline{x}]$ koordinátás alakjára

$$\mathbf{A}[\underline{x}] = [\underline{0}]$$

teljesü, ahol $[\underline{0}]$ a V_2 vektortér nullvektorának a V_2 rögzített bázisára vonatkozó koordinátás alakja. Tehát $\underline{x}$ akkor és csak akkor van benne a φ magterében, ha koordinátás alakja megoldása az

$$\mathbf{A}[\underline{x}] = [\underline{0}]$$

homogén lineáris egyenletrendszernek. Így a φ lineáris leképezés magterének dimenziója megegyezik ezen lineáris egyenletrendszer ismeretlenjei között levő un. szabad változók számával. A φ képterének dimenziója pedig a dimenziótétel alkalmazásával számítható ki.

10.24. Tétel *Legyenek V_1, V_2 és V_3 ugyanazon F számtest feletti vektorterek rendre a $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ és $\mathcal{B}_3$ bázisokkal. Akkor tetszőleges $\varphi, \eta : V_1 \mapsto V_2$ és tetszőleges $\xi : V_2 \mapsto V_3$ lineáris leképezések esetén*

$$[\varphi + \eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} + [\eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1},$$

$$[\xi\eta]_{\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_1} = [\xi]_{\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_2}[\eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}.$$

Más szavakkal: lineáris leképezések összegének és szorzatának mátrixa megegyezik a lineáris leképezésekhez tartozó mátrixok összegével és (megfelelő sorrendben vett) szorzatával.

10.6. Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai

10.25. Definíció *Egy vektortérnek önmagába való lineáris leképzéseit a vektortér lineáris transzformációinak nevezzük.*

10.26. Definíció *Legyen V egy F egy számtest feletti vektortér, és φ a V egy lineáris transzformációja. Az F valamely λ elemét a φ egy sajátértékének nevezzük, ha megadható olyan $\underline{0} \neq \underline{x} \in V$ vektor, hogy*

$$\varphi(\underline{x}) = \lambda \underline{x}.$$

A fenti egyenlőségben szereplő $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorokat a φ lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

Ha $\mathcal{B}$ egy V vektortér valamely bázisát jelöli, akkor V tetszőleges φ lineáris transzformációjának ezen bázis szerinti mátrixát $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ módon fogjuk jelölni.

10.27. Tétel *Egy F számtest feletti V vektortér valamely φ lineáris transzformációjának sajátértékei megegyeznek φ tetszőleges V-beli $\mathcal{B}$ bázisához tartozó $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ mátrixának sajátértékeivel.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ a V vektortér egy bázisa. Mivel φ-nek a V különböző bázisai szerinti mátrixai hasonlók egymáshoz, és mivel hasonló mátrixok spektruma közös, ezért elég azt megmutatni, hogy φ sajátértékei megegyeznek a $\mathcal{B}$ bázis szerinti mátrixának sajátértékeivel. Az F valamely λ eleme akkor és csak akkor sajátértéke φ-nek, ha

$$\varphi(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$$

teljesül valamely $\underline{0} \neq \underline{x} \in V$ vektorra. Ezen utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$[\varphi(\underline{x})]_{\mathcal{B}} = [\lambda \underline{x}]_{\mathcal{B}},$$

azaz

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \lambda [\underline{x}]_{\mathcal{B}},$$

ami annyit jelent, hogy λ sajátértéke a $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ mátrixnak. □

A 8.3. Tétel szerint tetszőleges $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges sajátértékéhez tartozó sajátvektorai a $\underline{0}$ vektorral együtt az F^n vektortér egy alterét alkotják. Így egy F számtest feletti V vektortér valamely φ lineáris transzformációjának sajátvektorai a nullvektorral együtt az F^n vektortér egy alterét alkotják.

10.28. Tétel *Egy V vektortér tetszőleges φ lineáris transzformációjának V valamely $\mathcal{B}$ bázisához tartozó mátrixa akkor és csak akkor diagonális, ha $\mathcal{B}$ minden vektora a φ egy-egy sajátvektora. Ha ez a helyzet, akkor a diagonális mátrix főátlójában álló elemek a φ sajátértékei (mindegyik annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása).*

Bizonyítás. Legyen $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ diagonális a V egy

$$\mathcal{B}\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$$

bázisában. Ha a főátlóban álló elemek rendre $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, azaz

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

akkor

$$[\varphi(\underline{e}_i)]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_i]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i \underline{e}_i]_{\mathcal{B}},$$

azaz

$$\varphi(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i$$

teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. Tehát a $\mathcal{B}$ bázis elemei a φ lineáris transzformáció sajátvektorai.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy F számtest feletti V vektortér valamely

$$\mathcal{B}\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$$

bázisának elemei a V egy φ lineáris transzformációjának sajátvektorai. Akkor minden $i = 1, \ldots, n$ indexre

$$\varphi(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i$$

teljesül valamely $\lambda_i \in F$ skalárral. Ebből már világos, hogy

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

azaz φ $\mathcal{B}$ bázisbeli mátrixa diagonális. Mivel ezen diagonális mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i),$$

ezért egy-egy sajátérték annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása. $\square$

10.7. Bázistranszformáció

10.29. Definíció *Egy V vektortér valamely τ lineáris transzformációját bázistranszformációnak nevezzük, ha V-nek van olyan bázisa, melynek τ szerinti képe bázisa V-nek.*

10.30. Tétel *Egy F számtest feletti n-dimenziós V vektortér tetszőleges τ lineáris transzformációja és tetszőleges $\mathcal{B}$ bázisa esetén a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *A $\mathcal{B}$ bázis τ-szerinti képe is bázisa V-nek.*
2. *$[\tau]_{\mathcal{B}}$ reguláris mátrix.*

Bizonyítás. Mivel egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, ezért az állítás a 10.14. Tétel következménye. $\square$

10.31. Tétel *Legyen V egy F számtest feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, illetve $\mathcal{B}' = \{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ a V két bázisa. Legyen τ a V vektortér azon bázistranszformációja, amelyre*

$$e'_i = \tau(e_i), \quad i = 1, \dots, n$$

teljesül. Akkor tetszőleges $\underline{a} \in V$ vektor esetén

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{a} \in V$ tetszőleges vektor. Az $\underline{a}$ alakja a $\mathcal{B}'$ bázisban (valamely $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n \in F$ skalárokkal):

$$\underline{a} = \alpha'_1 \underline{e}'_1 + \cdots + \alpha'_n \underline{e}'_n = \alpha'_1 \tau(\underline{e}_1) + \cdots + \alpha'_n \tau(\underline{e}_n).$$

Ezért (használva a 10.23. Tételt és a 10.13. Tételt is)

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}} = \alpha'_1 [\tau]_{\mathcal{B}} [\underline{e}_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \alpha'_n [\tau]_{\mathcal{B}} [\underline{e}_n]_{\mathcal{B}} =$$
$$= [\tau]_{\mathcal{B}} [\underline{a}]_{\mathcal{B}'}.$$

Ebből már adódik az

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1} [\underline{a}]_{\mathcal{B}}$$

egyenlőség, mivel $[\tau]_{\mathcal{B}}$ reguláris (10.30. Tétel), így van inverze. □

10.32. Tétel *Legyen V egy F számtest feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$, illetve $\mathcal{B}' = \{\underline{e}'_1, \ldots, \underline{e}'_n\}$ a V két bázisa. Legyen τ a V vektortér azon bázistranszformációja, amelyre*

$$\underline{e}'_i = \tau(\underline{e}_i), \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül. Akkor a V vektortér tetszőleges φ lineáris transzformációja esetén

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1} [\varphi]_{\mathcal{B}} [\tau]_{\mathcal{B}}.$$

Bizonyítás. Legyen φ a V vektortér egy lineáris transzformációja. A 10.23. Tétel szerint φ mátrixa a $\mathcal{B}'$ bázisban a következő alakú:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [[\varphi(\underline{e}'_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [\varphi(\underline{e}'_n)]_{\mathcal{B}'}] =$$
$$[[\varphi\tau(\underline{e}_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [\varphi\tau(\underline{e}_n)]_{\mathcal{B}'}] =$$
$$[[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi\tau(\underline{e}_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi\tau(\underline{e}_n)]_{\mathcal{B}}] =$$
$$[[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_n]_{\mathcal{B}} =$$
$$[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}.$$

Közben felhasználtuk a következő két tételeket is: 10.31. Tétel, 10.24. Tétel. □

A 10.32. Tétel szerint egy lineáris tarnszformáció különböző bázisok szerinti mátrixai egymáshoz hasonló mátrixok.

Megfogalmazunk még egy következményt.

10.33. Tétel *Egy F számtest feletti véges dimenziós V vektortér valamely τ lineáris transzformációja akkor és csak akkor bázistranszformáció, ha V bármely bázisának τ szerinti képe bázisa V-nek.*

Bizonyítás. A 10.30. Tétel, a 10.32. Tétel és a 4.13. Tétel alapján nyílvánvaló. □

10.8. Mátrix skalárinvariánsai

Egy F számtest feletti $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixszal balról való szorzás az F^n vektortérnek olyan lineáris transzformációja, melynek a standard bázisbeli mátrixa egyenlő $\mathbf{A}$-val. Ha $\mathcal{B}$ az F^n vektortér tetszőleges bázisa, τ pedig az a bázistranszformáció, amely a standard bázist a $\mathcal{B}$ bázisra képezi, akkor az $\mathbf{A}$ mátrixnak a $\mathcal{B}$ bázisbeli alakja $[\tau]^{-1}\mathbf{A}[\tau]$.

10.34. Definíció *Négyzetes mátrixokhoz hozzárendelhető valamely skalárt a mátrixok skalárinvariánsának nevezzük, ha bázistranszformáció során nem változik, azaz az F^n vektortér tetszőleges τ bázistranszformációja esetén az $\mathbf{A}$ mátrixhoz és a $[\tau]^{-1}\mathbf{A}[\tau]$ mátrixhoz tartozó illető skalár ugyanaz.*

10.35. Tétel *Egy négyzetes mátrix skalárinvariánsai a következők:*

- *Mátrix nyoma.*
- *Mátrix adjungáltjának nyoma.*
- *Mátrix determinánsa.*

Bizonyítás Legyen $\mathbf{A}$ tetszőleges $n \times n$-típusú mátrix. Legyen továbbá $\mathcal{B}$ az F^n vektortér tetszőleges bázisa, τ pedig a standard bázist a $\mathcal{B}$ bázisra képező bázistranszformációja.

A 3.13. Tétel szerint

$$tr([\tau]^{-1}\mathbf{A}[\tau]) = tr([\tau][\tau]^{-1}\mathbf{A}) = tr(\mathbf{A}),$$

azaz az $\mathbf{A}$ mátrix nyoma megegyezik a mátrix $\mathcal{B}$ bázisbeli alakjának nyomával. Így mátrix nyoma a mátrixok egy skalárinvariánsa.

Mivel két mátrix szorzatának inverze megegyezik a mátrixok inverzeinek fordított sorrendben képezett szorzatával, ezért tetszőleges $n \times n$-típusú $\mathbf{B}$ mátrix esetén

$$Adj(\mathbf{AB}) = Adj(\mathbf{B})Adj(\mathbf{A}).$$

Így

$$Adj([\tau]^{-1}\mathbf{A}[\tau]) = Adj([\tau])Adj(\mathbf{A})Adj([\tau]^{-1}) =$$

$$= det([\tau])[\tau]^{-1}Adj(\mathbf{A})\frac{[\tau]}{det([\tau])} = [\tau]^{-1}Adj(\mathbf{A})[\tau].$$

Ebből az egyenlőségből a 3.13. Tétel alkalmazásával már következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix adjungáltjának nyoma megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathcal{B}$ bázisbeli alakjához tartozó adjungált nyomával. Tehát mátrix adjungáltjának nyoma a mátrixok egy skalárinvariánsa.

A determinánsok szorzástétele szerint

$$det([\tau]^{-1}\mathbf{A}[\tau]) = det([\tau]^{-1})det(\mathbf{A})det([\tau]) = det([\tau])det([\tau]^{-1})det(\mathbf{A}) =$$

$$= det([\tau][\tau]^{-1})det(\mathbf{A})(det(\mathbf{A}),$$

azaz a determináns a mátrixok egy skalárinvariánsa. $\square$

11. fejezet

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

11.1. Valós skaláris szorzás

11.1. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

vektorainak skaláris szorzatán az $\underline{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ szorzatösszeget értjük.

11.2. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektoraira és tetszőleges α valós számra az alábbiak teljesülnek:*

1. *$\underline{aa} > 0$, ha $\underline{a}$ nem nulvektor (pozitív definitség).*
2. *$\underline{ab} = \underline{ba}$ (szimmetricitás),*
3. *$\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$ (additivitás),*
4. *$(\alpha\underline{a})\underline{b} = \underline{a}(\alpha\underline{b}) = \alpha(\underline{ab})$ (homogenitás),*

Tehát az $\mathbb{R}^n$ valós vektortéren értelmezett skaláris szorzás egy pozitív definit, szimmetrikus, bilineáris funkcionál.

11.3. Definíció *Egy $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor abszolút értékén az $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{aa}}$ nemnegatív valós számot értjük. (Az abszolút érték kifejezés helyett a norma kifejezést is szokták használni.) Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektort egységvektornak nevezünk, ha abszolút értéke egyenlő 1-gyel.*

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges nem nulla vektorából mindig készíthetünk egy egységvektort, mégpedig úgy, hogy megszorozzuk abszolút értékének reciprokával (más szavakkal: elosztjuk az abszolút értékével). Ezt az eljárást a vektor normálásának is szoktuk nevezni.

11.4. Tétel *(Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij-egyenlőtlenség) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektoraira $|\underline{ab}|^2 \leq |\underline{a}|^2|\underline{b}|^2$.*

Bizonyítás. Minthogy az egyenlőtlenség a $\underline{b} = \underline{0}$ esetben fennáll, feltehetjük, hogy $\underline{b} \neq \underline{0}$, azaz a $\underline{bb}$ skaláris szorzat nem nulla. Legyen λ tetszőleges valós szám. Ekkor

$$0 \leq |\underline{a} - \lambda\underline{b}|^2 = (\underline{a} - \lambda\underline{b})(\underline{a} - \lambda\underline{b}) =$$
$$= \underline{ab} - \lambda\underline{ab} - \lambda\underline{ba} + \lambda^2\underline{bb}.$$

Mivel ez minden λ-ra teljesül, ezért a

$$\lambda = (\underline{ab})(\underline{bb})^{-1}$$

speciális esetben is igaz, ahonnan kapjuk, hogy

$$0 \leq \underline{aa} - (\underline{ab})^2(\underline{bb})^{-1},$$

amely akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(\underline{ab})^2 \leq (\underline{aa})(\underline{bb}),$$

vagy másként:

$$|\underline{ab}|^2 \leq |\underline{a}|^2|\underline{b}|^2.$$

□

11.5. Definíció *Két $\mathbb{R}^n$-beli vektorról akkor mondjuk, hogy merőlegesek (ortogonálisak), ha skaláris szorzatuk 0. Egy vektorrendszert ortogonálisnak nevezzük, ha vektorai páronként ortogonálisak.*

11.6. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden olyan ortogonális vektorrendszere, amely nem tartalmazza a nullvektort lineárisan független.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy olyan ortogonális vektorrendszere, amely nem tartalmazza a nullvektort. Tegyük fel, hogy valamely $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ valós számokkal

$$\alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \cdots + \alpha_k\underline{b}_k = \underline{0}.$$

Beszorozva az egyenlőséget skalárisan a $\underline{b}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ vektorral, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\alpha_j(\underline{b}_j\underline{b}_j) = 0.$$

Mivel a $\underline{b}_j$ vektor nem a nullvektor, ezért $\underline{b}_j\underline{b}_j = |\underline{b}_j| \neq 0$, amiből $\alpha_j = 0$ következik minden $j = 1, 2, \ldots, k$ indexre. Így a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ vektorrendszer lineárisan független. □

11.7. Tétel *Ha $\{\underline{e}_1, \ldots \underline{e}_k\}$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér nem nulla vektorainak egy ortogonális vektorrendszere, akkor $\mathbb{R}^n$ tetszőleges $\underline{v}$ vektora esetén a*

$$\underline{v}' = \underline{v} - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underline{e}_i, \quad \alpha_i = \frac{\underline{v}\underline{e}_i}{\underline{e}_i\underline{e}_i}$$

vektor ortogonális az $\underline{e}_j$ $(j = 1, \ldots k)$ vektorok mindegyikére, így az azok által kifeszített altér minden vektorára.

Bizonyítás. Tetszőleges $j = 1, \ldots, k$ index esetén

$$\underline{v}'\underline{e}_j = \underline{v}\underline{e}_j - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\underline{e}_i\underline{e}_j) =$$

$$= \underline{v}\underline{e}_j - \frac{\underline{v}\underline{e}_j}{\underline{e}_j\underline{e}_j}\underline{e}_j\underline{e}_j = 0.$$

Tehát $\underline{v}'$ ortogonális az $\underline{e}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ vektorok mindegyikére. □

11.8. Tétel *(Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges lineárisan független $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vektorrendszeréhez van olyan $\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$ ortogonális vektorrendszere, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ indexre*

$$\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_i \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i \rangle.$$

Bizonyítás. Legyen
$$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$$
az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineárisan független vektorrendszere. Legyen $\underline{e}_1 = \underline{v}_1$. Legyen továbbá
$$\underline{e}_2 = \underline{v}_2 - \alpha_1 \underline{e}_1,$$
ahol
$$\alpha_1 = \frac{\underline{v}_2 \underline{e}_1}{\underline{e}_1 \underline{e}_1}.$$
A 11.7. Tétel miatt az $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ vektorrendszer ortogonális. Továbbá,
$$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle.$$
Folytatva az eljárást, ha már előállítottunk egy olyan
$$\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_j\}$$
$(j < k)$ ortogonális vektorrendszert, amelyre
$$\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_j \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j \rangle$$
teljesül, akkor képezzük az
$$\underline{e}_{j+1} = \underline{v}_{j+1} - \sum_{t=1}^{j} \alpha_t \underline{e}_t$$
vektort, ahol
$$\alpha_t = \frac{\underline{v}_{j+1} \underline{e}_t}{\underline{e}_t \underline{e}_t}.$$
A 11.7. Tétel miatt $\underline{e}_{j+1}$ ortogonális az $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, j)$ vektorok mindegyikére. Továbbá,
$$\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_{j+1} \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{j+1} \rangle$$
is teljesül. Az eljárás befejezéseként olyan
$$\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_k\}$$
ortogonális vektorrendszert kapunk, amelyre teljesül, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ indexre
$$\langle \underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_i \rangle = \langle \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_i \rangle.$$
□

11.9. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egységvektorokból álló ortogonális vektorrendszerét ortonormált vektorrendszernek nevezünk. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér ortonormált bázisán olyan bázist értünk, amely páronként ortogonális egységvektorokból áll.*

11.10. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden egységvektora benne van az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy ortonormált bázisában.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{e}$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges egységvektora. Mivel ez a vektor az $\mathbb{R}^n$ vektorér egy lineárisan független vektorrendszere, ezért a 9.28. Tétel miatt az $\underline{e}$ vektor benne van az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisában. Tegyük fel, hogy $\underline{e} = \underline{b}_1$. A Gram-Schmidt-féle ortogonalizációt alkalmazva, arra az eredményre jutunk, hogy van az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek olyan ortogonális bázisa, amely tartalmazza az $\underline{e}$ egységvektort. Mivel egy bázis egyetlen vektora sem nullvektor, ezért a bázisban levő összes többi vektor normálásával kapjuk az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy olyan ortonormált bázisát, ami tartalmazza az $\underline{e}$ egységvektort. □

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben azok az $\underline{e}_i$ vektorok, amelyek i-dik eleme 1, a többi elem pedig 0, az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy ortonormált bázisát alkotják. Ezt a bázist az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisának nevezzük. Ha külön nem említjük, akkor az $\mathbb{R}^n$ vektortér bázisán a standard bázist értjük.

11.2. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációi

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációit (azaz önmagába való lineáris leképezéseit) n-dimenziós tenzoroknak is szokták nevezni. Mi is használjuk ezt a kifejezést. A tenzorokat latin nagy betűkkel jelöljük. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér bázisai közül az ortonormált bázisok játszanak fontos szerepet. Egy A tenzornak az $\mathbb{R}^n$ tér valamely $\underline{e}_i, \ldots \underline{e}_n$ ortonormált bázisára vonatkozó mátrixát $\mathbf{A}$ módon jelöljük. Az $\mathbf{A}$ mátrix $\underline{a}_j = A(\underline{e}_j)$ $(j = 1, \ldots, n)$ oszlopvektorait az A tenzor vektorkoordinátáinak, az $\mathbf{A}$ mátrix a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ elemeit az A tenzor skalárkoordinátáinak nevezzük. Megjegyezzük, hogy

$$\underline{a}_j = a_{1j}\underline{e}_1 + \cdots + a_{nj}\underline{e}_n.$$

Az előző egyenlőségből világos, hogy

$$a_{ij} = \underline{e}_i\underline{a}_j = \underline{e}_i A(\underline{e}_j) = \underline{e}_i^T \mathbf{A}\underline{e}_j.$$

A 3-dimenziós tenzorokat osztályozhatjuk a képhalmazuk (az értékkészletük) szerint. Egy 3-dimenziós A tenzorról azt mondjuk, hogy

1. nulltenzor, ha képhalmaza csak a nullvektort tartalmazza,
2. lineáris tenzor, ha képhalmaza egy dimenziós,
3. planáris tenzor, ha képhalmaza 2-dimenziós,
4. teljes tenzor, ha képhalmaza az egész $\mathbb{R}^3$ tér.

11.11. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorainak $\underline{a} \circ \underline{b}$ diadikus szorzatán azt az n-dimenziós tenzort értjük, amely az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges $\underline{r}$ vektorához az $\underline{a}(\underline{br})$ vektort rendeli (itt a $\underline{br}$ kifejezés a $\underline{b}$ és az $\underline{r}$ vektorok skaláris szorzatát jelöli).*

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ az $\mathbb{R}^3$ vektortér vektorai, akkor az $\underline{a} \circ \underline{b}$ diadikus szorzat nulltenzor, ha $\underline{a} = \underline{0}$, és lineáris tenzor, ha $\underline{a} \neq \underline{0}$.

A következő tétel a diadikus szorzat mátrixával kapcsolatos.

11.12. Tétel *Ha az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorainak koordinátás alakja egy $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ ortonormált bázisban $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, akkor az $\underline{a} \circ \underline{b}$ diadikus szorzat mátrixa ebben a bázisban*

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \ldots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Legyenek $\underline{a}_i$ $(1 = 1, 2, \ldots, n)$ egy A tenzor vektorkoordinátái az $\mathbb{R}^n$ tér egy $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ ortonormált bázisban. Ha

$$\underline{r} = \xi_1\underline{e}_1 + \cdots + \xi_n\underline{e}_n,$$

akkor minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre

$$\xi_i = \underline{e}_i\underline{r}.$$

Ezért

$$A(\underline{r}) = \underline{a}_1\xi_1 + \cdots + \underline{a}_n\xi_n =$$

$$= \underline{a}_1(\underline{e}_1\underline{r}) + \cdots + \underline{a}_n(\underline{e}_n\underline{r}) = (\underline{a}_1 \circ \underline{e}_1 + \cdots + \underline{a}_n \circ \underline{e}_n)(\underline{r}).$$

Tehát

$$A = \sum_{i=1}^{n} (\underline{a}_i \circ \underline{e}_i).$$

Az $\underline{a}_i \circ \underline{e}_i$ diadikus szorzatokat az A tenzor (szóban forgó ortonormált bázisra vonatkozó) tenzorkomponenseinek nevezzük.

11.13. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy A' tenzorát az A tenzor transzponáltjának nevezzük, ha tetszőleges $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $\underline{u}A(\underline{v}) = \underline{v}A'(\underline{u})$ teljesül (a képletben a vektorok közötti skaláris szorzás szerepel).*

11.14. Tétel *Minden A tenzornak pontosan egy transzponáltja van, és annak valamely $\mathcal{B}$ ortonormált bázis szerinti mátrixa megegyezik az A tenzor $\mathcal{B}$ bázis szerinti mátrixának transzponáltjával.*

11.15. Definíció *Egy A tenzort szimmetrikus tenzornak nevezünk, ha $A = A'$. Ha egy A tenzor esetén $A = -A'$ teljesül, akkor az A tenzort ferdén szimmetrikus tenzornak nevezzük.*

Mivel tetszőleges A tenzor esetén $\frac{1}{2}(A + A')$ egy szimmetrikus, $\frac{1}{2}(A - A')$ pedig ferdén szimmetrikus tenzor, az $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$ egyenlőség alapján kimondható a következő tétel.

11.16. Tétel *Minden tenzor előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegeként.*

11.17. Tétel *Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek, azaz skaláris szorzatuk 0.*

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix valamely λ és μ sajátértékeihez tartozó sajátvektorok, azaz

$$\mathbf{A}\underline{a} = \lambda\underline{a} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\underline{b} = \mu\underline{b}.$$

Ekkor

$$\underline{b}^T\mathbf{A}\underline{a} = \lambda\underline{b}^T\underline{a},$$

amiből (mindkét oldal transzponáltját véve)

$$\underline{a}^T\mathbf{A}^T\underline{b} = \lambda\underline{b}^T\underline{a}$$

adódik. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ezért

$$\lambda\underline{b}^T\underline{a} = \underline{a}^T\mathbf{A}\underline{b} = \underline{a}^T\mu\underline{b},$$

amiből

$$\underline{b}^T\underline{a} = \underline{a}^T\underline{b}$$

miatt

$$(\lambda - \mu)\underline{a}^T\underline{b} = 0$$

adódik. Ha $\lambda \neq \mu$, akkor $\underline{a}^T\underline{b} = 0$, azaz $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőleges vektorok. □

11.18. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tenzora akkor és csak akkor szimmetrikus, ha A mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában szimmetrikus. Az A tenzor akkor és csak akkor ferdén szimmetrikus, ha mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában ferdén szimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen A az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy szimmetrikus tenzora, $\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n$ pedig egy ortonormált bázisa. Tetszőleges $i, j = 1, 2, \ldots, n$ indexek esetén

$$a_{ij} = \underline{e}_i A(\underline{e}_j) = \underline{e}_j A'(\underline{e}_i) = \underline{e}_j A(\underline{e}_i) = a_{ji}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy ferdén szimmetrikus tenzor mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában ferdén szimmetrikus. □

11.19. Tétel *Szimmetrikus tenzor sajátértékei valós számok, ferdén szimmetrikus tenzornak csak 0 lehet a sajátértéke.*

Bizonyítás. Ha A egy szimmetrikus tenzor, akkor mátrixa szimmetrikus, melynek sajátértékei valós számok. Ha A ferdén szimmetrikus tenzor, akkor mátrixa ferdén szimmetrikus, így annak sajátértékei képzetes számok, tehát ezen sajátértékekből csak a 0 lehet eleme a valós számok $\mathbb{R}$ számtestének. $\square$

11.20. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér valamely A tenzora akkor és csak akkor szimmetrikus, ha $\mathbb{R}^n$-nek létezik az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek van olyan $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ ortonormált bázisa, melynek vektorai egy A tenzor sajátvektorai. Akkor minden $i = 1, \ldots, n$ indexhez van olyan λ_i valós szám, hogy

$$A(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i.$$

Igy

$$[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

amely mátrix szimmetrikus. Igy, a 11.18. Tétel szerint, A az $\mathbb{R}^n$ vektortér szimmetrikus tenzora.

Fordítva, tegyük fel, hogy A az $\mathbb{R}^n$ vektortér szimmetrikus tenzora. Megmutatjuk, hogy ekkor $\mathbb{R}^n$-nek van az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ezt az $\mathbb{R}^n$ vektortér n dimenziójára vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetén az állítás nyílvánvaló. Tegyük fel, hogy $n \geq 1$, és az állítás igaz minden n-nél nem nagyobb esetben. Legyen A az $\mathbb{R}^{n+1}$ vektortér egy szimmetrikus tenzora. A 11.19. Tétel miatt van olyan λ_1 valós szám, amely A-nak sajátértéke. Jelölje $\underline{e}_1$ az A egy normált sajátvektorát. A 11.10. Tétel miatt ez benne van az $\mathbb{R}^{n+1}$ tér egy ortonormált

$$\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}'_2, \ldots, \underline{e}'_{n+1}\}$$

bázisában. Jelölje W az $\mathbb{R}^{n+1}$ vektortér

$$\langle \underline{e}'_2, \ldots, \underline{e}'_{n+1} \rangle$$

alterét. Az világos, hogy tetszőleges

$$\underline{x} = \xi_1 \underline{e}_1 + \xi_2 \underline{e}'_2 + \cdots + \xi_{n+1} \underline{e}'_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

vektor akkor és csak akkor ortogonális az $\underline{e}_1$ vektorral, ha

$$0 = \underline{e}_1(\xi_1\underline{e}_1 + \xi_2\underline{e}'_2 + \cdots + \xi_{n+1}\underline{e}'_{n+1}) = \xi_1(\underline{e}_1\underline{e}_1) + \xi_2(\underline{e}_1\underline{e}'_2) + \cdots + \xi_{n+1}(\underline{e}_1\underline{e}'_{n+1}) = \xi_1,$$

azaz $\underline{x} \in W$. Igy, ha $\underline{x} \in W$ tetszőleges vektor, akkor az $\underline{e}_1 A(\underline{x})$ skaláris szorzatra

$$\underline{e}_1 A(\underline{x}) = A(\underline{e}_1)\underline{x} = (\lambda_1\underline{e}_1)\underline{x} = \lambda_1(\underline{e}_1\underline{x}) = 0$$

adódik. Tehát minden $\underline{x} \in W$ vektor esetén $A(\underline{x}) \in W$ is teljesül. Tehát az A tenzor a W alteret önmagába képezi le. Továbbá az is igaz, hogy A-nak W-re való leszűkítése a W egy szimmetrikus lineáris transzformációja. Mivel $dimW = n$, ezért W izomorf az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel. Az indukciós feltétel miatt W-nek van az A sajátvektoraiból álló

$$\{\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_{n+1}\}$$

ortonormált bázisa. Ennek vektorai az $\underline{e}_1$ vektorral együtt az $\mathbb{R}^{n+1}$ vektortér A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát adják. □

Az előző tétel felhasználásával egyszerűen adódik a következő tétel, amit a szimmetrikus tenzorok "Főtengely-tételének" is szoktak nevezni.

11.21. Tétel *(Főtengely-tétel) Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden szimmetrikus A tenzora esetén létezik az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban az A mátrixa diagonális; a főátlóban az A sajátértékei szerepelnek, mindegyik annyiszor, amennyi annak algebrai multiplicitása.*

Bizonyítás Ha A az $\mathbb{R}^n$ vektortér szimmetrikus tenzora, akkor a 11.20. Tétel szerint létezik az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. A 11.20. Tétel bizonyításának első részében láttuk, hogy ebben a bázisban az A mátrixa diagonális, azaz

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

alakú, melynek főátlójában az A tenzor sajátértékei szerepelnek. A 10.27. Tétel szerint az A tenzor sajátértékei megegyeznek ennek az $\mathbf{A}'$ mátrixnak a sajátértékeivel, amelyek viszont az

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz a

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei. Ebből már következik, hogy a főátlóban az A minden sajátértéke annyiszor szerepel, ahányszoros gyöke a karakterisztikus egyenletnek, azaz amennyi az illető sajátérték algebrai multiplicitása. $\square$

11.22. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden szimmetrikus A tenzora előáll*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\underline{s}_i \circ \underline{s}_i]$$

alakban, ahol a diadikus szorzatokban szereplő $\underline{s}_1, \ldots, \underline{s}_n$ vektorokból álló vektorrendszer az A tenzor sajátvektorainak egy ortonormált vektorrendszere, λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ pedig az $\underline{s}_i$ sajátvektorhoz tartozó sajátérték.

Bizonyítás Legyen A egy n-dimenziós szimmetrikus tenzor. A Főtengely-tétel szerint van az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek az A sajátvektoraiból álló $\mathcal{B} = \{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n\}$ ortonormált bázisa. Tetszőleges i indexre jelölje λ_i az A tenzor $\underline{s}_i$ sajátvektorához tartozó sajátértékét. Akkor

$$A(\underline{s}_i) = \lambda_i \underline{s}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Legyen $\underline{r} = \sum_{i_1}^{n} \xi_i \underline{s}_i$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges vektora. Akkor minden i indexre az $\underline{s}_i \underline{r}$ skaláris szorzat egyenlő ξ_i-vel. Ezt is felhasználva, kapjuk az alábbiakat

$$A(\underline{r}) = A\left(\sum_{i_1}^{n} \xi_i \underline{s}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} A(\xi_i \underline{s}_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A(\underline{s}_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (\lambda_i \underline{s}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \underline{s}_i) \xi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \underline{s}_i)(\underline{s}_i \underline{r}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\underline{s}_i (\underline{s}_i \underline{r})] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i ([\underline{s}_i \circ \underline{s}_i](\underline{r})) = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i [\underline{s}_i \circ \underline{s}_i]\right)(\underline{r}),$$

ahol $\circ$ a diadikus szorzatot jelöli. Mivel ez az egyenlőség az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden $\underline{r}$ vektorára érvényes, ezért

$$A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\underline{s}_i \circ \underline{s}_i].$$

$\square$

11.23. Definíció *Az $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i [\underline{s}_i \circ \underline{s}_i]$ előállítást az A szimmetrikus tenzor spektrál-előállításának nevezzük.*