SOROK II.

0.1 Nemnegatív tagú sorok

Definíció 0.1.1 *Nemnegatív tagú soron olyan valós számokból álló sort értünk, melynek minden tagja nemnegatív.*

A nemnegatív tagú sorok k-dik részletösszegeinek $[s_k; k \in N^+]$ sorozata monoton növekvő. Jól ismert az a tény, hogy monoton növekvő, felülről korlátos sorozat konvergens. Az is igaz, hogy konvergens valós számsorozat (felülről) korlátos. Így igaz a következő állítás.

Tétel 0.1.2 *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha k-dik részletösszegeinek $[s_k; k \in N^+]$ sorozata felülről korlátos.*

Példa 0.1.3 *Mutassuk meg, hogy az*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

mértani sor konvergens, ha $0 \leq q < 1$!
Megoldás: Mint ismeretes,

$$s_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Ha $q = 0$, akkor minden k indexre $s_k = 1$; ebben az esetben a mértani sor konvergens.

Ha $0 < q < 1$, akkor

$$s_k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q},$$

azaz a mértani sor k-dik részletösszegeinek $[s_k; k \in N^+]$ sorozat korlátos. Így, az előző tétel szerint, a mértani sor konvergens.

Konvergenciakritériumok

Tétel 0.1.4 *(Integrálkritérium) Legyen $f(x)$ olyan egyváltozós valós függvény, amely valamely pozitív egész n_0 esetén az $[n_0, \infty)$ intervallumon monoton csökkenő és pozitív értékeket vesz fel. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olyan számsor, amelynek tagjaira $a_n = f(n)$ teljesül. Ebben az esetben, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ impropius integrál konvergens.*

Példa 0.1.5 Legyen p tetszőleges (rögzített) valós szám! Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

számsor konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.
Megoldás: Alkalmazzuk az integrálkritériumot! $f(x) = \frac{1}{n^p}$ és $n_0 = 1$. Először vizsgáljuk meg az $n = 1$ esetet!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = lim_{b \to \infty} [lnx]_1^b = \lim_{b \to \infty} (lnb) = \infty.$$

Tehát $n = 1$ esetén a sor nem konvergens. Vizsgáljuk most a $p \neq 1$ esetet!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = lim_{b \to \infty} \frac{1}{1-p} [x^{1-p}]_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b \to \infty} (b^{1-p} - 1).$$

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték nem létezik, mert ekkor $\lim_{b \to \infty} b^{1-p} = \infty$. Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték egyenlő $\frac{1}{p-1}$-gyel. Az integrálkritérium szerint tehát a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

sor konvergens, ha $p > 1$, és divergens, ha $p \leq 1$.

Tétel 0.1.6 *(Majoránskritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esetén megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Példa 0.1.7 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$$

sor konvergens!
Megoldás: Tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\frac{n}{n^3 + n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^3 + n^2} = \frac{1}{n^2 + n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoráns kritérium alapján a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + n^2 + 1}$$

sor is konvergens.

Tétel 0.1.8 *(Minoránskritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esetén megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül, és a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor is divergens.

Példa 0.1.9 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

sor divergens!
Megoldás: Minden n indexre

$$\frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$$

Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens, ezért - a minoráns kritérium szerint - a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

sor is divergens.

Megjegyzés 0.1.10 A továbbiakban azt fogjuk mondani, hogy a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esteté a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort (illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor minorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sort), ha megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül.

Tétel 0.1.11 *(Általános gyökkritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz található olyan $0 < q < 1$ feltételnek eleget tevő valós szám és olyan n_0 nemnegatív egész szám, hogy $n > n_0$ esetén*

$$a_n \geq 0, \quad \text{és} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsorhoz vannak olyan, a tételben szereplő feltételnek eleget tevő q és n_0 számok, melyekre

$$a_n \geq 0 \quad \text{és} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ekkor minden k pozitív egész számra

$$0 \leq a_{n_0+k} \leq q^{n_0+k}$$

teljesül, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort majorálja a

$$q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

mértani sor. Mivel q-ra teljesül a $0 < q < 1$ feltétel, ezért a mértani sor konvergens. Így az általános majoránskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Tétel 0.1.12 *(Speciális gyökkritérium) Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Megjegyzés 0.1.13 Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

teljesül, akkor $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nem teljesülhet, és ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Példa 0.1.14 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

számsor konvergens!
Megoldás: Alkalmazzuk a speciális gyökkritériumot! Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}} \frac{1}{e^2} < 1,$$

ezért a vizsgált sor konvergens.

Tétel 0.1.15 *(Általános hányadoskritérium) Ha a valós számokból álló* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sorhoz található olyan* $0 < q < 1$ *feltételnek eleget tevő valós szám és olyan* n_0 *nemnegatív egész szám, hogy* $n > n_0$ *esetén*

$$a_n > 0, \quad \textit{és} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens*

Tétel 0.1.16 *(Speciális hányadoskritérium) Ha a pozitív tagú* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens.*

Megjegyzés 0.1.17 Ha a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

teljesül, akkor van olyan N index, hogy $a_n > a_N > 0$ teljesül minden $n > N$ esetén, és ezért a $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ egyenlőség nem teljesülhet; ebben az esetben a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Példa 0.1.18 Döntsük el, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$$

számsor konvergens-e, vagy divergens?
Megoldás: Alkalmazzuk a speciális hánydoskritériumot! Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1) \frac{1 + \frac{1}{2^n}}{2 + \frac{1}{2^n}} = \infty,$$

ezért a vizsgált sor divergens.