Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha azok végrehajthatók:

1. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$, **2.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,

3. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & 16 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & n+1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n+1 & \dots & 2n-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$,

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, **8.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,

9. $[2]\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}[2]$.

....

33. Bizonyítsuk be, hogy minden másodrendű

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mátrix kielégíti az $x^2-(a+d)x+(ad-bc)=0$ egyenletet, ami azt jelenti, hogy x helyébe az $\mathbf{A}$ mátrixot, konstans helyébe az egységmátrix konstansszorosát, 0 helyébe a zérusmátrixot helyettesítve az egyenlőség igaz lesz.

....

Mutassuk meg, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{bmatrix}, \ (n \in \mathbf{N}^+),$$

ahol F_n az n-edik Fibonacci-számot jelöli, melynek rekurzív definíciója: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, ha $n > 0$.

....

Hozzuk sorlépcsős alakra a következő mátrixokat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gauss-módszerrel oldjuk meg a következő egyenletrendszereket:

16.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 3x_5 &= 17 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 4x_5 &= 9 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 &= 15 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_4 + x_5 + x_1 &= 1 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

21.
$$\begin{aligned} 7x_1 + 14x_2 - 21x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 3 \end{aligned}$$

A definíció segítségével számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

36.* $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, **37.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Egy megfelelően választott sora vagy oszlopa szerint fejtsük ki az alábbi determinánsokat:

38. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, **39.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & -9 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

48.$^{\triangleright}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 & 10 \end{vmatrix}$, **49.**$^{\triangleright}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$,