SOROK III.

0.1 Leibniz-sorok

Definíció 0.1.1 *Leibniz-soron olyan valós számsort értünk, amelyben a tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és nullasorozatot alkotnak.*

Tétel 0.1.2 *Minden Leibniz-sor konvergens.*

Bizonyítás. A vizsgált Leibniz-sort a következő alakban vesszük fel:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots ,$$

ahol mindegyik a_n pozitív. Annak igazolásához, hogy a vizsgált sor k-dik részletösszegeinek $[s_k, k \in N^+]$ sorozata konvergens, elegendő megmutatni, hogy a sorozat páros indexű elemeiből álló $[s_{2k}, k \in N^+]$ részsorozata és a páratlan indexű elemeiből álló $[S_{2k-1}, k \in N^+]$ részsorozata konvergens, és ezek a részsorozatok közös határértékhez tartanak. Világos, hogy minden $k \in N^+$ esetén

$$s_{2k+1} = s_{2k-1} - a_{2k} + a_{2k+1} \leq s_{2k-1},$$

azaz a páratlan indexű elemek részsorozata monoton csökkenő. Az is világos, hogy minden $k \in N^+$ esetén

$$s_{2k+2} = s_{2k} + a_{2k+1} - a_{2k+2} \geq s_{2k},$$

azaz a páros indexű elemek sorozata monoton növekvő. Mivel minden $k \in N^+$ esetén

$$s_2 \leq s_{2k} = s_{2k-1} - a_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1,$$

ezért mindkét részsorozat korlátos. Ismert, hogy minden monoton csökkenő [növekvő], alulról [felülről] korlátos valós számsorozat konvergens, ezért a vizsgált részsorozatok konvergensek. Mivel $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} - \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k-1},$$

azaz a két részsorozat közös határértékhez tart. Tehát az $[s_k, k \in N^+]$ sorozat konvergens.

Példa 0.1.3 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{nlnn}$$

sor konvergens!
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a vizsgált sor Leibniz-sor. A sor tagjai váltakozó előjelűek. Az világos, hogy

$$lim_{n\to\infty}\frac{1}{nlnn} = 0.$$

Mivel minden $n \geq 2$ egész számra

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0 \quad \textit{és} \quad \frac{1}{lnn} > \frac{1}{ln(n+1)} > 0,$$

ezért

$$\frac{1}{nlnn} > \frac{1}{(n+1)ln(n+1)},$$

és így az $\frac{1}{nlnn}$ sorozat monoton csökkenő. Tehát a vizsgált sor Leibniz-sor, és így a sor konvergens.

0.2 Abszolút és feltételes konvergencia

Definíció 0.2.1 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsort abszolút konvergensnek nevezünk, ha a tagok abszolút értékéből alkotott*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

számsor konvergens.

Tétel 0.2.2 *Minden abszolút konvergens számsor konvergens.*

Példa 0.2.3 *Mutassuk meg, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ számsor abszolút konvergens!*

Megoldás: Az eredeti számsor abszolút konvergenciájának bizonyításához azt kell megmutatnunk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ számsor konvergens. A sor tagjai az $f(x)=\frac{1}{x^2}$ függvénynek a pozitív egész helyeken felvett függvényértékei. $\frac{1}{n^2}$ úgy is tekinthető, mint a síkbeli derékszögű koordinátarendszer x-tengelyének $[n-1,n]$ intervalluma fölé rajzolt olyan téglalap területe, melynek függőleges oldalhossza $\frac{1}{n^2}$. A sor k-dik részletösszege tehát a $[0,1]$, az $[1,2]$, ... , a $[k-1,k]$ intervallum fölé (az előzőekben részletezett módon) rajzolt téglalapok területeinek összege, Így

$$s_k \le 1+\int_1^k \frac{1}{x^2}dx = 1+\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx =$$

$$= 1+\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = 1+\lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{b}+1) = 2.$$

Tehát a nem-negatív tagú, monoton növekvő s_k sorozat korlátos, amelyből már következik, hogy konvergens. Tehát a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ számsor konvergens, és így a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ számsor abszolút konvergens.

Tétel 0.2.4 *Abszolút konvergens számsorok összege, különbsége és szorzata is abszolút konvergens. Abszolút konvergens számsor számszorosa is abszolút konvergens.*

Definíció 0.2.5 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ számsort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Példa 0.2.6 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

sor feltételesen konvergens.
Megoldás: Világos, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, ezért konvergens. Megmutatjuk, hogy a sor nem abszolút konvergens. Alkalmazzuk az integrálkritériumot. Mivel

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[lnx]_1^b = \infty,$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens, azaz az eredetileg vizsgált $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens.