

MATEMATIKA A2a – Vizsgakérdések, KJK 2024/25 tavaszi félév  
(Zárójelben a vizsgán bizonyítandó tételek témái szerepelnek.)

1. Számtest feletti lineáris egyenletrendszerek, a Gauss-módszer: A mátrixok sorlépcsős alakja. A lineáris egyenletrendszerek megoldhatósága és megoldása. (A Gauss-módszer ismertetése.)
2. Mátrixalgebra: A mátrix fogalma. Műveletek mátrixok között. (A mátrixszorzás asszociativitásának bizonyítása.)
3. A determináns: A determináns fogalma és alaptulajdonságai. A Vandermonde-determináns. (A Vandermonde-determináns kiszámítása.)
4. Mátrix inverze: Mátrix inverzének fogalma. Az inverz létezésének vizsgálata reguláris mátrix, illetve szinguláris mátrix esetén. Reguláris mátrix inverzének determinánisa. A Cramer-szabály. (Reguláris mátrix, illetve szinguláris mátrix invertálhatóságával kapcsolatos tétel bizonyítása.)
5. Mátrix rangja: Számtest feletti mátrix rangjának. A rang és az aldeterminánsok kapcsolata. A rangszámtétel. A lineáris egyenletrendszerek megoldhatóságának mátrixrangos feltétele. (A lineáris egyenletrendszerek mátrixrangos feltételét tartalmazó tétel bizonyítása.)
6. Mátrix sajátértékei, sajátvektorai: Mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak fogalma, és azok meghatározása. Mátrix karakterisztikus polinomja és karakterisztikus egyenlete. Mátrix sajátértékeinek és karakterisztikus egyenletének kapcsolata. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrix sajátértékei. Mátrixok hasonlósága. (Hasonló mátrixok spektrumainak kapcsolatára vonatkozó tétel bizonyítása.)
7. Vektortér: A vektortér fogalma és alaptulajdonságai. Lineárisan független és lineárisan függő vektorrendszer. Generátorrendszer, bázis, dimenzió. Vektortér altere. (Egy, illetve legalább két vektorból álló vektorrendszer lineáris függetlenségének szükséges és elégséges feltételét tartalmazó tétel bizonyítása.)
8. Lineáris leképezés: A lineáris leképezés fogalma és jellemzése. Képtér, magtér, dimenziótétel. Vektorterek izomorfizmusa. Műveletek lineáris leképezések között. Lineáris leképezések mátrixa. Lineáris transzformáció sajátértékei, sajátvektorai. Bázistranszformáció. Mátrixok skalárinvariánsai. (Azon tétel bizonyítása, amely szükséges és elégséges feltételt tartalmaz arra vonatkozóan, hogy egy lineáris transzformáció mely bázishoz tartozó mátrixa diagonális.)
9. Az  $R^n$  vektortér: A valós skaláris szorzás és tulajdonságai. Az  $n$ -edrendű tenzor fogalma. Szimmetrikus és ferdén szimmetrikus tenzorok. (A szimmetrikus tenzorok spektrálelőállításával kapcsolatos tétel bizonyítása.)
10. Számsorok I: A számsor fogalma. A számsor részletösszegének fogalma. Számsor összegének, illetve konvergenciájának fogalma. Számsorok általános konvergenciatételei. Nemnegatív tagú sorok. A konvergenciakritériumok. (Az általános gyökkritérium bizonyítása.)
11. Számsorok II: Leibniz-sorok. Számsorok abszolút és feltételes konvergenciája. Műveletek sorokkal. (A Leibniz-sor konvergenciájára vonatkozó tétel bizonyítása.)
12. Függvénysorok I: Hatványsorok. Taylor-sorok, illetve Maclaurin-sorok. (A hatványsorok konvergenciára vonatkozó Abel-tétel bizonyítása.)
13. Függvénysorok II: Fourier-sorok. (Annak bizonyítása, hogy tetszőleges  $2p$  szerint periodikus egyváltozós valós függvény  $[0, 2p]$  intervallumhoz tartozó integrálja tetszőleges a valós szám esetén megegyezik az  $[a, a+2p]$  intervallumhoz tartozó integráljával.)
14. A többváltozós valós függvények határértéke, folytonossága, parciális differenciálhatósága, differenciálhatósága. Az iránymenti differenciálhányados. Két- és többváltozós valós függvények szélsőértékei. (Az iránymenti differenciálhányados kiszámítására vonatkozó tétel bizonyítása.)
15. A kettős és hármas integrál fogalma és alaptulajdonságai. Folytonos függvények kettős és hármas integrálja. (Az integrál korlátjaival kapcsolatos tétel.)
16. Síkbeli és térbeli polárkoordináta-rendszer, hengerkoordináta-rendszer. A kettős és hármas integrál transzformációja. Transzformálás síkbeli és térbeli polárkoordinátákkal, valamint hengerkoordinátákkal. (A térbeli polárkoordinátákra való áttéréshez tartozó Jacobi-determináns abszolút értékének kiszámítása.)