FÜGGVÉNYSOROK I.

0.1 Alapfogalmak

Definíció 0.1.1 *Az olyan sort, amelynek tagjai függvények, függvénysornak nevezzük.*

A függvénysorok indexezését általában 0-tól kezdjük, azaz a függvénysorok általános alakja $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Mi olyan függvénysorokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek tagjai a komplex számok halmazán vagy annak valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvények. Az ilyen függvénysorokat komplex változós függvénysoroknak nevezzük. Speciális esetként foglalkozunk olyan függvénysorokkal is, amelyeknek tagja valós értékű, valós változós függvények. Az ilyen függvénysorokat valós változós függvénysoroknak nevezzük.

Definíció 0.1.2 *Egy komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor értelmezési tartományán mindazon komplex (speciálisan, valós) számoknak a halmazát értjük, amelyek az f_n függvények mindegyikének értelértelmezési tartományába beletartoznak.*

Példa 0.1.3 Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} ln(x-n)$ valós függvénysor értelmezési tartományát!
Megoldás: Az $ln(x-n)$ függvény értelmezési tartomány az (n, ∞) intervallum. Ezért egy x valós szám akkor és csak akkor van benne a függvénysor értelmezési tartományába, ha $x > n$ teljesül rá minden n nemnegatív egész n esetén. Így a függvénysor értelmezési tartomány az üres halmaz.

Példa 0.1.4 Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x+n}$ valós függvénysor értelmezési tartományát!
Megoldás: Az $\sqrt{x+n}$ függvény értelmezési tartománya az $[-n, \infty)$ intervallum. Ezért a függvénysor értelmezési tartománya a $[0, \infty)$ intervallum.

Definíció 0.1.5 *A komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor értelmezési tartományának z_0 elemét a függvénysor konvergenciapontjának nevezzük, ha a $z = z_0$ helyettesítéssel adódó $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ számsor konvergens. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ számsor divergens, akkor a z_0 számot a függvénysor divergenciapontjának nevezzük.*

Példa 0.1.6 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n}(x+1)^n$$

valós változós függvénysornak a $-\frac{4}{3}$ szám konvergenciapontja, a $-\frac{2}{3}$ szám pedig divergenciapontja!
Megoldás: A $-\frac{4}{3}$ számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 2^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

számsor Leibniz sor, ezért a sor konvergens. Tehát a $-\frac{4}{3}$ szám konvergenciapont.

A $-\frac{2}{3}$ számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

számsor divergens, mivel a sort minorálja a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor. Tehát a $-\frac{2}{3}$ szám divergenciapont.

Definíció 0.1.7 *Egy függvénysor konvergenciapontjainak halmazát a függvénysor konvergenciatartományának nevezzük.*

Példa 0.1.8 Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ valós függvénysor konvergenciatartományát!
Megoldás: Egy q valós számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett q kvóciensű $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Így a vizsgált függvénysor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum.

Definíció 0.1.9 *Egy komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor összegfüggvényén azt a f függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya megegyezik a függvénysor konvergencitartományával, és ezen konvergenciatartomány tetszőleges x_0 pontjához a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ számsor összegét rendeli.*

Példa 0.1.10 *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n$$

hatványsor összegfüggvényét!
Megoldás: A vizsgált sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2(x+1))^n$$

alakban is írható, amely egy $2(x+1)$ kvóciensű mértani sor. Ennek összegfüggvénye (a $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ intervallumon) a

$$-\frac{1}{2x+1}$$

függvény.

0.2 Hatványsorok

Definíció 0.2.1 *Az $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ és z_0 komplex konstansokkal, valamint a z komplex változóval képezett*

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

függvénysort a z_0 körüli komplex változós hatványsornak nevezzük. Ha a konstansok valósak és z is valós változó, akkor a sort valós változós hatványsornak nevezzük.

Megjegyzés 0.2.2 *Egy hatványsor szummajellel rövidebben is felírható:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Megjegyezzük, hogy az $a_0(z-z_0)^0$ akkor is jelöljön a_0-t, ha $z = z_0$.

Tétel 0.2.3 *(Abel-féle tétel) Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergens egy $z_1 \neq z_0$ pontban, akkor abszolút konvergens minden olyan z pontban, amelyre $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergens egy $z_1 \neq z_0$ pontban. Definíció szerint ez annyit jelent, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ számsor konvergens és ezért

$$lim_{n\to\infty} a_n(z_1-z_0)^n = 0.$$

Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért megadható olyan $v > 0$ valós szám, hogy minden n indexre

$$|a_n(z_1-z_0)^n| \leq v$$

teljesül. Legyen z olyan komplex szám, amely eleget tesz a $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ feltételnek. Ez ilyen z számokra igaz, hogy

$$0 < \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1,$$

és ezért a

$$v\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

mértani sor konvergens. Mivel

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \leq v\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n,$$

ezért a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ sort majorálja a konvergens $v \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ mértani sor. A majoránskritérium szerint a $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ sor konvergens, azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sor abszolút konvergens.

Megjegyzés 0.2.4 Az Abel-féle tétel szerint minden hatványsor konvergenciatartománya a komplex számsík valamely z_0 középpontú körének belső pontjaiból, illetve a kerületen lévő pontok némelyikéből áll. Ennek a körnek a ϱ sugarát a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük; ez lehet 0, lehet egy pozitív egész szám, de lehet ∞ is. Megmutatható, hogy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Példa 0.2.5 *Adja meg az*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát!
Megoldás: A hatványsor konvergenciasugara:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Mivel a -1, illetve 1 számoknak a hatványsorba való behelyettesítésével keletkezett $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, illetve $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ számsorok általános tagja nem tart nullához, ezért a -1 és 1 számok divergenciapontok. Tehát a vizsgált számsor konvergenciatartománya a $(-1,1)$ intervallum.

Tétel 0.2.6 *Ha a valós változós*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

hatványsor az $I = (a,b)$ véges vagy $I = (-\infty,\infty)$ végtelen intervallumban konvergens, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = s(x),$$

akkor a tagonkénti differenciállással, illetve tagonkénti integrálással adódó

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \textit{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hatványsor is konvergens az I intervallumban, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = s'(x),$$

illetve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = S(x) - S(x_0),$$

ahol S az s függvény tetszőlegesen választott primitív függvénye.

Példa 0.2.7 Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$$

hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!
Megoldás: A vizsgált hatványsor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n$$

hatványsor tagonkénti deriválásával keletkezett hatványsor. Ez a hatványsor $\frac{x}{2}$ kvóciensű mértani sor, melynek konveregnciatartománya a $(-2, 2)$ intervallum, összegfügvénye pedig (ezen az intervallumon):

$$s(x) = \frac{x}{2-x}.$$

Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n = s'(x) \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

0.3 Taylor-sorok, Maclaurin-sorok

Definíció 0.3.1 *Az x_0 pont valamely teljes környezetében akárhányszor differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 körüli Taylor-során az*

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

hatványsort értjük; ha $x_0=0$, akkor a sort Maclaurin-sornak is nevezzük.

Tétel 0.3.2 *Legyen f az x_0 valós szám valamely teljes környezetében akárhányszor differenciálható egyváltozós valós függvény. Az f függvény ebben a teljes környezetben akkor és csak akkor egyenlő saját x_0 körüli Taylor-sorának összegfüggvényével, azaz*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a Taylor-formula maradéktagja $n\to\infty$ esetén 0-hoz konvergál.

Megjegyzés 0.3.3 *Az $f(x)=e^x$ függvény Maclaurin-sora:*

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Az $f(x)=\sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Az $f(x)=\cos x$ függvény Maclaurin-sora:

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Tétel 0.3.4 *Legyen K az*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^2 + \cdots$$

hatványsor konvergenciatartománya, és legyen f a sor összegfüggvénye. Ekkor F-nek a K halmazon létezik Maclaurin-sora, és ez éppen az eredetileg adott sorral egyenlő.

Példa 0.3.5 *Adjuk meg az $f(x) = arctgx$ függvény Maclaurin-sorát!*
Megoldás: Ismert, hogy

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Az $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$ függvény a $-x^2$ kvóciensű mértani sor összegfüggvénye a $(-1, 1)$ intervallumon. Mivel az $S(x) = arctgx$ függvény az $s(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény egy primitív függvénye, ezért $S(x) - S(0)$ a $-x^2$ kvóciensű, $s(x)$ összegfüggvényű

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

hatványsor tagonkénti integrálásával keletkezett hatványsor összegfüggvénye, azaz

$$arctgx = S(x) - S(0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$