FÜGGVÉNYSOROK II.

0.1 Fourier-sorok

A legegyszerűbb rezgések, az úgynevezett harmonikus rezgések, amelyek eredő-jeként a legkülönbözőbb rezgések alakulhatnak ki. Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy előállítható-e minden rezgőmozgás tiszta harmonikus rezgések eredőjeként. A tapasztalat azt mutatja, hogy a periodikus rezgések általában előállíthatók ilyen módon.

A tiszta harmonikius rezgések matematikailag a $\cos nx$ és a $\sin nx$ $(n \in N^+)$ függvényekkel írhatók le. A fenti kérdés matematikailag tehát úgy fogalmazható meg, hogy adott f egyváltozós valós függvény előállítható-e

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_n \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

alakban. Mivel ennek az egyenlőségnek a jobb oldalán 2π szerint periodikus függvények állnak, ezért ilyen előállítás csak akkor lehetséges, ha az f függvény is 2π szerint periodikus.

Felvetődik az a kérdés, hogy ha az egyváltozós valós f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor megadható-e olyan zérustól különböző c konstans, amellyel fenáll az

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos cx + b_n \sin cx + a_2 \cos 2cx + b_2 \sin 2cx + \cdots$$

egyenlőség. Az egyenlőség teljesülése esetén a $\cos cx$ és $\sin cx$ függvényeknek $2p$ szerint periodikusnak kell lenni; ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha c-re teljesülnek a

$$\cos 2pc = \cos 0 = 1 \quad \text{és} \quad \sin 2pc = \sin 0 = 0$$

egyenlőségek. A legkisebb olyan c, amelyre ez teljesül, a

$$2pc = 2\pi$$

egyenlet megoldása, vagyis

$$c = \frac{\pi}{p}.$$

A $2p$ szerint periodikus f függvényekhez definiálni fogunk egy

$$a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{p} x + b_n \sin \frac{\pi}{p} x + a_2 \cos 2\frac{\pi}{p} x + b_2 \sin 2\frac{\pi}{p} x + \cdots$$

alakú függvénysort speciális

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$$

együtthatókkal (az un. Fourier-együtthatókkal), amely sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük, és megvizsgáljuk, hogy milyen esetben lesz az f függvény a Fourier-sorának összegfüggvénye.

Definíció 0.1.1 *A $2p$ szerint periodikus valós f függvény Fourier-együtthatóin az*

- $a_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x) dx,$
- $a_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \cos n\frac{\pi}{p} x dx \quad (n \in N^+),$
- $b_n = \frac{1}{p} \int_0^{2p} f(x) \sin n\frac{\pi}{p} x dx \quad (n \in N^+)$

számokat értjük; az ezekkel képezett

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\frac{\pi}{p} x + b_n \sin n\frac{\pi}{p} x)$$

függvénysort pedig az f függvény Fourier-sorának nevezzük.

A fenti definíciónak a $p = \pi$ esetre vonatkozó alakját is megfogalmazzuk.

Definíció 0.1.2 *A 2π szerint periodikus valós f függvény Fourier-együtthatóin az*

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$

- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n \in N^+)$,
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n \in N^+)$

számokat értjük; az ezekkel képezett

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénysort pedig az f függvény Fourier-sorának nevezzük.

Tétel 0.1.3 *Ha a periodikus egyváltozós valós f függvénynek az x_0 helyen van bal oldai és jobb oldali határértéke, és a függvény Fourier-sora az x_0 pontban konvergens, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli összege az f függvény x_0 pontbeli bal oldali és jobb oldali határértékének számtani közepével egyenlő Speciálisan, ha az f függvény folytonos az x_0 helyen, Fourier-sora pedig konvergens x_0-ban, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli összege $f(x_0)$-lal egyenlő.*

Tétel 0.1.4 *Ha a $[-p, p]$ intervallumnak van olyan*

$$-p = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = p$$

beosztása, hogy az (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ intervallumokon a $2p$ szerint periodikus függvény monoton, akkor az f függvény Fourier-sora mindenütt konvergens (ha létezik).

A Fourier-együtthatók kiszámításához hasznos adalék a következő tétel.

Tétel 0.1.5 *Ha az egyváltozós valós f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor bármely valós a számra*

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_0^{2p} f(x)dx.$$

Ebből adódóan, a Fourier együtthatók kiszámításakor az integrálás tetszőleges $2p$ hosszúságú intervallumon végezhető.

Bizonyítás.

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_a^{2p} f(x)dx + \int_{2p}^{a+2p} f(x)dx.$$

Az egyenlőség jobb oldalán álló második integrálban végezzünk

$$x = t + 2p$$

helyettesítést. Mivel

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

és a

$$t(x) = x - 2p$$

szigorúan monoton növekvő függvényre

$$t(2p) = 0 \quad \text{és} \quad t(a + 2p) = a$$

teljesül, ezért

$$\int_{2p}^{a+2p} f(x)dx = \int_0^a f(t + 2p)dt = \int_0^a f(t)dt,$$

felhasználva azt is, hogy az f függvény $2p$ szerint periodikus (és ezért $f(t + 2p) = f(t)$). Az $\int_0^a f(t)dt$ integrálban x-et írhatunk a t helyett, azaz

$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx.$$

A bizonyítás elején levő egyenlőség tehát a következő alakú:

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_a^{2p} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Ismeretes, hogy ha egy egyváltozós valós függvény az egész számegyenesen értelmezve van, akkor felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként. Ezért is érdekes számunkra a következő tétel.

Páros h függvény $[-p, p]$ intervallumon vett integrálja a $[0, p]$ intervallumon vett integrál kétszerese, páratlan h függvény $[-p, p]$ intervallumon vett integrálja pedig 0. Ezt a tényt is használjuk a következő megjegyzésben.

Megjegyzés 0.1.6 *Ha f páros függvény, akkor $f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x$ páratlan, $f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x$ pedig páros függvény, és ezért (használva a fentebb bizonyított tétel eredményét is)*

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx = 0,$$

valamint

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx$$

és

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Ha f páratlan függvény, akkor $f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x$ páratlan, $f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x$ pedig páros függvény, és ezért

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$$

és

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx = 0,$$

valamint

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Az előző megjegyzés alapján megfogalmazhatjuk a következő tételt.

Tétel 0.1.7 *Páros f függvény Fourier-sorában csak konstans és koszinoszos tagok szerepelnek:*

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Páratlan f függvény Fourier-sorában csak szinuszos tagok szerepelnek:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx.$$