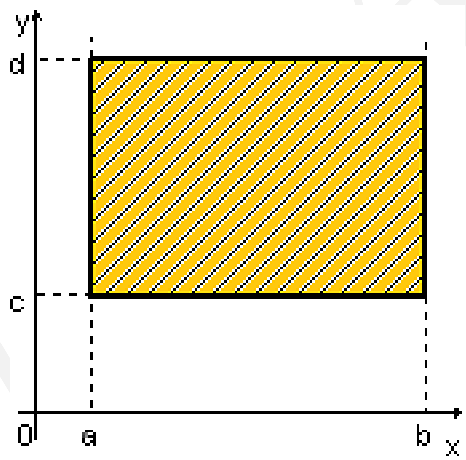
TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK V.

0.1. A kettős integrál kiszámítása

0.1.1. Kettős integrál téglalap alakú zárt tartományon



1. ábra. V: zárt téglalap

Tétel 0.1.1 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény folytonos az 1. ábra szerinti $V = \{(x,y)|a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ zárt téglalapon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\ dx \right) dy.$$

Megjegyzés 0.1.2 Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény felírható az $[a,b]$ intervallumon folytonos $h(x)$ és a $[c,d]$ intervallumon folytonos $g(y)$ függvények szorzataként, akkor az 1. ábra szerinti téglalap alakú V tartományon vett kettős integráljára

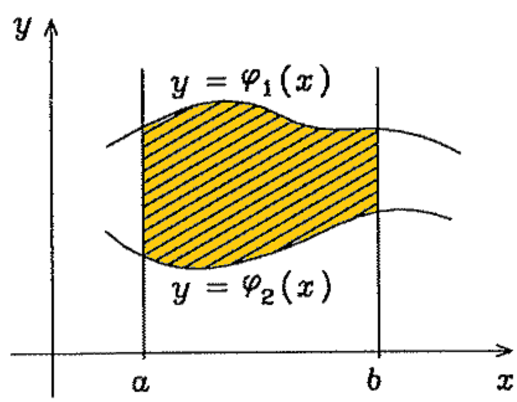
$$\int_V f dV = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)dy\right)$$

érvényes.

0.1.2. Kettős integrál x-re nézve normál tartományon

Definíció 0.1.3 *Az xy-sík egy V tartományát x-re nézve normál tartománynak nevezzük (lásd az 2. ábrát), ha az x-tengelyre eső vetülete egy $[a,b]$ zárt intervallum, továbbá megadhatók az $[a,b]$ intervallumon folytonos $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ függvények úgy, hogy minden $[a,b]$-beli x-re $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ teljesül és*

$$V = \{(x,y) | a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

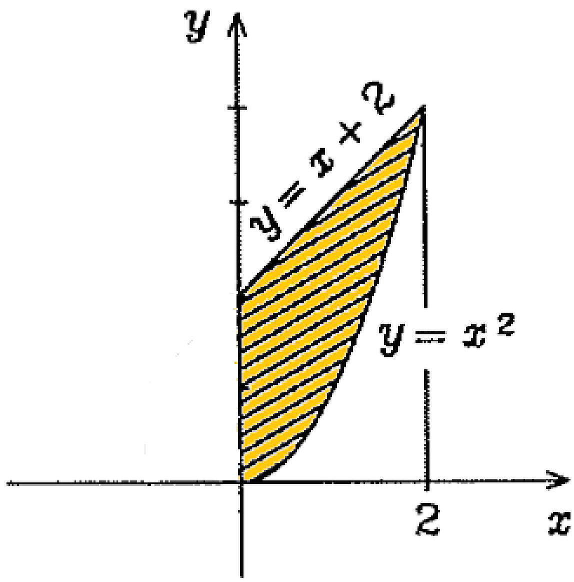


2. ábra. V: x-re nézve normál tartomány

Tétel 0.1.4 *Ha a kétváltozós valós $f(x, y)$ függvény folytonos az 2. ábra szerinti, x-ra nézve normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Példa 0.1.5 Számítsuk ki az $f(x, y) = x + y$ függvény (kettős) integrálját a 3. ábra szerinti V tartományon!



3. ábra.

Megoldás. A tartomány x-re nézve normál tartomány ($a = 0$, $b = 2$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x + 2$). Így az előző tétel alapján:

$$\int_V f dV = \int_0^2 \int_{x^2}^{x+2} (x + y) dy dx = \int_0^2 \left(\left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x+2} \right) dx =$$

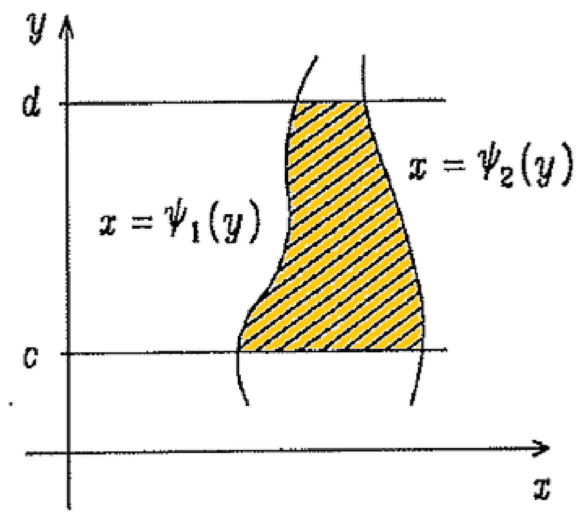
$$= \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 \right) dx =$$

$$\left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{88}{10}.$$

0.1.3. Kettős integrál y-ra nézve normál tartományon

Definíció 0.1.6 *Az xy-sík egy V tartományát y-ra nézve normál tartománynak nevezzük (lásd a 4. ábrát), ha az y-tengelyre eső vetülete egy $[c,d]$ zárt intervallum, továbbá megadhatók a $[c,d]$ intervallumon folytonos $\psi_1(y)$ és $\psi_2(y)$ függvények úgy, hogy minden $[c,d]$-beli x-re $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ teljesül és*

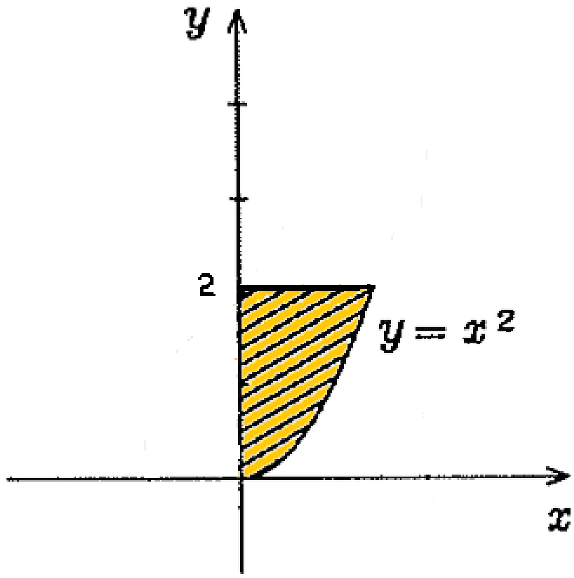
$$V = \{(x,y)|c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}.$$



4. ábra. V: y-ra nézve normál tartomány

Tétel 0.1.7 *Ha a kétváltozós valós $f(x,y)$ függvény folytonos a 4. ábra szerinti, y-re nézve normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$



5. ábra.

Példa 0.1.8 Számítsuk ki az $f(x,y) = 2x\frac{\sin \pi y}{y}$ függvény (kettős) integrálját az 5. ábra szerinti V tartományon!

Az ábra szerinti tartomány x-re nézve normál tartomány, így

$$\int_V f dV = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^{2} 2x \frac{\sin \pi y}{y} dy dx.$$

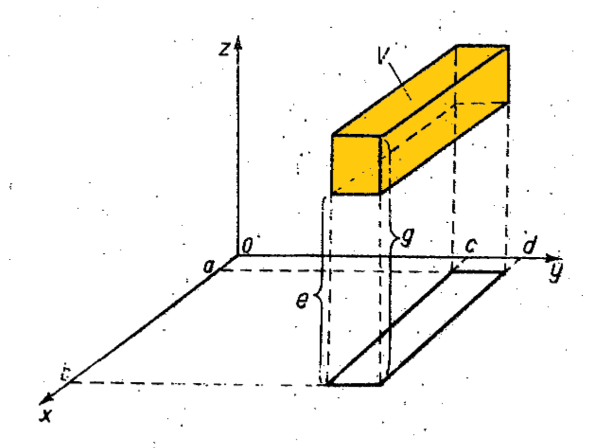
Mivel a $\frac{\sin \pi y}{y}$ függvénynek nincs elemi primitív függvénye, ezért a megoldás folytatása nehézségekbe ütközik. A V tartomány viszont y-ra nézve is normál tartomány, így az előző tétel szerint

$$\int_V f dV = \int_0^{2} \int_0^{\sqrt{y}} 2x \frac{\sin \pi y}{y} dx dy = \int_0^2 \left[x^2 \frac{\sin \pi y}{y} \right]_0^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^2 \sin \pi y \; dy = \left[\frac{-\cos \pi y}{\pi} \right]_0^2 = \frac{1}{\pi} \left(-\cos 2\pi + \cos 0 \right) = 0.$$

0.2. A hármas integrál kiszámítása

0.2.1. Hármas integrál zárt téglatesten



6. ábra. V: zárt téglatest

Tétel 0.2.1 *Ha a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvény folytonos a 6. ábra szerinti $V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq g\}$ zárt téglatesten, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y)\ dz \right)\ dy \right)\ dx.$$

Megjegyzés 0.2.2 Az előző tételben szereplő egyenlőség fennáll akkor is, ha annak jobb oldalán az x, az y és a z szerinti integrálás tetszőleges sorrendben szerepel. Például:

$$\int_V f dV = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^g f(x, y)\ dz \right)\ dx \right)\ dy =$$

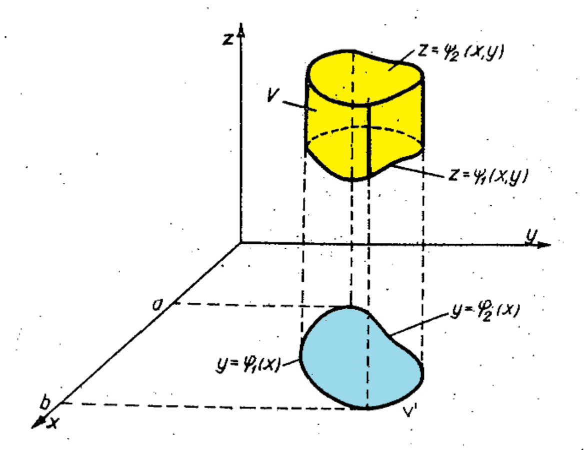
$$\int_e^g \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\ dy \right)\ dx \right)\ dz...$$

Megjegyzés 0.2.3 Ha a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvény felírható az $[a, b]$ intervallumon folytonos $r(x)$, a $[c, d]$ intervallumon folytonos $t(y)$ és az $[e, g]$ intervallumon folytonos $s(z)$ függvények szorzataként, akkor a 6. ábra szerinti V zárt téglatesten vett kettős integráljára

$$\int_V f dV = \left(\int_a^b r(x)dx\right)\left(\int_c^d t(y)dy\right)\left(\int_e^g s(z)dz\right)$$

érvényes.

0.2.2. Hármas integrál normál tartományon



7. ábra. Térbeli normál tartomány

Definíció 0.2.4 *A tér egy V tartományát normál tartománynak nevezzük, ha valamelyik koordinátasíkra eső V' merőleges vetülete abban a koordinátasíkban normál tartomány, és megadhatók olyan V'-n folytonos kétváltozós valós függvények, melyek grafikonja V'-n "alulról" és "felülről" határolja V-t.*

Ilyen esetet szemléltet a 7. ábra, ahol a térbeli V tartomány xy-sikra eső V' vetülete x-re nézve normál tartomány, és V-t alulról a $\psi_1(x, y)$, felülről a $\psi_2(x, y)$ függvények grafikonja határolja (mivel minden $(x, y) \in V'$ pontra $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$), továbbá

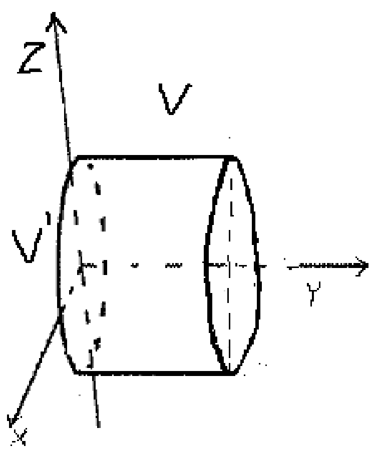
$$V = \{(x, y, z)|a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$$

Erre az esetre fogalmazunk meg egy tételt, de a többi esetben is hasonló tételek érvényesek.

Tétel 0.2.5 *Ha a háromváltozós valós $f(x,y,z)$ függvény folytonos a 7. ábra szerinti normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

Példa 0.2.6 *Számítsa ki az $f(x,y,z) = xyz$ függvény integrálját az $x^2+z^2 = 1$, az $y = 0$ és az $y = 1$ egyenletű felületek által határolt zárt V tartományon!*
Megoldás. *A V tartomány olyan zárt henger, melynek tengelye az y-tengely, alsó határoló lapja az $y = 0$ síkban (azaz az xz-síkban), felső határoló lapja az $y = 1$ egyenletű síkban levő, 1 sugarú kör (lásd a 8. ábrát).*



8. ábra.

A V tartomány normál tartomány, mert az xz-síkra eső V' merőleges vetülete egy origó középpontú kör (amely x-re és z-re nézve is normál tartomány) és V-t V' felett (azaz, az ábra szerint, balról is és jobbról is) egy-egy *síkrész határolja (ezek V' felett folytonos függvények grafikonjai). Így*

$$\int_V xyz\ dV = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left(\int_0^1 xyz\ dy\right)\ dz\right)\ dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[xz\frac{y^2}{2}\right]_0^1\ dz\right)\ dx =$$

$$\int_{-1}^{1}\left[x\frac{z^2}{4}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} 0\ dx = 0.$$