TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK IV.

Definíció 0.0.1 *Egy d távolságfüggvénnyel ellátott M metrikus tér egy V halmazát (például egy sík vagy a tér egy V halmazát) korlátosnak nevezzük, ha megadható olyan M-beli P_0 pont és megadható egy olyan δ pozitív valós szám, hogy a V minden P pontja esetén $d(P, P_0) \leq \delta$ teljesül. Egy korlátos halmaz átmérőjén a halmaz pontpárjaihoz tartozó távolságok halmazának legkisebb felső korlátját (szuprémumát) értjük.*

Definíció 0.0.2 *Egy síkbeli halmazt mérhetőnek nevezünk, ha van területe. Egy térbeli halmazt mérhetőnek nevezünk, ha van térfogata. Egy síkbeli, illetve térbeli V halmaz területét, illetve térfogatát ΔV-vel fogjuk jelölni.*

Definíció 0.0.3 *Egy síkbeli (vagy térbeli) halmazt tartománynak nevezünk, ha korlátos és mérhető.*

0.1. A kettős és a hármas integrál fogalma

Legyen V egy síkbeli vagy térbeli tartomány. A V tartomány egy beosztásán V olyan $V_1, \ldots, V_n$ résztartományainak összességét értjük, melyek páronként közös belső pont nélküliek, és uniójuk egyenlő V-vel.

Definíció 0.1.1 *Legyen V egy síkbeli vagy térbeli tartomány és $V_1, \ldots, V_n$ a V egy beosztása. Akkor mondjuk, hogy ez a beosztás δ finomságú (δ egy pozitív valós szám), ha a V_i résztartományok mindegyikének átmérője legfeljebb δ.*

Definíció 0.1.2 *Egy V tartomány valamely beosztáshoz tartozó finomságok legnagyobb alsó korlátját (infimumát) a beosztáshoz tartozó legkisebb finomságnak nevezzük (ez megegyezik a beosztást alkotó résztartományok közül a legkisebb átmérőjű résztartomány átmérőjével).*

Definíció 0.1.3 *Egy V tartomány beosztásainak egy sorozatát minden határon túl finomodónak nevezzük, ha a sorozatot alkotó beosztásokhoz tartozó legkisebb finomságok sorozata nullához konvergál.*

Definíció 0.1.4 *Legyen $V_1, \ldots, V_n$ egy síkbeli vagy térbeli V tartomány egy beosztása. Egy olyan $P_1, \ldots, P_n$ sorozatot, melyre $P_i \in V_i$ teljesül ($i = 1, \ldots, n$), a szóban forgó beosztás egy reprezentánsrendszerének nevezzük.*

Definíció 0.1.5 *Legyen a kétváltozós (illetve háromváltozós) valós f függvény korlátos az értelmezési tartományának valamely V résztartományán. Az f függvényhez, a V tartomány egy $V_1, \ldots, V_n$ beosztásához és ezen beosztás egy $P_1, \ldots, P_n$ reprezentásnsrendszeréhez tartozó integrálközelítő összegen az*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$$

összeget értjük.

Megjegyzés 0.1.6 *Kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény esetén, a V tartomány egy $V_1, \ldots, V_n$ beosztásához és ezen beosztás egy $P_1, \ldots, P_n$ reprezentásnsrendszeréhez tartozó $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$ integrálközelítő összeg i-dik tagjának abszolút értéke, azaz $|f(P_i)|\Delta V_i$ megegyezik annak a hengerszerű térbeli alakzatnak a térfogatával, melynek alapja a térbeli derékszögű koordinátarendszer xy-síkjában lévő V_i*

tartomány, magassága pedig $|f(P_i)|$. *Így nemnegatív értékű kétváltozós valós* f *függvény esetén a*

$$\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i$$

összeg közelítőleg egyenlő az f *függvény grafikonja (amely egy felület) alatti és az* xy*-síkbeli* V *tartomány feletti térrész térfogatával.*

Definíció 0.1.7 *A sikbeli (vagy térbeli)* V *tartományon értelmezett, korlátos kétváltozós (vagy háromváltozós) valós* f *függvényről akkor mondjuk, hogy integrálható* V *felett, ha az* f *függvényhez és a* V *tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozata konvergens, a beosztások és a renrezentánsrendszerek választásától függetlenül.*

Tétel 0.1.8 *Ha az* f *függvény integrálható egy* V *tartományon, akkor az* f *függvényhez és a* V *tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozata közös határértékhez konvergál.*

Definíció 0.1.9 *Egy* V *tartományon integrálható* f *függvény esetén az* f *függvényhez és a* V *tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek sorozatainak közös határértékét az* f *függvény* V *tartományon vett integráljának (kétváltozós* f *függvény esetén kettős integráljának, háromváltozós* f *függvény esetén hármas integráljának) nevezzük és*

$$\int_V f dV$$

módon jelöljük.

Megjegyzés 0.1.10 *A kettős integrál további jelölései:*

$$\int\int_V f dV, \int\int_V f(x,y)\ dxdy.$$

A hármas integrál további jelölései:

$$\int\int\int_V f dV, \int\int\int_V f(x,y,z)\, dxdydz.$$

0.2. A kettős és a hármas integrál tulajdonságai

Tétel 0.2.1 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor tetszőleges c valós szám esetén a cf függvény is integrálható V-n, és*

$$\int_V cf dV = c\int_V f dV.$$

Tétel 0.2.2 *Ha az f és g függvények integrálhatóak a V tartományon, akkor $f+g$ összegfüggvényük is integrálható V-n, és*

$$\int_V (f+g) dV = \int_V f dV + \int_V g dV.$$

Tétel 0.2.3 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor f integrálható V minden résztartományán.*

Tétel 0.2.4 *Ha az f függvény integrálható a V tartományon, V_1 és V_2 pedig a V-nek két közös belső pont nélküli résztartománya, akkor*

$$\int_{V_1} f dV_1 + \int_{V_2} f dV_2 = \int_{V_1\cup V_2} f d(V_1\cup V_2).$$

Tétel 0.2.5 *(Az integrál korlátjairól szóló tétel) Ha a V tartományon integrálható f függvénynek m egy alsó, M egy felső korlátja, akkor*

$$m\Delta V \le \int_V f dV \le M\Delta V.$$

Bizonyítás. Az f függvényhez, a V tartomány tetszőleges $V_1, \ldots, V_n$ beosztásához és ezen beosztás tetszőleges $P_1, \ldots, P_n$ reprezentánsrendszeréhez tartozó I_n integrálközelítő összegre

$$m\Delta V = m\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i = \sum_{n=1}^{n} m\Delta V_i \leq \sum_{n=1}^{n} f(P_i)\Delta V_i = I_n$$

és

$$I_n \leq \sum_{n=1}^{n} M\Delta V_i = M\sum_{n=1}^{n}\Delta V_i = M\Delta V$$

teljesül. Így

$$m\Delta V \leq I_n \leq M\Delta V.$$

Ebből már következik, hogy ha az f függvény integrálható a V tartományon, akkor az f függvényhez és a V tartomány bármely minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó integrálközelítő összegek I_n sorozatának határértékére, azaz az $\int_V f dV$ integrálra teljesül a tétel állítása, azaz

$$m\Delta V \leq \int_V f dV \leq M\Delta V.$$

Tétel 0.2.6 *Ha az f függvény folytonos a zárt V tartományon, akkor f integrálható is V-n.*

Tétel 0.2.7 *(Az integrál-középértéktétel) Ha az f függvény folytonos a zárt V tartományon, akkor van V-nek olyan P_0 pontja, amelyre*

$$\int_V f dV = f(P_0)\Delta V$$

teljesül.