TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK II.

Az egyváltozós valós függvények vizsgálatában fontos szerep jutott a differenciálhatóság fogalmának, melynek két, egymással ekvivalens definíciója ismeretes.

Egyik szerint, akkor mondjuk, hogy az egyváltozós valós $f(x)$ függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely x_0 pontjában, ha létezik a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték, amely határértéket az f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosának nevezzük és $f'(x_0)$ módon jelöljük.

A másik szerint, akkor mondjuk, hogy az egyváltozós valós $f(x)$ függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely x_0 pontjában, ha megadható egy olyan d valós szám és x_0-nak egy olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli x pont esetén teljesül az

$$f(x) - f(x_0) = d(x - x_0) + \epsilon(x)(x - x_0)$$

egyenlőség, ahol $\epsilon(x)$ olyan egyváltozós valós függvény, amely teljesíti a

$$\lim_{x \to x_0} \epsilon(x) = 0$$

feltételt.

A következő fejezetekben azzal foglalkozunk, hogy az egyváltozós valós függvények differenciálhatóságának fogalmát hogyan tudjuk kiterjeszteni n-változós valós függvényekre.

0.1 Az n-változós valós függvények parciális differenciálhatósága

Definíció 0.1.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós*

$$f(x_1, \dots x_i, \dots x_n)$$

függvény értelmezési tartományának

$$P_0 = (x_{10}, \dots, x_{i0}, \dots, x_{n0})$$

pontjában parciálisan differenciálható az i-dik változója, azaz az x_i változó szerint, ha az f függvényből az $x_j = x_{j0}$ $(j \neq i)$ behelyettesítéssel keletkezett, csak az x_i változótól függő, egyváltozós valós függvény differenciálható az x_{i0} pontban. Ennek a függvénynek az x_{i0} pontbeli differenciálhányadosát az n-változós valós f függvény P_0 pontbeli, x_i szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük és $f'_{x_i}(P_0)$ módon jelöljük.

Egyváltozós valós $f(x)$ függvény esetén a függvény (egyetlen) változója szerinti, valamely $x_0 \in D_f$ pontbeli parciális differenciálhányadosa megegyezik az x_0 pontbeli közönséges értelemben vett differenciálhányadosával. Ekkor az $f'_x(x_0)$ kifejezés helyett a szokásos $f'(x_0)$ jelölést használjuk.

A következőkben megfogalmazzuk a parciális deifferenciálhatóságnak a kétváltozós, illetve háromváltozós valós függvényekre vonatkozó változatát.

Definíció 0.1.2 *Akkor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény az x változója szerint parciálisan differenciálható értelmezési tartományának valamely $P_0 = (x_0, y_0)$ pontjában, ha létezik a*

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény P_0 pontbeli, x változó szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük.

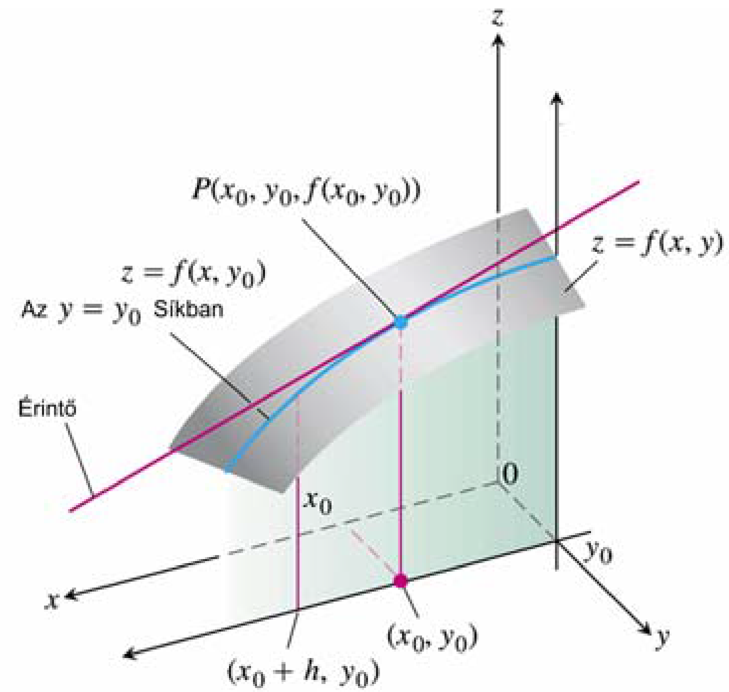

Figure 1: Az x szerinti parciális differenciálhányados geometriai jelentése

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli x változó szerinti parciális differenciálhányadosának geometriai jelentése: a $z = f(x, y)$ egyenletű felület és az $y = y_0$ egyenletű sík metszésvonalaként keletkezett térgörbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőjének iránytangense (lásd a fenti ábrát).

Definíció 0.1.3 *Akkor mondjuk, hogy egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény az y változója szerint parciálisan differenciálható értelmezési tartományának valamely $P_0 = (x_0, y_0)$ pontjában, ha létezik a*

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

határérték. Ezt a határértéket az f függvény P_0 pontbeli, y változó szerinti parciális differenciálhányadosának nevezzük.

Az $f(x, y)$ függvény (x_0, y_0) pontbeli y változó szerinti parciális differenciálhányadosának geometriai jelentése: a $z = f(x, y)$ egyenletű felület és az

$x = x_0$ egyenletű sík metszésvonalaként keletkezett térgörbe $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontbeli érintőjének iránytangense (lásd az alábbi ábrát).

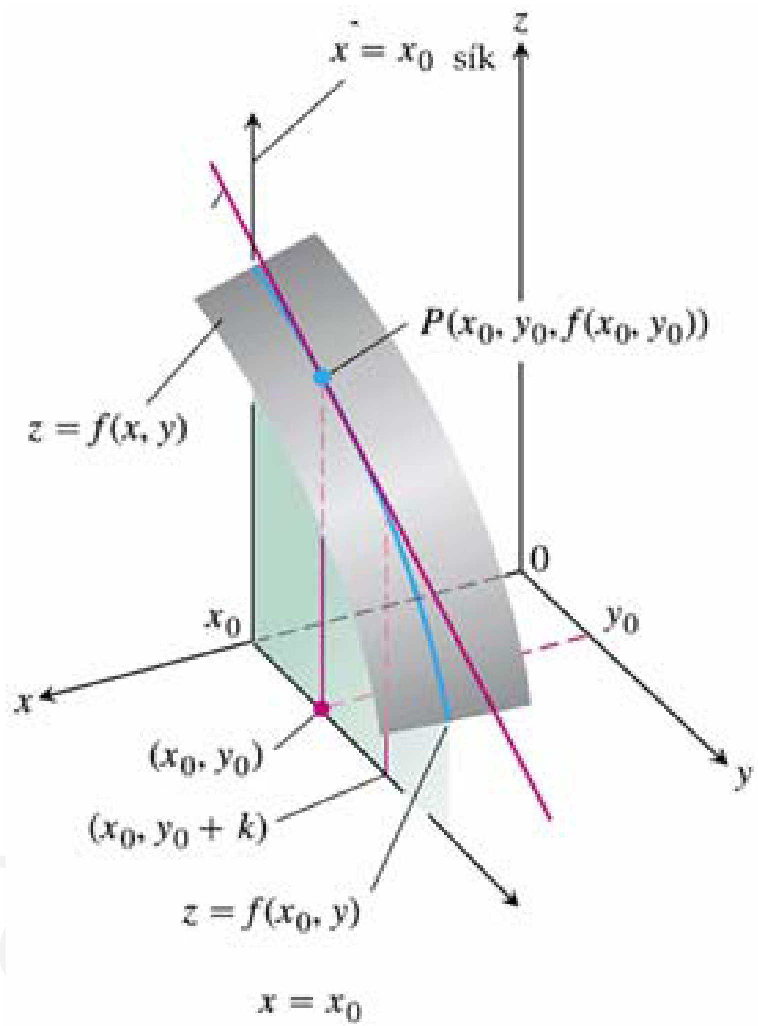

Figure 2: Az y szerinti parciális differenciálhányados geometriai jelentése

Hasonlóan értelmezhető a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvények változói szerinti parciális differenciálhányadosok a függvény értelmezési tartományának tetszőleges $P_0 = (x_0, x_0, z_0)$ pontjában:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0, z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0},$$

$$f'_z(x_0, y_0, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0}.$$

Definíció 0.1.4 *Egy n-változós valós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény x_i változó szerinti parciális deriváltfüggvényén azt az n-változós valós f'_{x_i} függvényt értjük, amely azokban a $P_0 \in D_f$ pontokban van értelmezve, amely pontokban létezik az f függvény x_i szerinti parciális differenciálhányadosa, és minden ilyen P_0 ponthoz függvényértékként az $f'_{x_i}(P_0)$ parciális differenciálhányadost rendeli.*

Megjegyzés 0.1.5 *Mivel a parciális deriváltfüggvény speciális egyváltozós függvény közönséges értelemben vett deriváltfüggvénye, ezért a parciális deriválás szabályai megegyeznek az egyváltozós valós függvényeknél tanult deriválási szabályokkal. Adott n-változós valós f és g függvények tetszőleges x_i változója esetén*

$$(f \pm g)'_{x_i} = f'_{x_i} \pm g'_{x_i},$$

$$(fg)'_{x_i} = fg'_{x_i} + f'_{x_i} g,$$

$$(\frac{f}{g})'_{x_i} = \frac{f'_{x_i} g - f g'_{x_i}}{g^2}.$$

Definíció 0.1.6 *Egy n-változós valós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvény r-edik $(r \geq 1)$ parciális deriváltjain (más néven, r-edrendű parciális deriváltjain) a függvény $r-1$-edrendű parciális deriváltjainak parciális deriváltjait értjük, kiegészítve azzal a megjegyzéssel, hogy a függvény bármelyik változója szerinti 0-dik parciális deriváltján magát a függvényt értjük.*

A következő tétel az r-edrendű parciális deriváltak kapcsolatára vonatkozik.

Tétel 0.1.7 *Legyen P_0 az n-változós valós f függvény értelmezési tartományának olyan pontja, amelynek valamely teljes környezetében az f függvény összes r-edrendű parciális deriváltja folytonos. Akkor az f függvény bármely két olyan r-edrendű parciális deriváltja, amely csak a deriválások sorrendjében tér el egymástól, a P_0 pontban ugyanazt az értéket veszi fel.*

Ennek a tételnek egy speciális esetét is megfogalmazzuk, amely tételre a Young-tétel néven is szoktak hivatkozni.

Tétel 0.1.8 *Ha a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjai az (x_0, y_0) pont valamely teljes környezetében folytonosak, akkor*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

0.2 Az n-változós valós függvények differenciálhatósága

Definíció 0.2.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, ha megadható olyan $\underline{d} \in \mathbb{R}^n$ vektor és P_0-nak egy olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli P pont esetén teljesül az*

$$f(P) - f(P_0) = \underline{d}\overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség, ahol $\underline{\epsilon}(P)$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektor, amely eleget tesz a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}$$

feltételnek.

Tétel 0.2.2 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor egy és csak egy olyan $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{d}$ vektor létezik, amelyre teljesülnek a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, továbbá tegyük fel azt is, hogy van két olyan $\mathbb{R}^n$-beli $\underline{d}_1$ és $\underline{d}_2$ vektor, amelyekre teljesülnek a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételek. Nevezetesen, megadhatók P_0-nak olyan E_1 és E_2 teljes környezetei, hogy

$$(\forall P \in E_1) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_1 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_1(P)\overrightarrow{P_0P}$$

és

$$(\forall P \in E_2) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_2 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_2(P)\overrightarrow{P_0P}$$

teljesül, ahol $\underline{\epsilon}_1$ és $\underline{\epsilon}_2$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektorok, melyekre a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}_1(P) = \underline{0}$$

és

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}_2(P) = \underline{0}$$

teljesülnek. Legyen $E = E_1 \cap E_2$. Akkor

$$(\forall P \in E) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_1 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_1(P)\overrightarrow{P_0P}$$

és

$$(\forall P \in E) : f(P) - f(P_0) = \underline{d}_2 \overrightarrow{P_0P} + \underline{\epsilon}_2(P)\overrightarrow{P_0P}.$$

Az alsó egyenlőségnek a felsőből való kivonása, majd az így kapott egyenlőség rendezése után a következő adódik:

$$(\forall P \in E) : (\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\overrightarrow{P_0P} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)\overrightarrow{P_0P}.$$

Legyen $\underline{e} \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges egységvektor. Akkor tetszőleges P_0-tól különböző olyan $P \in E$ pontra, amelyek az $\underline{e}$ egységvektor pozitív valós számszorosai, igaz a következő egyenlőség:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)|\overrightarrow{P_0P}|\underline{e} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)|\overrightarrow{P_0P}|\underline{e}.$$

Elosztva mindkét oldalt a nullától különböző $|\overrightarrow{P_0P}|$ számmal, a következő adódik:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\underline{e} = (\underline{\epsilon}_1 - \underline{\epsilon}_2)\underline{e}.$$

Vegyük mindkét oldal határértékét, miközben P tart a P_0-hoz. A következőt kapjuk:

$$(\underline{d}_2 - \underline{d}_1)\underline{e} = \underline{0}\underline{e} = 0.$$

Így azt kaptuk, hogy a $(\underline{d}_2 - \underline{d}_1) \in \mathbb{R}^n$ vektor az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges egységvektorára merőleges. Korábbi tanulmányainkból következik, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a $\underline{d}_2 - \underline{d}_1$ vektor a nullvektor, azaz, ha

$$\underline{d}_2 = \underline{d}_1.$$

Definíció 0.2.3 *Egy n-változós valós $f(x_1, \ldots, x_n$ függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli gradiensvektorán az n-dimenziós*

$$\underline{grad} f(P_0) = [f'_{x_1}(P_0), \ldots, f'_{x_n})] \in \mathbb{R}^n$$

vektort értjük, feltéve, hogy léteznek az f függvénynek a P_0 pontbeli parciális differenciálhányadosai minden egyes változója szerint.

Tétel 0.2.4 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor a differenciálhatóság definíciójában szereplő feltételnek eleget tevő (egyetlen) vektor megegyezik az f függvény P_0-pontbeli gradiensvektorával.*

Az előző tétel alapján megfogalmazhatjuk az n-változós valós függvények differenciálhatóságának egy, a korábbival ekvivalens változatát.

Definíció 0.2.5 *Egy n-változós valós f függvényről akkor mondjuk, hogy differenciálható értelmezési tartományának valamely P_0 pontjában, ha létezik a P_0 pontbeli gradiensvektora, és megadható P_0-nak olyan E teljes környezete, hogy minden E-beli P pont esetén teljesül az*

$$f(P) - f(P_0) = \overrightarrow{P_0P}\,\underline{grad} f(P_0) + \underline{\epsilon}(P)\overrightarrow{P_0P}$$

egyenlőség, ahol $\underline{\epsilon}(P)$ a P-től függő olyan $\mathbb{R}^n$-beli vektor, amely eleget tesz a

$$\lim_{P \to P_0} \underline{\epsilon}(P) = \underline{0}$$

feltételnek.

Korábban bizonyított eredmény alapján, ha egy egyváltozós való $f(x)$ függvény differenciálható egy x_0 pontban, akkor folytonos is x_0-ban. Érvényes ennek az eredménynek az n-változós valós függvényekre vonatkozó alakja, azaz igaz a következő tétel.

Tétel 0.2.6 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható értelmezés tartományának valamely P_0 pontjában, akkor folytonos is P_0-ban.*

Ha egy n-változós valós f függvény folytonos egy P_0 pontban, akkor ott nem feltétlenül differenciálható. Viszont f parciális deriváltfüggvényeinek P_0-beli folytonossága maga után vonja a függvény P_0 pontbeli differenciálhatóságát, azaz igaz a következő tétel.

Tétel 0.2.7 *Ha az n-változós valós f függvény minden egyes változója szerinti parciális deriváltfüggvénye folytonos a P_0 pontban, akkor az f függvény differenciálható P_0-ban (és ezért folytonos is P_0-ban).*

Korábbi tanulmányaikból ismert, hogy az egyváltozós valós függvényekből képezett összetett függvény deriváltját a külső és a belső függvény deriváltjának szorzataként is mgkaphatjuk. A következőkben egy olyan szabályt (az un. láncszabályt) ismertetünk, melynek alapján a többváltozós valós függvények parciális deriváltjait a külső függvény és a belső függvények parciális deriváltjaiból kaphatjuk meg.

Tétel 0.2.8 *Ha az n-változós valós $u_j(x_1, \ldots, x_n)$ $(j = 1, \ldots, m)$ belső függvények parciálisan differenciálhatóak egy P_0 pontban az x_i $(i = 1, \ldots, n)$ változó szerint és az m-változós $f(u_1, \ldots, u_m)$ külső függvény differenciálható az*

$$U_0 = (u_1(P_0), \ldots, u_m(P_0))$$

pontban, akkor az $f \circ (u_1, \ldots, u_m)$ összetett függvény is parciálisan differenciálható a P_0 pontban az x_i változó szerint, és

$$f'_{x_i}(P_0) = \sum_{j=1}^{m} f'_{u_j}(U_0) u'_{j_{x_i}}(P_0).$$

0.3 Az iránymenti differenciálhányados

A kétváltozós, illetve a háromváltozós valós függvények parciális differenciálhányadosai a függvényeknek a koordinátatengelyek irányában történő változását jellemzik. Ebben a fejezetben olyan fogalmat definiálunk, melynek segítségével ezen függvényeknek más irányban történő változását is jellemezhetjük.

Definíció 0.3.1 *Legyen $\underline{e}$ az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ vektortér valamely egységvektora. Az n-változós valós f függvény $P_0 \in D_f$ pontbeli, $\underline{e}$ iránymenti differenciálhányadosán az*

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = \lim_{P \to P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\underline{e}\overrightarrow{P_0P}}$$

határértéket értjük, miközben P úgy tart P_0-hoz, hogy a $\overrightarrow{P_0P}$ vektor az $\underline{e}$ vektorral egyező állású.

Tétel 0.3.2 *Ha az n-változós valós f függvény differenciálható egy $P_0 \in D_f$ pontban, akkor ebben a pontban bármely $\underline{e}$ egységvektor szerinti iránymenti differenciálhányadosa létezik, és*

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = \underline{e}\ \underline{grad} f(P_0).$$

Megjegyzés 0.3.3 Az előző tétel alapján egy n-változós $f(x_1, \ldots, x_n)$ függvénynek az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisához tartozó $\underline{e}_i$ egységvektora szerinti iránymenti differenciálhányadosára

$$\underline{e}_i\ \underline{grad} f(P_0) = f'_{x_i}(P_0)$$

adódik, azaz a P_0 pontbeli, $\underline{e}_i$ szerinti iránymenti differenciálhányados megegyezik a P_0 pontbeli, x_i változó szerinti parciális differenciálhányadossal.

Megjegyzés 0.3.4 Legfeljebb háromváltozós f függvény esetén az $\underline{e}$ és $\underline{grad} f(P_0)$ vektorok skaláris szorzata kifejezhető az általuk bezárt α szög segítségével, így

$$f'_{\underline{e}}(P_0) = |\underline{e}||\underline{grad} f(P_0)| \cos\alpha = |\underline{grad} f(P_0)| \cos\alpha.$$

Ez utóbbi szorzat akkor maximális értékű, ha $\cos\alpha$ maximális, vagyis ha $\alpha = 0$. Eszerint, a P_0 pontbeli iránymenti differenciálhányadosok közül az a maximális, amelyik a P_0 pontbeli gradiens irányához tartozik.