TÖBBVÁLTOZÓS VALÓS FÜGGVÉNYEK VI/b

0.1. A hármas integrál transzformációja

Tétel 0.1.1 *Legyen V a térbeli xyz derékszögű koordinátarendszerben megadott tartomány, $f(x,y,z)$ a V-n integrálható függvény, $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$ és $z = z(u,v,w)$ pedig a V tartomány és az (u,v,w) számhármasok bizonyos W tartománya között olyan leképezés, amely a W különböző belső pontjaihoz a V különböző pontjait rendeli. Ha az $x = x(u,v,w)$, az $y = y(u,v,w)$ és a $z = z(u,v,w)$ függvények parciális deriváltjai folytonosak a W tartományon, akkor az f függvény V tartományon vett kettős integrálja kifejezhető a következőképpen:*

$$\int\int\int_V f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \int\int\int_W f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,yz)}{\partial(u,v,w)} \right|\ dudvdw,$$

ahol

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

A tételben szereplő

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

determinánst az $x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ transzformáció Jacobi-determinánsának nevezzük.

0.1.1. Transzformálás hengerkoordináta-rendszerre

Egy térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sikbeli (az un. alapsikbeli) polárkoordináta-rendszer (e polártengellyel és O pólussal) és az e polártengely kezdőpontján áthaladó, az S sikra merőleges olyan f számegyenes, melyen a 0-nak megfeleő pont az O pont. A tér tetszőleges, de O-tól különböző P pontjának helyzetét három koordináta adja meg: a P pontnak az f számegyenesre eső m merőleges vetülete, a P pont S sikra eső P' merőleges vetületének r és φ sikbeli polárkoordinátái (a φ polárszög megállapításánál a pozitívnak tekintett irányítás az, amely az f irányából szemben ránézve az S sikra, az óramutató járásával ellentétes).

Vegyük fel a hengerkoordináta-rendszer alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f számegyenes pedig legyen a z-tengely. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x, y, z) derékszögű koordinátái és (r, φ, m) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, z = m. \tag{1}$$

Nem részletezzük,de igen egyszerűen megmutatható, hogy ezen transzformációnak Jacobi determinánsának abszolút értéke r.

Példa 0.1.2 Számítsuk ki az $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ függvény kettős integrálját azon a henger alakú V tartományon, melynek tengelye a z-tengely, alaplapja az xy-sikban, fedőlapja a $z = 1$ egyenlető sikban lévő, 2 sugarú körlap!

Megoldás. Alkalmazzuk a hengerkoordinátákra való áttérésnek megfelelő transzformációt, azaz vezessük be új változóként a hengerkordinátákat:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = m$$

Itt a V tartománynak megfelelő W tartomány az $r\varphi m$-síkban lévő

$$W = \{(r, \varphi, m) | 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le m \le 1\}$$

téglatest, a transzfrormáció Jacobi-determinánsának abszolút értéke pedig r. Így

$$\int\int\int_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz = \int\int\int_W r(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi+m^2)\,drd\varphi dm =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3+rm^2)\;dmd\varphi dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}\left[r^3m+\frac{rm^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}(r^3+\frac{r}{3})\;d\varphi dr = \int_0^2 2\pi(r^3+\frac{r}{3})\;dr = \frac{5\pi}{6}.$$

0.1.2. Transzformálás térbeli polárkoordináta-rendszerre

A térbeli polárkoordináta-rendszer alapelemei: egy S sík, abban egy O pólusú, e polártengelyű síkbeli polárkoordináta-rendszer, továbbá az S sikra megőleges, O kezdőpontú olyan f félegyenes, melynek pontjaiból az S síkbeli pozitív forgásirány az óramutató járásával ellentétesnek látszik. A tér tetszőleges, de O-tól különböző pontjának helyzetét három koordináta adja meg: az $\overrightarrow{OP}$ vektornak az f félegyenessel bezárt θ szöge, az $r = d(O,P)$ távolság és a P pont S-re eső P' merőleges vetületének φ polárszöge.

Vegyük fel a térbeli polárkoordináta-rendsze alapelemeit egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy a hengerkoordináta-rendszer pólusa essék egybe a derékszögű koordináta-rendszer origójával, polártengelye pedig az x-tengely nemnegatív felével. Az f félegyenes pedig legyen a z-tengely nemnegatív fele. Ekkor a tér tetszőleges, az O ponttól különböző pont P pont (x,y,z) derékszögű koordinátái és (r,φ,θ) hengerkoordinátái között az alábbi összefüggés írható fel:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Itt nem részletezzük, de nem túl bonyolult számolással megmutatható, hogy ennek a transzformációnak a Jacobi determinánsának abszolút értéke $r^2\sin\theta$.