1.

Mutassuk meg, hogy bármely polinom kifejezhető determináns alakban az alábbi módon:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

2.

Elemi mátrixnak nevezünk egy mátrixot, ha az vagy az egységmátrix, vagy egy egységmátrixból egyetlen elemi átalakítással kapható. Az alábbi mátrixok közül melyek elemiek?

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ d)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ f)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ g)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ h)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.

Mutassuk meg, hogy ha az $\mathbf{E}_n$ egységmátrixon elvégzünk egy elemi sorátalakítást, akkor olyan elemi mátrixot kapunk, amellyel balról szorozva bármely $\mathbf{A}_{n\times m}$ mátrixot, a kapott eredmény az $\mathbf{A}_{n\times m}$ mátrixból ugyanazzal az elemi sorátalakítással kapható meg. Ez azt jelenti, hogy ha egy elemi sorátalakítás az $\mathbf{E}$ egységmátrixot az $\mathbf{E}'$ mátrixba, az $\mathbf{A}$ mátrixot az $\mathbf{A}'$ mátrixba képezi, akkor $\mathbf{E}'\mathbf{A} = \mathbf{A}'$. (Hasonló eredmény igaz elemi oszlopátalakításokkal is, ha az elemi mátrixszal jobbról szorzunk.)

4.

123. Egy $\mathbf{A}$ mátrixot **ortogonálisnak** nevezünk, ha $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$, azaz ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa $+1$ vagy -1.

124. Mutassuk meg, hogy tetszőleges 1-determinánsú, 2×2-es ortogonális mátrix felírható az alábbi alakban:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

5.

Az egyenletrendszer mátrixának a rangja, vagy – ha létezik – determinánsa alapján döntsük el, hogy a következő homogén lineáris egyenletrendszereknek van-e nemtriviális megoldásuk.

36.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 5x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$$

37.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 6x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 &= 0 \\ 2x_3 - 7x_4 + 6x_5 &= 0 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6.

Állapítsuk meg, hogy az alábbi egyenletrendszereknek a valós paraméter (paraméterek) mely értékeire
  a) nincs megoldásuk,
  b) van egyetlen (egyértelmű) megoldásuk,
  c) van végtelen sok megoldásuk.

62.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + ux_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 9x_2 - 5x_3 &= v \end{aligned}$$

63.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 6 \\ -3x_1 + 5x_2 + ax_3 + bx_4 &= 2 \\ 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b - 3 \end{aligned}$$

7. Oldja meg az alábbi egyenletrendszereket a λ paraméter függvényében!

71.
$$\begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= \lambda \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= \lambda^2 \end{aligned}$$

72.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 &= 14 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 10 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

8. Adja meg az R^2, illetve az R^3 vektortér olyan ortonormált bázisait, amelyek az alábbi szimmetrikus mátrixok sajátvektoraiból állnak! Adja meg a mátrixok alakját a sajátvektoraiból álló ortonormált bázisban!

93. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$, **94.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, **95.** $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$,

96. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$, **97.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, **98.** $\begin{bmatrix} 36 & 18 & 12 \\ 18 & 9 & 6 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

9.

Bontsuk fel a következő mátrixokat egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus mátrix összegére.

99. $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}$, **100.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$,

10.

114. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg a B mátrix legkisebb pozitív sajátértékéhez tartozó egységnyi hosszúságú sajátvektorokat, és döntsük el, hogy ezek sajátvektorai-e az A-nak.

11. Állapítsuk meg az alábbi 3-dimenziós tenzorok (az R^3 vektortér lineáris transzformációi) közül melyik planáris és melyik teljes tenzor!

28. $f(x, y, z) = [x + y, y + z, z + x]$,
29. $f(x, y, z) = [x - y, 2x + z, 2y + z]$,
30. $f(x, y, z) = [x, x + y, x + y + z]$,
31. $f(x, y, z) = [x + 2y - 3z, 2x - y + z, -5y + 7z]$,
32. $f(x, y, z) = [x - 2y, -x + 2y, 2x - 4y]$,

12.

Adjuk meg az alábbi A tenzorok vektorkoordinátáit és mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, majd adjuk meg az adott $\mathbf{r}$ vektor $A\mathbf{r}$ képét:

$$A[1,0,0]=[1,0,0],\quad A[0,1,0]=[0,1,0],\quad A[0,0,1]=[0,0,1],\quad \mathbf{r}=[3,9,4].$$

13.

Adjuk meg az összes olyan T tenzor mátrixát az $[1,0]$, $[0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, amely teljesíti a megadott feltételeket:

36. $T\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$ 37. $T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}, T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix},$

14.

Az alábbi feladatokban megadjuk egy T tenzor hatását az $\mathbf{R}^{(3)}$ tér 3 vektorára. Írjuk fel T mátrixát az $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ alapvektor-rendszerre vonatkozóan, és határozzuk meg T értékkészletének dimenziószámát, vagyis azt, hogy T lineáris, planáris vagy teljes:

$$T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix},$$

15.

Írjuk fel a T tenzornak a megadott $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2\}$ illetve $\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$ vektorrendszerre vonatkozó $\mathbf{T}_\mathbf{f}$ mátrixát:

70. T a sík vektorainak az $y=x$ egyenesen való tükrözése, $\mathbf{f}_1=[1,0]$, $\mathbf{f}_2=[2,2]$,

71. $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-2y\\6x-3y\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$

72. T az x-tengelyre vonatkozó tükrözés, $\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},$

73. $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x-2y\\x+y\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$

74. $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y\\y\\y-z\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{f}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},$