1. fejezet

SOROK I.

Definíció 1.0.1 *Tetszőleges* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *sorozatból képezett*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

formális összeget sornak (vagy végtelen sornak) nevezünk. Rövid jelölése

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *elemeket a sor tagjainak nevezzük.*

Megjegyzés 1.0.2 Nyilvánvaló, hogy egy ilyen formális összegnek csak akkor lehet tényleges értéke, ha az $[a_n; n \in N^+]$ sorozat elemei olyan halmazból valók, amelyen összeadás van értelmezve. A továbbiakban arra az esetre szoritkozunk, amikor az összeadás asszociatív is (mint például a valós vagy a komplex számok, a valós vagy a komplex függvények halmazában), azaz a sorozat elemeit tartalmazó halmaz olyan algebrai struktúra, amelyen asszociatív összeadás van értelmezve. Emlékezzünk rá, hogy az ilyen struktúrát additív félcsoportnak neveztük.

Először olyan sorokkal fogunk foglalkozni, amelyek elemei (valós vagy komplex) számok; ezeket a sorokat számsoroknak nevezzük. Ezt követően olyan sorokat vizsgálunk, amelyek elemei (valós vagy komplex) függvények; ezeket a sorokat függvénysoroknak nevezzük.

1.1. Számsorok

Definíció 1.1.1 *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *számsor k-dik (k=1, 2, …) részletösszegén az*

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

összeget értjük.

Definíció 1.1.2 *Egy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

számsorról akkor mondjuk, hogy konvergens, ha k-dik részletösszegeinek

$$[s_k; k \in N^+]$$

sorozata konvergens. A k-dik részletösszegek sorozatának

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k$$

határértékét a számsor összegének nevezzük. Ha egy számsor k-dik részletösszegeinek sorozata divergens, akkor a számsort is divergensnek nevezzük. Ebben az esetben nem rendelünk összeget a számsorhoz.

Példa 1.1.3 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összeget is!

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

ezért

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$
$$...$$
$$s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}.$$

Mivel
$$lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2},$$
ezért a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
számsor konvergens, összege pedig $\frac{1}{2}$.

Példa 1.1.4 *Döntsük el, hogy a*
$$\sum_{n_1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$
számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel
$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$
ezért a k-dik részletösszegek sorozata
$$s_k = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$
Tehát
$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}) = 1.$$
Ezért a vizsgált sor konvergens, melynek összege egyenlő 1-gyel.

Példa 1.1.5 *Döntsük el, hogy a*
$$\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel

$$ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)=ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right)=ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)=$$

$$=ln\frac{n+1}{n}-ln\frac{n}{n-1},$$

ezért a vizsgált sor k-dik részletösszege

$$s_k=ln\frac{3}{2}-ln2+ln\frac{4}{3}-ln\frac{3}{2}+\cdots+ln\frac{k}{k-1}-ln\frac{k-1}{k-2}+ln\frac{k+1}{k}-ln\frac{k}{k-1}=$$

$$=-ln2+ln\frac{k+1}{k}.$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty}s_k=\lim_{k\to\infty}\left(-ln2+ln\frac{k+1}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(-ln2+ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)=-ln2,$$

ezért a vizsgált sor konvergens, és összege egyenlő $-ln2$-vel.

Példa 1.1.6 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n+1}$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Ha konvergens, akkor adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel minden pozitív egész n esetén

$$a_n=\frac{n}{3n+1}\geq\frac{n}{3n+n}=\frac{n}{4n}=\frac{1}{4},$$

ezért

$$s_k=a_1+a_2+\cdots a_k\geq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4}=\frac{k}{4},$$

és így

$$\lim_{k\to\infty}s_k=\lim_{k\to\infty}\frac{k}{4}=\infty.$$

Tehát a vizsgált sor divergens.

Megjegyzés 1.1.7 Igen egyszerűen belátható, hogy egy számsor konvergenciáján nem változtat, ha a sor elejéről véges sok tagot elhagyunk, vagy ha véges sok tagot a sor elejére írunk. Vizsgáljuk egy kicsit részletesebben azt az esetet, amikor elhagyjuk az s_k részletösszegű konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor első m tagját! Jelölje S_k az így keletkezett számsor k-dik részletösszegét. Ha $A = a_1 + \cdots + a_m$, akkor

$$S_k = a_{m+1} + \cdots + a_{m+k} = s_{m+k} - A.$$

Mivel az s_{m+k} sorozat a konvergens s_m sorozat részsorozata, ezért az s_{m+k} sorozat, és így az S_k sorozat is konvergens.

Tétel 1.1.8 *Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Példa 1.1.9 *Döntsük el, hogy konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

számsor!
Megoldás: Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

ezért (az előző tétel miatt) a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ számsor nem konvergens.

Tétel 1.1.10 *(Cauchy-féle konvergenciakritérium) Az*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

számsor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ϵ számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor tetszőleges pozitív p egész szám esetén az

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

Példa 1.1.11 *Mutassuk meg a Cauchy-féle konvergenciakritérium alkalmazásával, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens!

Megoldás: Tetszőleges ϵ pozitív valós szám esetén legyen $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$. Legyenek p és $n > n_0$ tetszőleges pozitív egész számok! Ekkor

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

és így

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| <$$

$$< \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| = \frac{p}{n^2+np} < \frac{p}{np} = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

Tehát a vizsgált sor konvergens.

Megjegyzés 1.1.12 *A Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint egy*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

számsor akkor és csak akkor divergens, ha megadható olyan pozitív ϵ szám, hogy minden n_0 valós számhoz lehet találni olyan p és $n > n_0$ pozitív valós számokat, amelyek esetén az

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \geq \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ha például megadható olyan n_0 valós szám, hogy tetszőleges $n \geq n_0$ pozitív egész szám esetén

$$\lim_{p\to\infty} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \neq 0,$$

akkor a vizsgált sor divergens.

Példa 1.1.13 *Mutassuk meg a Cauchy-féle konvergenciakritérium alkalmazásával, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

un. harmonikus sor divergens!

Megoldás: Tetszőleges n pozitív egész szám esetén

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+p} \right| > \frac{p}{n+p}.$$

Mivel

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{n+p} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{p}+1} = 1,$$

ezért

$$\lim_{p\to\infty} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+p} \right| \neq 0.$$

Így az 1.1.12 Megjegyzés miatt a vizsgált harmonikus sor divergens.

1.2. Műveletek számsorok között

Definíció 1.2.1 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsorok (ebben a sorrendben képezett) összegén a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$$

számsort, különbségén pedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$$

számsort értjük.

Tétel 1.2.2 *Konvergens számsorok összege és különbsége is konvergens. Továbbá, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor összege A, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsor összege B, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B.$$

Példa 1.2.3 *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

számsor összegét!

Megoldás: Világos, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2},$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ számsor összege

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}.$$

Definíció 1.2.4 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsornak egy α számmal képezett szorzatán a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ számsort értjük.*

Tétel 1.2.5 *Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens és összege A, akkor tetszőleges α számszorosa is konvergens, melynek összege megegyezik αA-val.*

Példa 1.2.6 *Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n}$ számsor összegét!*
Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n,$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n}$ számsor összege

$$5 \frac{\frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{25}{2}.$$

Definíció 1.2.7 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsorok Cauchy-szorzatán azt a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ számsort értjük, melynek n-dik tagja, azaz c_n, a következő szorzatösszeggel egyenlő:*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_{n-1} b_2 + a_n b_1.$$

Megjegyzés 1.2.8 *Konvergens számsorok Cauchy-szorzata általában nem konvergens. Megmutatható, hogy a konvergens*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

számsor önmagával vett Cauchy szorzatában szereplő c_n tagra

$$c_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{n+1-i}}$$

teljesül. A számtani és mértani közép kapcsoltára érvényes összefüggés alapján

$$\sqrt{(i+1)(n+1-i)} \leq \frac{n+2}{2}$$

minden i-re, ezért

$$|c_n| \geq (n+1) \frac{n}{n+2} \geq 1$$

minden n-re. Így a vizsgált sor önmagával képezett $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ Cauchy-szorzatában $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$, ami miatt a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor nem konvergens (az 1.1.8 Tételt szerint).