TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK VI.

Mint azt a korábbi tanulmányaikból tudják, az egyváltozós valós függvények integrálásánál sok esetben megkönnyítette a feladat megoldását a helyettesítéssel való integrálás módszerének alkalmazása. Ennek az a lényege, hogy egy I intervallumon integrálandó $f(x)$ függvény x változóját kifejezzük egy új t változó olyan J intervallumon differenciálható $x(t)$ függvényeként, amely kölcsönösen egyértelmű kapcsolatot létesít a J és az I intervallum pontjai között. Megmutatható, hogy ekkor az $f(x)$ függvény I intervallum feletti integrálja megegyezik az $f(x(t))x'(t)$ függvény J intervallum feletti integráljával. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a kettős és a hármas integrál kiszámítását is megkönnyítheti, ha az integrálandó függvény változóit új változókkal fejezzük ki. Ezt az eljárást a kettős és a hármas integrál transzformációjának nevezzük.

0.1. A kettős integrál transzformációja

Legyen $f(x, y)$ az xy-sík V tartományán integrálható kétváltozós valós függvény. Fejezzük ki az x és y változókat valamely u és v változókkal:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{1}$$

Jelölje W az uv-sík azon tartományát, amelynek az (1) transzformáció szerinti képe V, azaz

$$W = \{(u, v)|(x(u, v), y(u, v)) \in V\}.$$

Tegyük fel, hogy az (1) transzformáció olyan, hogy W különböző belső pontjaihoz V különböző pontjait rendeli. Tegyük fel azt is, hogy az $x(u, v)$ és

$y(u,v)$ függvények mindkét változó szerinti parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon. A következő tétel megmutatja, hogy a felsorolt feltételek teljesülése esetén milyen képlettel lehet kifejezni az $\int_V f(x,y)dV$ kettős integrált.

Tétel 0.1.1 *Legyen V az xy-síkbeli derékszögű koordinátarendszerben megadott tartomány, $f(x,y)$ a V-n integrálható függvény, $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ pedig a V tartomány és az (u,v) számpárok bizonyos W tartománya között olyan leképezés, amely a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli. Ha az $x = x(u,v)$ és $y = y(u,v)$ függvények parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon, akkor az f függvény V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető a következőképpen:*

$$\int\int_V f(x,y)dxdy = \int\int_W f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

A tételben szereplő

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

determinánst az $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ transzformáció Jacobi-determinánsának nevezzük.

0.1.1. Transzformálás síkbeli polárkoordináta-rendszerre

Egy S síkbeli polárkoordináta-rendszer alapeleme egy S sikbeli e félegyenes; ezt a félegyenest polártengelynek, az e félegyenes O kezdőpontját pólusnak nevezzük. Az S sík tetszőleges, de O-tól különböző P pontjának helyzetét két koordináta adja meg: az $r = \left|\overrightarrow{OP}\right|$ un pólustávolság és a $\varphi = (e, \overrightarrow{O,P})_\angle$ irányított szög.

Legyen S az xy-koodinátasík, és legyen e ebben az a félegyenes, amely az x-tengely nemnegativ fele. Ekkor tetszőleges S-beli, az xy-koordinátarendszer O origójától különböző pont (x,y) derékszögű koordinátái és (r,φ) polárkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \tag{2}$$

Mivel

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r,$$

ezért a Jacobi-determináns abszolút értéke r.

Példa 0.1.2 Számítsuk ki az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény kettős integrálját az xy-sík origó középpontú, 2 sugarú V körlapján!
Megoldás. Alkalmazzuk a síkbeli polárkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt, azaz vezessük be új változóként a sikbeli polárkoordinátákat:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Itt a V tartománynak megfelelő W tartomány az $r\varphi$-síkban lévő

$$W = \{(r,\varphi) | 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$$

téglalap alakú tartomány, a transzfrormáció Jacobi-determinánsának abszolút értéke pedig r. Így

$$\int\int_V \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int\int_W r\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}\, drd\varphi =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2\ d\varphi dr = \int_0^2 \left[r^2\varphi\right]_0^{2\pi} = \int_0^2 (2\pi r^2)dr = \left[\frac{2}{3}\pi r^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}\pi.$$

0.2. A hármas integrál transzformációja

Tétel 0.2.1 *Legyen V a térbeli xyz derékszögű koordinátarendszerben megadott tartomány, $f(x,y,z)$ a V-n integrálható függvény, $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ és $z = z(u,v,w)$ pedig a V tartomány és az (u,v,w) számhármasok bizonyos W tartománya között olyan leképezés, amely a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli. Ha az $x = x(u,v,w)$, az $y = y(u,v,w)$ és a $z = z(u,v,w)$ függvények parciális deriváltjai folytonosak a*

W tartományon, akkor az f függvény V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető a következőképpen:

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int\int\int_W f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left|\frac{\partial(x,yz)}{\partial(u,v,w)}\right|\ dudvdw,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

A tételben szereplő

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

determinánst az $x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$ transzformáció Jacobi-determinánsának nevezzük.

0.2.1. Transzformálás hengerkoordináta-rendszerre

Egy térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sikbeli (az un. alapsikbeli) polárkoordináta-rendszer (e polártengellyel és O pólussal) és az e polártengely kezdőpontján áthaladó, az S sikra merőleges olyan f számegyenes, melyen a 0-nak megfeleő pont az O pont. A tér tetszőleges, de O-tól különböző P pontjának helyzetét három koordináta adja meg: a P pontnak az f számegyenesre eső m merőleges vetülete, a P pont S sikra eső P' merőleges vetületének r és φ sikbeli polárkoordinátái (a φ polárszög megállapításánál a pozitívnak tekintett irányítás az, amely az f irányából szemben ránézve az S sikra, az óramutató járásával ellentétes).

Vegyük fel a hengerkoordináta-rendszer alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f számegyenes pedig legyen a z-tengely. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x,y,z) derékszögű koordinátái és (r,φ,m) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, z = m. \tag{3}$$

Nem részletezzük,de igen egyszerűen megmutatható, hogy ezen transzformációnak Jacobi determinánsának abszolút értéke r.

Példa 0.2.2 Számítsuk ki az $f(x,y) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény kettős integrálját azon a henger alakú V tartományon, melynek tengelye a z-tengely, alaplapja az xy-sikban, fedőlapja a $z = 1$ egyenlető sikban lévő, 2 sugarú körlap!
Megoldás. Alkalmazzuk a hengerkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt, azaz vezessük be új változóként a hengerkordinátákat:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = m$$

Itt a V tartománynak megfelelő W tartomány az $r\varphi m$-síkban lévő

$$W = \{(r,\varphi,m)|0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le m \le 1\}$$

téglatest, a transzfrormáció Jacobi-determinánsának abszolút értéke pedig r. Így

$$\int\int\int_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int\int\int_W r(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi + m^2)\,drd\varphi dm =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3 + rm^2)\,dmd\varphi dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}\left[r^3m + \frac{rm^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}(r^3 + \frac{r}{3})\,d\varphi dr = \int_0^2 2\pi(r^3 + \frac{r}{3})\,dr = \frac{5\pi}{6}.$$

0.2.2. Transzformálás térbeli polárkoordináta-rendszerre

A térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sík, abban egy O pólusú, e polártengelyű síkbeli polárkoordináta-rendszer, továbbá az S sikra merőleges, O kezdőpontú olyan f félegyenes, melynek pontjaiból az S síkbeli pozitív forgásirány az óramutató járásával ellentétesnek látszik. A tér tetszőleges, de O-tól különböző pontjának helyzetét három koordináta adja meg: az $\overrightarrow{OP}$ vektornak az f félegyenessel bezárt θ szöge, az $r = d(O,P)$ távolság és a P pont S-re eső P' merőleges vetületének φ polárszöge.

Vegyük fel a térbeli polárkoordináta-rendsze alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f félegyenes pedig legyen a z-tengely nemnegatív fele. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x, y, z) derékszögű koordinátái és (r, φ, θ) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r \cos\theta.$$

Itt nem részletezzük, de nem túl bonyolult számolással megmutatható, hogy ennek a transzformációnak a Jacobi determinánsának abszolút értéke $r^2 \sin\theta$.