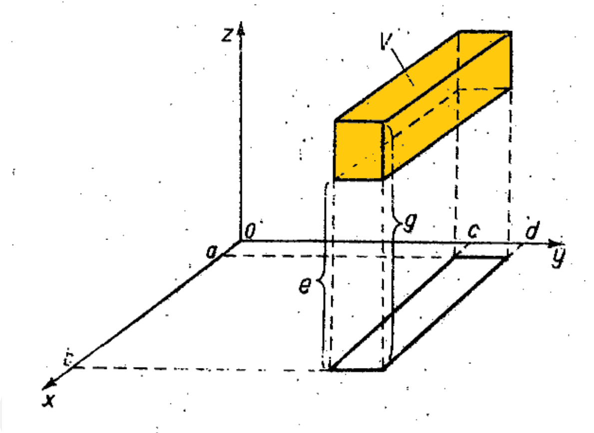
1. fejezet

A hármas integrál kiszámítása

1.0.1. Hármas integrál téglatest alakú tartományon



1.1. ábra. V: téglatest

Tétel 1.0.1 *Ha a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvény folytonos a 1.1. ábra szerinti $V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d,\ e \leq z \leq g\}$ téglatesten, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^g f(x, y)\, dz \right)\, dy \right)\, dx.$$

Megjegyzés 1.0.2 Az előző tételben szereplő egyenlőség fennáll akkor is, ha annak jobb oldalán az x, az y és a z szerinti integrálás tetszőleges sorrendben szerepel. Például:

$$\int_V f dV = \int_c^d \left(\int_a^b \left(\int_e^g f(x,y)\ dz \right)\ dx \right)\ dy =$$

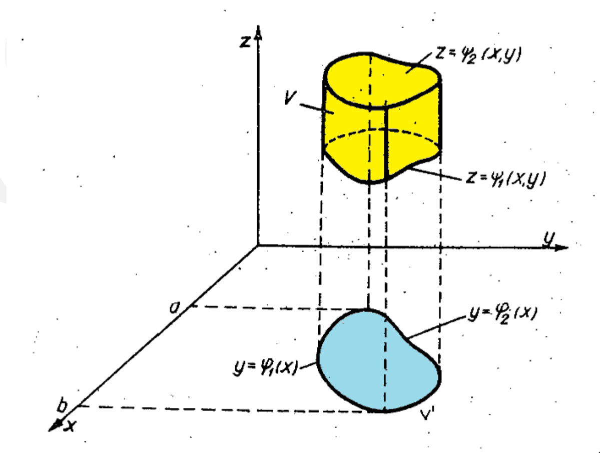
$$\int_e^g \left(\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\ dy \right)\ dx \right)\ dz...$$

Megjegyzés 1.0.3 Ha a háromváltozós valós $f(x,y,z)$ függvény felírható az $[a,b]$ intervallumon folytonos $r(x)$, a $[c,d]$ intervallumon folytonos $t(y)$ és az $[e,g]$ intervallumon folytonos $s(z)$ függvények szorzataként, akkor a 1.1. ábra szerinti V zárt téglatesten vett kettős integráljára

$$\int_V f dV = \left(\int_a^b r(x) dx \right) \left(\int_c^d t(y) dy \right) \left(\int_e^g s(z) dz \right)$$

érvényes.

1.0.2. Hármas integrál normál tartományon



1.2. ábra. Térbeli normál tartomány

Definíció 1.0.4 *A tér egy V tartományát normál tartománynak nevezzük, ha valamelyik koordinátasíkra eső V' merőleges vetülete abban a koordinátasíkban normál tartomány, és megadhatók olyan V'-n folytonos kétváltozós valós függvények, melyek grafikonja V'-n "alulról" és "felülről" határolja V-t.*

Ilyen esetet szemléltet a 1.2. ábra, ahol a térbeli V tartomány xy-sikra eső V' vetülete x-re nézve normál tartomány, és V-t alulról a $\psi_1(x, y)$, felülről a $\psi_2(x, y)$ függvények grafikonja határolja (mivel minden $(x, y) \in V'$ pontra $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$), továbbá

$$V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$$

Erre az esetre fogalmazunk meg egy tételt, de a többi esetben is hasonló tételek érvényesek.

Tétel 1.0.5 *Ha a háromváltozós valós $f(x, y, z)$ függvény folytonos a 1.2. ábra szerinti normál V tartományon, akkor f integrálható V-n, és*

$$\int_V f dV = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\ dz \right)\ dy \right) dx.$$

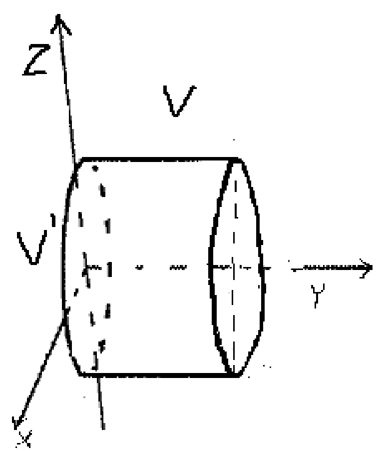
Példa 1.0.6 *Számítsa ki az $f(x, y, z) = xyz$ függvény integrálját az $x^2+z^2 = 1$, az $y = 0$ és az $y = 1$ egyenletű felületek által határolt zárt V tartományon!*
Megoldás. *A V tartomány olyan henger, melynek tengelye az y-tengely, alsó határoló lapja az $y = 0$ síkban (azaz az xz-síkban), felső határoló lapja az $y = 1$ egyenletű síkban levő, 1 sugarú kör (lásd a 1.3. ábrát).*

A V tartomány normál tartomány, mert az xz-síkra eső V' merőleges vetülete egy origó középpontú kör (amely x-re és z-re nézve is normál tartomány) és V-t V' felett (azaz, az ábra szerint, balról is és jobbról is) egy-egy síkrész határolja (ezek V' felett folytonos függvények grafikonjai). Így

$$\int_V xyz\ dV = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^1 xyz\ dy \right)\ dz \right)\ dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[xz\frac{y^2}{2} \right]_0^1\ dz \right)\ dx =$$

$$\int_{-1}^{1} \left[x\frac{z^2}{4} \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^{1} 0\ dx = 0.$$



1.3. ábra.