TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK I.

Definíció 0.0.1 *Egy $M \neq \emptyset$ halmaz esetén az M^2 halmaznak a valós számok halmazába való egyértelmű d leképezését az M halmazon értelmezett távolságfüggvénynek nevezzük, ha M tetszőleges A, B, C elemeire teljesülnek az alábbiak:*

(1) $d(A, B) \geq 0$;

(2) $d(A, B) = 0$ *akkor és csak akkor, ha* $A = B$;

(3) $d(A, B) = d(B, A)$;

(4) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

Ha egy $M \neq \emptyset$ halmazon értelmezve van egy d távolságfüggvény, akkor azt mondjuk hogy M egy metrikus tér (a d távolságfüggvényre nézve).

Megjegyezzük, hogy a valós szám-n-esek $\mathbb{R}^n$ halmaza metrikus tér a következő d távolságfüggvényre nézve: tetszőleges $A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ és $B = [b_1, b_2, \ldots, b_n]$ szám-n-esek esetén

$$d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

Definíció 0.0.2 *n-változós valós függvényen olyan függvényt értünk, melynek értelmezési tartománya valós szám-n-esekből, értékkészlete pedig valós számokból áll. Ha $n = 1$, akkor egyváltozós valós függvényről, ha $n > 1$, akkor többváltozós valós függvényről beszélünk.*

Egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény esetén ábrázolhatjuk egy derékszögű koordináta-rendszerben azon $(x, y, f(x, y))$ pontok összességét, amelyeknél az (x, y) pont benne van az f függvény értelmezési tartományában (lásd az alábbi ábrát).

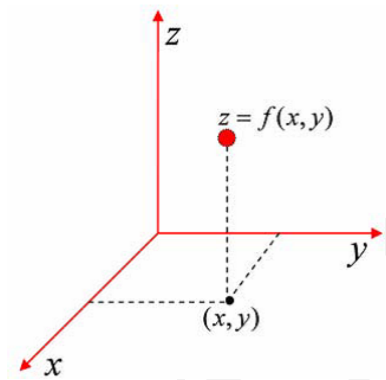

Figure 1: Grafikon szerkesztése

Az $(x, y, f(x, y))$ pontok által alkotott felületet az f függvény grafikonjának nevezzük. A következő ábra az $f(x, y) = y^2 - x^2$ függvény grafikonjának egy részét mutatja.

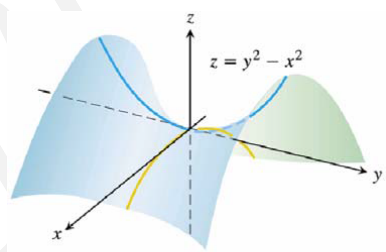

Figure 2: Az f(x,y)=$y^2 - x^2$ grafikonja

Definíció 0.0.3 *Az m-változós valós $f(u_1, \ldots, u_m)$ külső függvényből és az n-változós valós $u_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots m)$ belső függvényekből összetett fügvényen azt az n-változós valós, $f \circ (u_1, \ldots, u_m)$ módon jelölt függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya azokból (és csak azokból) a*

$$P_0 = (x_{10} \ldots, x_{n0})$$

pontokból áll, amelyekben az $u_1, \ldots, u_m$ függvények mindegyike értelmezve van és az

$$U_0 = (u_1(P_0), \ldots, u_m(P_0))$$

pont benne van az f függvény értelmezési tartományában.

0.1 Függvényhatárérték és folytonosság

Definíció 0.1.1 *Az $\mathbb{R}^n$ metrikus tér P_0 pontjáról akkor mondjuk, hogy az n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának torlódási pontja, ha megadható D_f-nek olyan, P_0-hoz konvergáló P_n pontsorozata, amely sorozatnak egyetlen P_n pontja sem egyezik meg a P_0 ponttal, azaz $P_n \neq P_0$ teljesül minden n indexre.*

Példaként említjük, hogy egy számegyenesen (az $\mathbb{R}$ metrikus téren) az (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ intervallumok mindegyikének torlódási pontjai az $[a, b]$ intervallum pontjai.

Definíció 0.1.2 *(A függvényhatárérték Heine-féle definíciója) Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában van határértéke, és ez a határérték L, ha minden, a P_0-hoz konvergáló $P_n \in D_f$ pontsorozat esetén az $f(P_n)$ függvényértékek sorozata L-hez konvergál; képletben:*

$$(\forall P_n \in D_f): \quad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n) = L.$$

Ha egy n-változós valós f függvény P_0-pontbeli határértéke L, akkor ezt a következőképpen jelöljük:

$$\lim_{P\to P_0} f(P) = L.$$

Kétváltozós valós f függvény esetén (ha x és y jelölik a független változókat és $P_0 = (x_0, y_0)$) a következő jelölést is használjuk:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = L.$$

Háromváltozós valós függvény esetén ez így alakul (ha x, y és z jelölik a független változókat és $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$):

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0 \\ z \to z_0}} f(x, y, z) = L.$$

Példa 0.1.3 Mutassuk meg, hogy az

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

függvénynek a $P_0 = (0, 0)$ pontban nincs határértéke!
Megoldás: A vizsgált f függvény csak a $P_0(0, 0)$ pontban nincs értelmezve. Így P_0 az f függvény értelmezési tartományának torlódási pontja. Ha azt akarjuk megmutatni, hogy f-nek nincs határértéke P_0-ban, akkor találnunk kell olyan xy-síkbeli, P_0-hoz konvergáló P_n pontsorozatot, melynek elemei különböznek P_0-tól, és az $f(P_n)$ sorozat nem konvergens, vagy találnunk kell két olyan xy-síkbeli, P_0-hoz konvergáló pontsorozatot, melynek elemei különböznek P_0-tól, és az egyes pontsorozatokhoz tartozó függvényértékekből álló sorozatok konvergensek, de határértékeik különböznek egymástól.

Legyen P_n olyan P_0-hoz konvergáló pontsorozat, melynek elemei az x-tengelyen helyezkednek el, azaz $P_n = (x_n, 0)$, ahol $x_n \to 0$ miközben n a ∞-hez tart. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = 0.$$

Ez még nem jelenti azt, hogy az f függvénynek 0 lenne a határértéke P_0-ban. Az y-tengelyen lévő, P_0-hoz konvergáló tetszőleges P_n pontsorozatra is $\lim_{n \to \infty} f(P_n) = 0$ adódik. További vizsgálatra van szükség. Tekintsünk most egy P_0-hoz konvergáló olyan P_n pontsorozatot, amelynek elemei az $y = mx$ $(m \neq 0)$ egyenesen helyezkednek el. Ekkor $P_n(x_n, mx_n)$ alakú, és ezért

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{m x_n^3}{x_n^4 + m^2 x_n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{m x_n}{x_n^2 + m^2} = 0.$$

Az eddigi eredmények alapján már arra gondolhatnánk, hogy a vizsgált függvénynek még is csak van határértéke P_0-ban, és ez a határérték 0. Legyen viszont P_n olyan P_0-hoz konvergáló pontsorozat, ahol a P_n pontok az $y = x^2$ egyenletű parabolán helyezkednek el. Ekkor

$$\lim_{n \to \infty} f(P_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^4}{x_n^4 + x_n^4} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

amely már bizonyítja (az előző eredményeket is használva), hogy a vizsgált f függvénynek a $P_0 = (0,0)$ pontban nincs határértéke.

Megjegyzés 0.1.4 Egy többváltozós valós f függvény esetén vizsgálhatjuk azt is, hogy létezik-e a végtelemben vett határérték. Például vizsgálhatjuk a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény esetén, hogy létezik-e a

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x,y)$$

határérték. Ekkor azt vizsgáljuk, hogy van-e olyan L valós szám, hogy bármely olyan $P_n = (x_n, y_n)$ pontsorozat esetén, amelyeknél $x_n \to \infty$ és $y_n \to \infty$ teljesül, az $f(x_n, y_n)$ függvényértékek sorozata L-hez tart.

Példa 0.1.5 Mutassuk meg, hogy létezik a

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$$

határérték!
Megoldás: Legyen $P_n(x_n, y_n)$ olyan tetszőleges pontsorozat, ahol $x_n \to \infty$ és $y_n \to \infty$, miközben n tart a végtelenhez. Ekkor feltehettő, hogy $x_n > 0$ és $y_n > 0$. Azt kell megmutatni, hogy létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + y_n}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2}$$

határérték. Osszuk el a számlálót és a nevezőt is az $x_n y_n$ szorzattal. Akkor

$$\frac{x_n + y_n}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} = \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}}.$$

Elegendő tehát a jobb oldalon álló sorozat határértékét vizsgálni. A számtani közép és mértani közép közötti kapcsolatot is használva,

$$\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{x_n} \geq 2\sqrt{\frac{x_n}{y_n}\frac{y_n}{x_n}} = 2.$$

Így

$$\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n} \geq 1,$$

és ezért

$$\frac{1}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq 1.$$

Ebből már az is következik, hogy

$$\frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq \frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}.$$

Mivel

$$0 \leq \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} \leq \frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n} \right) = 0,$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{y_n} + \frac{1}{x_n}}{\frac{x_n}{y_n} - 1 + \frac{y_n}{x_n}} = 0$$

Tehát

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

Az egyváltozós valós függvények esetéhez hasonlóan, a többváltozós valós függvényekre is megfogalmazható a függvényhatárérték egy másik definíciója.

Definíció 0.1.6 *(A függvényhatárérték Cauchy-féle definíciója) Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény D_f értelmezési tartományának P_0 torlódási pontjában van határértéke, és ez a határérték L, ha bármely pozitív ϵ valós számhoz megadható olyan pozitív δ valós szám, hogy az f értelmezési tartományának minden P pontjára a $d(P, P_0) < \delta$ feltételből $|f(P) - L| < \epsilon$ következik.*

Tétel 0.1.7 *A függvényhatárérték Heine-féle és Cauchy-féle definíciói egymással ekvivalensek.*

Ezek után megfogalmazzuk az n-változós valós függvények folytonosságának definícióját.

Definíció 0.1.8 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény folytonos az $\mathbb{R}^n$ tér valamely P_0 pontjában, ha teljesülnek az alábbiak:*

(1) Az f függvény P_0-ban értelmezve van;

(2) Az f függvénynek P_0-ban van határértéke;

(3) Az f függvény P_0-pontbeli határértéke megegyezik a P_0-pontbeli helyettesítési értékkel, azaz $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Példa 0.1.9 *Mutassuk meg, hogy az*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & ha\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ha\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény folytonos a $P_0 = (0,0)$ pontban.
Megoldás: A vizsgált függvény a $P_0 = (0,0)$ pontban értelmezve van, ott a helyettesítési értéke 0. Ahhoz, hogy megmutassuk azt, hogy f folytonos P_0-ban, már csak azt kell megmutatnunk, hogy f-nek a P_0-ban van határértéke, és ez a határérték 0. Mivel

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = \infty,$$

ezért

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{1}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2}} = 0$$

(itt az x^2y^2 szorzattal osztottuk a számlálót és a nevezőt is). Tehát a vizsgált függvény folytonos a $P_0 = (0,0)$ pontban.

Tétel 0.1.10 *Ha az n-változós valós $u_1, \ldots, u_m$ függvények folytonosak egy P_0 pontban és az m-változós valós f függvény folytonos az*

$$U_0 = (u_1(P_0), \ldots, u_m(P_0))$$

pontban, akkor az $f \circ (u_1, \ldots, u_m)$ összetett függvény is folytonos a P_0 pontban.