TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK III.

Ha $A = (a_1, \dots, a_n)$ és $B = (b_1, \dots, b_n)$ az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges pontjai, akkor az (A, B) pontpárt összekötő szakaszon az

$$\Theta = ((a_1 + \theta(b_1 - a_1), \dots, a_n + \theta(b_n - a_n)), \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

pontok összességét értjük. Ennek a szakasznak az A-tól és B-től különböző pontjait a szakasz belső pontjainak nevezzük. Tehát a fenti (A, B) pontpár által meghatározott szakasz belső pontjai mindazon

$$\Theta = (a_1 + \theta(b_1 - a_1), \dots, a_n + \theta(b_n - a_n))$$

pontok, amelyeknél θ a $(0, 1)$ nyílt intervallumban helyezkedik el.

Legyen f olyan n-változós valós függvény, melynek összes $(r+1)$-edrendű parciális deriváltja folytonos a

$$P_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$$

pont valamely E teljes környezetében. Legyen

$$P = (x_{10} + h_1, \dots x_{n0} + h_n) \in E$$

tetszőleges (de rögzített) pont. Az f függvénynek a P_0P szakasz tetszőleges

$$T = (x_{10} + th_1, \dots, x_{n0} + th_n)$$

pontjában felvett értéke

$$f(T) = f(x_{10} + th_1, \dots, x_{n0} + th_n),$$

amely csak a $[0,1]$ intervallumbeli t változó függvénye. Jelöljük ezt a függvényt $F(t)$-vel. A többváltozós összetett függvények parciális deriváltjaira vonatkozó tétel szerint, az $F(t)$ függvényre a $[0,1]$ intervallumon alkalmazhatjuk a Taylor formulát, amely szerint van a $(0,1)$ intervallumnak olyan θ pontja, amelyre

$$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(r)}(0)}{r!} + \frac{F^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} \tag{1}$$

teljesül.

0.1 A Lagrange-féle középértéktétel

Az egyváltozós valós függvényekre vonatkozó Lagrange-féle középértéktétel szerint, ha egy egyváltozós valós f függvény differenciálható egy x_0 pont valamely teljes környezetében (és ekkor folytonos is ebben a teljes környezetben), akkor ennek a teljes környezetnek tetszőleges x_0+h pontjában felvett függvényértékre

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h)$$

teljesül, ahol θ a $(0,1)$ nyílt intervallum alkalmasan választott pontja.

A következőkben ennek az eredménynek a többváltozós valós függvényekre vonatkozó általánosításával foglalkozunk.

A fenti (1) formulának $r = 0$ esetre vonatkozó alakja:

$$F(1) = F(0) + F'(\theta). \tag{2}$$

Az összetett függvények parciális deriválására vonatkozó láncszabály szerint

$$F'(\theta) = h_1 f'_{x_1}(\theta) + \cdots + h_n f'_{x_n}(\theta) = \overrightarrow{P_0P}\,\underline{grad} f(\Theta),$$

ahol

$$\Theta = (x_{10} + \theta h_1, \ldots, x_{n0} + \theta h_n).$$

Így a fenti (2) formula a következő alakban írható:

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\,\underline{grad} f(\Theta),$$

amelyben Θ a P_0P szakasznak egy belső pontja.

Ezzel lényegében bizonyítottuk a következő tételt, amelyre az n-változós valós függvények Lagrange-féle középértéktétele néven fogunk hivatkozni.

Tétel 0.1.1 *Ha az n-változós valós f függvény elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak a P_0 pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely P pontban felvett f szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(P) = f(P_0) + \overrightarrow{P_0P}\,\underline{grad} f(\Theta),$$

ahol Θ a P_0P szakasz alkalmasan választott belső pontja.

A Lagrange-féle középértéktételnek a kétváltozós valós függvényekre vonatkozó alakja a következőképpen is megfogalmazható.

Tétel 0.1.2 *Ha a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény elsőrendű parciális deriváltjai folytonosak az (x_0, y_0) pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely $(x_0 + h, y_0 + k)$ pontban felvett f-szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),$$

ahol θ a $(0, 1)$ intervallum alkalmasan választott pontja.

A (1) formulának $r = 1$ esetre és kétváltozós f függvényre való alkalmazásával a következő eredmény adódik.

Tétel 0.1.3 *Ha a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény másodrendű parciális deriváltjai folytonosak az (x_0, y_0) pont valamely teljes környezetében, akkor az ehhez a teljes környezethez tartozó bármely $(x_0 + h, y_0 + k)$ pontban felvett f-szerinti függvényérték kifejezhető a következőképpen:*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}(h^2 f''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+k^2 f''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)),$$

ahol θ a $(0, 1)$ intervallum alkalmasan választott pontja.

0.2 A teljes differenciál

Definíció 0.2.1 *Legyen $A = (a_1, \ldots, a_n)$ az n-változós $f(x_1, \ldots, x_n)$ valós függvény értelmezési tartományának olyan pontja, ahol f összes elsőrendű parciális differenciálhányadosa létezik. Az f függvény A pontbeli teljes differenciálján azt a $df(A)$ módon jelölt n-változós valós függvényt értjük, amely tetszőleges $(h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ elem n-eshez a*

$$\sum_{i=1}^{n} h_i f'_{x_i}(A)$$

értéket rendeli. A $df(A)$ teljes differenciálnak a $(h_1, \ldots, h_n)$ elem n-eshez rendelt értékét

$$df(A; h_1, \ldots, h_n)$$

módon is jelöljük, azaz

$$df(A; h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i f'_{x_i}(A) = \underline{h}\underline{grad} f(P_0),$$

ahol $\underline{h}([h_1, \ldots, h_n]$

Ha a (1) formulát $r = 1$ esetre alkalmazzuk egy kétváltozós valós $f(x, y)$ függvényre, akkor a $P_0 = (x_0, y_0)$ pont valamely E teljes környezetében lévő tetszőleges $P = (x, y)$ pontra

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0)+(x-x_0)f'_x(x_0,y_0)+(y-y_0)f'_y(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)+df(P_0;(x-x_0),(y-y_0)).$$

Jelölje z a képletben szereplő $f(x_0, y_0) + df(P_0; (x - x_0), (y - y_0))$ függvényt, azaz legyen

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0).$$

Átrendezés után

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

adódik, amely az

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

ponton átmenő,

$$\underline{n} = [f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1]$$

normálvektorú sík egyenlete. Az f függvénynek a

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0)$$

függvénnyel való közelítése tehát lineáris közelítés. Az előzőek alapján a $df(P_0; (x-x_0), (y-y_0))$ teljes differenciál grafikonja olyan sík, amely párhuzamos a fenti síkkal (a z függvény grafikonjával) és átmegy az $(x_0, y_0, 0)$ ponton.

Tétel 0.2.2 *Ha a n-változós valós f függvény teljes differenciálja valamely összefüggő nyílt D halmazon azonosan nulla, akkor az f függvény konstans a D halmazon.*

0.3 Szélsőértékek

Definíció 0.3.1 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvénynek valamely $P_0 \in D_f$ pontban szigorú értelemben vett lokális minimuma [illetve, lokális maximuma] van, ha megadható P_0-nak olyan E környezete, hogy minden $P \in E \cap D_f$ pontban $f(P) > f(P_0)$ [illetve, $f(P) < f(P_0)$] teljesül.*

Definíció 0.3.2 *Akkor mondjuk, hogy egy n-változós valós f függvénynek valamely $P_0 \in D_f$ pontban szélsőértéke van, ha f-nek a P_0-ban szigorú értelemben vett lokális minimuma vagy szigorú értelemben vett lokális maximuma van.*

Tétel 0.3.3 *Ha egy n-változós valós f függvénynek valamely P_0 pntban szélsőértéke van, akkor a P_0-ban létező minden parciális differenciálhányadosa zérus.*

Tétel 0.3.4 *Legyen f olyan kétváltozós valós függvény, melynek másodrendű parciális deriváltjai folytonosan a P_0 pont valamely teljes környezetében, továbbá*

$$f'_x(P_0) = f'_y(P_0) = 0.$$

Ha

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0,$$

akkor az f függvénynek szélsőértéke van a P_0 pontban. Ez a szélsőérték szigorú

- *minimum, ha $f''_{xx}(P_0)$ pozitív,*
- *maximum, ha $f''_{xx}(P_0)$ negatív,*

vagy, ami ezzel ekvivalens,

- *minimum, ha $f''_{yy}(P_0)$ pozitív,*
- *maximum, ha $f''_{yy}(P_0)$ negatív,*

Ha

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix} < 0,$$

akkor az f függvénynek nincs szélsőértéke a P_0 pontban.

Megjegyzés 0.3.5 Ha az előző tételben szereplő

$$\mathbb{D}et_f(P_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}$$

determináns értéke nulla, akkor egyéb vizsgálatra van szükség ahhoz, hogy eldönthessük, van-e az f függvénynek szélsőértéke, vagy nincs.

Példa 0.3.6 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x, y) = xe^{x+y}$$

függvénynek!

Megoldás. Az f függvény mindkét változója szerinti elsőrendű parciális deriváltja minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ helyen létezik:

$$f'_x(x,y)=(1+x)e^{x+y},\quad f'_y(x,y)=xe^{x+y}.$$

Szélsőérték így csak olyan (x,y) pontokban létezik, melyekre teljesül az

$$(1+x)e^{x+y}=0,$$

$$xe^{x+y}=0$$

egyenletrendszer. Az első egyenlet

$$e^{x+y}+xe^{x+y}=0$$

alakban is írható. Mivel a bal oldal második tagja (a második egyenlet miatt) 0-val egyenlő, így

$$e^{x+y}=0,$$

ami ellentmondás. Így az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ezért az f függvénynek nincs szélsőértéke.

Példa 0.3.7 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x,y)=1+x+4y-3x^3-3y^3$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás. Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y)=1-9x^2,$$

$$f'_y(x,y)=4-9y^2.$$

Ezek minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x,y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az

$$1-9x^2=0,$$

$$4-9y^2=0$$

egyenletrendszernek. Ennek négy megoldása van:

$$x_1=\frac{1}{3}\ y_1=\frac{2}{3};\quad x_2=\frac{1}{3},\ y_2=-\frac{2}{3};$$

$$x_3 = -\frac{1}{3},\ y_3 = \frac{2}{3}; \quad x_4 = -\frac{1}{3},\ y_4 = -\frac{2}{3}.$$

Így az f függvénynek a következő pontokban lehet szélsőértéke:

$$P_1\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ P_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right),\ P_3\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right),\ P_4\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Mivel

$$f''_{xx}(x, y) = -18x,\ f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 0,\ f''_{yy}(x, y) = -18y,$$

ezért

$$\mathbb{D}et_f(x, y) = 324xy.$$

Ennek alapján $\mathbb{D}et_f(x, y)$ akkor és csak akkor pozitív, ha x és y azonos előjelű. Ebből következően, a $P1$ és P_4 pontokban az f függvénynek van szélsőértéke, a P_2 és P_3 pontokban viszont nincs. Mivel

$$f''_{xx}(P_1) < 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(P_4) > 0,$$

ezért a P_1 pontban szigorú maximuma, a P_4 pontban pedig szigorú minimuma van az f függvénynek.

Példa 0.3.8 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x, y) = x^4 + x^2y^2 + y^4$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás: Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x, y) = 4x^3 + 2xy^2, \quad f'_y(x, y) = 2x^2y + 4y^3.$$

Ezek minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x, y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az

$$4x^3 + 2xy^2 = 0,$$

$$2x^2y + 4y^3 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(0, 0)$. Így a vizsgált függvénynek csak a $(0, 0)$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel

$$f''_{xx} = 12x^2 + 2y^2,\ f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y) = 4xy,\ f''_{yy}(x, y) = 2x^2 + 12y^2,$$

ezért
$$\mathbb{D}et_f(0,0) = 0.$$
Ebből a számításból tehát nem derül ki, van-e szélsőértéke az f függvénynek. Mivel $f(0,0) = 0$ és minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ helyen
$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq 0,$$
ezért az f függvénynek szigorú értelemben vett minimuma van a $(0,0)$ pontban.

Példa 0.3.9 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az
$$f(x,y) = x^3 + y^3$$
függvénynek, és ha igen, milyenek!
Megoldás. Az f függvény elsőrendű parciális deriváltjai:
$$f'_x(x,y) = 3x^2, \quad f'_y(x,y) = 3y^2.$$
Ezek minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban léteznek. Szélsőérték tehát csak olyan (x,y) pontokban lehet, amelynek koordinátái eleget tesznek az
$$3x^2 = 0,$$
$$3y^2 = 0$$
egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(0,0)$, Így a vizsgált függvénynek csak a $(0,0)$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel
$$f''_{xx} = 6x,\ f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y) = 0,\ f''_{yy}(x,y) = 6y,$$
ezért
$$\mathbb{D}et_f(x,y) = 36xy.$$
Így
$$\mathbb{D}et_f(0,0) = 0.$$
Ugyanúgy, mint az előző példában, az itteni számításokból sem derül ki, vane szélsőértéke az f függvénynek. Más úton viszont könnyen belátható, hogy nincs. Az világos, hogy
$$f(0,0) = 0.$$

Viszont tetszőleges pozitív h esetén

$$f(h,0) > 0 \quad \text{és} \quad f(-h,0) < 0.$$

Az f függvény tehát a $(0,0)$ pont tetszőleges kis környezetében felvesz poziotív és negatív értékeket is. Így f-nek nincs szélsőértéke a $(0,0)$ pontban (és ezért nincs szélsőértéke $\mathbb{R}^2$ egyetlen pontjában sem sem).

Tétel 0.3.10 *Legyen $f(x_1,\ldots,x_n)$ olyan n-változós valós függvény, melynek másodrendű parciális deriváltjai folytonosan a P_0 pont valamely teljes környezetében, továbbá*

$$f'_{x_1}(P_0) = \cdots = f'_{x_n}(P_0) = 0.$$

Ha az n-elemű

$$f''_{x_1x_1}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & f''_{x_1x_2}(P_0) \\ f''_{x_2x_1}(P_0) & f''_{x_2x_2}(P_0) \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} f''_{x_1x_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_1x_n}(P_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1}(P_0) & \ldots & f''_{x_nx_n}(P_0) \end{vmatrix}$$

sorozat minden eleme pozitív, akkor az f függvénynek szigorú minimuma van az P_0 pontban; ha pedig ez a sorozat váltakozó előjelű, mégpedig úgy, hogy $f''_{x_1x_1}(P_0) < 0$, akkor az f függvénynek szigorú maximuma van a P_0 pontban.

Példa 0.3.11 Állapítsuk meg, hogy van-e szélsőértéke az

$$f(x,y) = 1 + x + y + z - 2x^2 - 4y^2 - 6z^2$$

függvénynek, és ha igen, milyenek!

Megoldás. Az f fügvvény elsőrendű parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y,z) = -2x+1, \quad f'y(x,y,z) = -8y+1, \quad f'_z(x,y,z) = -12z+1.$$

Ezek minden $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ pontban léteznek. Szélsőérték így csak olyan (x,y,z) pontokban lehet, amelyek koordinátái eleget tesznek az

$$-2x+1 = 0,$$

$$-8y+1 = 0,$$

$$-12z + 1 = 0$$

egyenletrendszernek. Ennek az egyenletrendszernek egyenlet megoldása van: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$. Így a vizsgált függvénynek csak a $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12})$ pontban lehet szélsőértéke. Mivel

$$f''_{xx}(x,y,z) = -2,\ f''_{yy}(x,y,z) = -8,\ f''_{zz}(x,y,z) = -12,$$

a másodrendű veges parciális deriváltak mindegyike pedig azonosan nulla, ezért az

$$f''_{xx}(P_0), \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} f''_{xx}(P_0) & f''_{xy}(P_0) & f''_{xz}(P_0) \\ f''_{yx}(P_0) & f''_{yy}(P_0) & f''_{yz}(P_0) \\ f''_{zx}(P_0) & f''_{zy}(P_0) & f''_{zz}(P_0) \end{vmatrix}$$

sorozat

$$-2, 16, -192.$$

Így a vizsgált f függvénynek a P_0 pontban szigorú értelemben vett maximuma van.

0.4 Feltételes szélsőérték-számítás

Kétváltozós valós $f(x,y)$ függvények szélsőértékhelyeinek meghatározására nem alkalmazhatjuk az előzőekben megismert módszereket például olyan esetekben, amikor a függvény értelmezési tartománya olyan halmaz, amelyet az xy-síkon egy görbe vagy annak egy része ábrázol. Legyen például $f(x,y)$ az a kétváltozós valós függvény, melynek értelmezési tartománya az xy-sík

$$u(x,y) = x + 2y - 2 = 0$$

egyenletű egyenesén levő pontok halmaza, és ennek az egyenesnek tetszőleges (x,y) pontjához az

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2$$

értéket rendeli. Állapítsuk meg, hogy hol és milyen szélsőértékei vannak ennek a függvénynek!

Tétel 0.4.1 *Ha az $u(x,y) = 0$ egyenletű halmazon értelmezett kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény az (x_0,y_0) pontban mindkét változója szerint parciálisan* *differenciálható, és ott f-nek szélsőértéke van, akkor megadható olyan λ_0 valós szám, hogy a*

$$h(x, y, \lambda) = f(x, y) = \lambda u(x, y)$$

képlettel definiált háromváltozós valós h függvény mindegyik elsőrendű parciális deriváltja létezik és zérus értékű az (x_0, y_0, λ_0) pontban

A példánkhoz tartozó h függvény a következő alakú:

$$h(x, y, \lambda) = x^2 + 4y^2 + \lambda(x + 2y - 2).$$

Az egyes változók szerinti elsőrendű parciális deriváltak:

$$h'_x(x, y, \lambda) = 2x + \lambda,\ h'_y(x, y, \lambda) = 8y + 2\lambda,\ h'_\lambda(x, y, \lambda) = x + 2y - 2.$$

Ezek mindegyike akkor és csak akkor egyenlő nullával, ha

$$x = 1,\ y = \frac{1}{2},\ \lambda = -2.$$

A vizsgált f függvénynek tehát csak az $(1, \frac{1}{2})$ pontban lehet szélsőértéke. Az $f(x, y)$ függvénynek akkor és csak akkor van szélsőértéke az $(1, \frac{1}{2})$ pontban, ha az egyváltozós

$$f(y) = f(x, y)|_{x=2-2y} = 8y^2 - 8y + 4$$

függvénynek szélsőértéke van az $\frac{1}{2}$ pontban. Egyszerű számítással adódik, hogy az $f(y)$ függvénynek szigorú minimum van az $\frac{1}{2}$ helyen. Így az $f(x, y)$ függvénynek szigorú minimuma van az $(1, \frac{1}{2})$ pontban.