(1) Mutassuk meg, hogy egy vektortér vektorrendszere akkor és csak akkor bázis, ha minimális generátorrendszere a vektortérnek!

(2) Mutassuk meg, hogy egy n-dimenziós vektortérben minden független vektorrendszerben legfeljebb n vektor van.

(3) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{e}$ térbeli egységvektor esetén az a leképezés, amely minden $\underline{r}$ térbeli vektorhoz $\underline{r}$-nek az $\underline{e}$ egyenesére eső merőleges vetületét rendeli, a térbeli vektorok vektorterének önmagába való lineáris leképezése!

(4) Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in R^n$ vektorok esetén az

$$\underline{r} \mapsto \underline{a}(\underline{br})$$

módon definiált leképezés az R^n vektortérnek önmagába való lineáris leképezése!

(5) Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. Mutassuk meg, hogy V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ_1 és φ_2 lineáris leképezése esetén a

$$(\varphi_1 + \varphi_2) : \underline{r} \mapsto \varphi_1(\underline{r}) + \varphi_2(\underline{r})$$

módon definiált leképezés (azaz φ_1 és φ_2 összege) lineáris leképezése V_1-nek V_2-be!

(6) Legyenek V_1, V_2 és V_3 ugyanazon F test feletti vektorterek. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $\varphi_1 : V_1 \to V_2$ és $\varphi_2 : V_2 \to V_3$ lineáris leképezések esetén a

$$(\varphi_2\varphi_1) : \underline{r} \mapsto \varphi_2(\varphi_1(\underline{r}))$$

módon definiált leképezés (φ_2 és φ_1 szorzata) lineáris leképezése V_1-nek V_3-ba!

(7) Mutassuk meg, hogy az R^n vektortér tetszőleges W altere esetén az R^n vektortér alterét alkotja mindazon R^n-beli vektorok $W^\perp$ halmaza, amely vektorok a W altér minden vektorára megőlegesek! Mutassuk meg, hogy $W \cap W^\perp = \underline{0}$!

(8) Mutassuk meg, hogy ha $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ az R^n vektortér egy W alterének egy bázisa, akkor R^n egy vektora akkor és csak akkor van benne a $W^\perp$ altérben, ha merőleges minden egyes bázisbeli vektorra.

(9) Mutassuk meg, hogy az R^3 vektortérnek az R^2 vektortérbe való $\varphi : [x, y, z] \mapsto [x - y + z, x + 3y - 5z]$ leképezése lineáris! Adjuk meg a φ képterének és nullterének a dimenzióját!

(10) Adjuk meg az R^3 vektortér $[1, -1, 1]$ és $[1, 3, -5]$ vektoraira merőleges vektorok alterének dimenzióját!

(11) Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti négyzetes $\mathbf{A}$ mátrix esetén határozzuk meg az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix nyomát!