SOROK

Matematika A2a

NAGY ATTILA

Egyetemi jegyzet

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Algebra és Geometria Tanszék

2025

Ez a jegyzet a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
mérnökhallgatói számára meghirdetett
Matematika A2a című tantárgy
általam tartott előadásainak
számsorokkal és függvénysorokkal kapcsolatos anyagát tartalmazza.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Definíció 0.0.1 *Tetszőleges* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *sorozatból képezett*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

formális összeget sornak (vagy végtelen sornak) nevezünk. Rövid jelölése

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *elemeket a sor tagjainak nevezzük.*

Megjegyzés 0.0.2 Nyilvánvaló, hogy egy ilyen formális összegnek csak akkor lehet tényleges értéke, ha az $[a_n; n \in N^+]$ sorozat elemei olyan halmazból valók, amelyen összeadás van értelmezve. A továbbiakban arra az esetre szoritkozunk, amikor az összeadás asszociatív is (mint például a valós vagy a komplex számok, a valós vagy a komplex függvények halmazában), azaz a sorozat elemeit tartalmazó halmaz olyan algebrai struktúra, amelyen asszociatív összeadás van értelmezve. Emlékezzünk rá, hogy az ilyen struktúrát additív félcsoportnak neveztük.

Először olyan sorokkal fogunk foglalkozni, amelyek elemei (valós vagy komplex) számok; ezeket a sorokat számsoroknak nevezzük. Ezt követően olyan sorokat vizsgálunk, amelyek elemei (valós vagy komplex) függvények; ezeket a sorokat függvénysoroknak nevezzük.

1. fejezet

Számsorok

1.1. Számsorok konvergenciája és összege

Definíció 1.1.1 *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *számsor k-dik (k=1, 2, ...) részletösszegén az*

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

összeget értjük.

Definíció 1.1.2 *Egy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

számsorról akkor mondjuk, hogy konvergens, ha k-dik részletösszegeinek

$$[s_k; k \in N^+]$$

sorozata konvergens. A k-dik részletösszegek sorozatának

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k$$

határértékét a számsor összegének nevezzük. Ha egy számsor k-dik részletösszegeinek sorozata divergens, akkor a számsort is divergensnek nevezzük. Ebben az esetben nem rendelünk összeget a számsorhoz.

Példa 1.1.3 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összeget is!

Megoldás: Mivel

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

ezért

$$s_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$s_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4},$$

$$...$$

$$s_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{k+2}.$$

Mivel

$$lim_{k\to\infty} s_k = \frac{1}{2},$$

ezért a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

számsor konvergens, összege pedig $\frac{1}{2}$.

Példa 1.1.4 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n_1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

ezért a k-dik részletösszegek sorozata

$$s_k = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Tehát

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} (1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}) = 1.$$

Ezért a vizsgált sor konvergens, melynek összege egyenlő 1-gyel.

Példa 1.1.5 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Konvergencia esetén adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel

$$ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = ln\left(\frac{n-1}{n}\frac{n+1}{n}\right) = ln\left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right) =$$

$$= ln\frac{n+1}{n} - ln\frac{n}{n-1},$$

ezért a vizsgált sor k-dik részletösszege

$$s_k = ln\frac{3}{2} - ln2 + ln\frac{4}{3} - ln\frac{3}{2} + \cdots + ln\frac{k}{k-1} - ln\frac{k-1}{k-2} + ln\frac{k+1}{k} - ln\frac{k}{k-1} =$$

$$= -ln2 + ln\frac{k+1}{k}.$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty}\left(-ln2 + ln\frac{k+1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(-ln2 + ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = -ln2,$$

ezért a vizsgált sor konvergens, és összege egyenlő $-ln2$-vel.

Példa 1.1.6 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$$

számsor konvergens-e vagy divergens! Ha konvergens, akkor adjuk meg az összegét is!

Megoldás: Mivel minden pozitív egész n esetén

$$a_n = \frac{n}{3n+1} \geq \frac{n}{3n+n} = \frac{n}{4n} = \frac{1}{4},$$

ezért

$$s_k = a_1 + a_2 + \cdots a_k \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4} = \frac{k}{4},$$

és így

$$\lim_{k\to\infty} s_k \geq \lim_{k\to\infty} \frac{k}{4} = \infty.$$

Tehát a vizsgált sor divergens.

Megjegyzés 1.1.7 Igen egyszerűen belátható, hogy egy számsor konvergenciáján nem változtat, ha a sor elejéről véges sok tagot elhagyunk, vagy ha véges sok tagot a sor elejére írunk. Vizsgáljuk egy kicsit részletesebben azt az esetet, amikor elhagyjuk az s_k részletösszegű konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor első m tagját! Jelölje S_k az így keletkezett számsor k-dik részletösszegét. Ha $A = a_1 + \cdots + a_m$, akkor

$$S_k = a_{m+1} + \cdots + a_{m+k} = s_{m+k} - A.$$

Mivel az s_{m+k} sorozat a konvergens s_m sorozat részsorozata, ezért az s_{m+k} sorozat, és így az S_k sorozat is konvergens.

Tétel 1.1.8 *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *számsor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Példa 1.1.9 *Döntsük el, hogy konvergens-e a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

számsor!
Megoldás: Mivel
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$
ezért (az előző tétel miatt) a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ számsor nem konvergens.

Tétel 1.1.10 *(Cauchy-féle konvergenciakritérium) Az*
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$
számsor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely pozitív ϵ számhoz megadható olyan n_0 valós szám, hogy ha $n > n_0$, akkor tetszőleges pozitív p egész szám esetén az
$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \epsilon$$
egyenlőtlenség teljesül.

Példa 1.1.11 *Mutassuk meg a Cauchy-féle konvergenciakritérium alkalmazásával, hogy a*
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$
sor konvergens!

Megoldás: Tetszőleges ϵ pozitív valós szám esetén legyen $n_0 = \frac{1}{\epsilon}$. Legyenek p és $n > n_0$ tetszőleges pozitív egész számok! Ekkor
$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$
és így
$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| <$$
$$< \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right| = \frac{p}{n^2+np} < \frac{p}{np} = \frac{1}{n} < \epsilon.$$
Tehát a vizsgált sor konvergens.

Megjegyzés 1.1.12 *A Cauchy-féle konvergenciakritérium szerint egy*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

számsor akkor és csak akkor divergens, ha megadható olyan pozitív ϵ szám, hogy minden n_0 valós számhoz lehet találni olyan p és $n > n_0$ pozitív valós számokat, amelyek esetén az

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \geq \epsilon$$

egyenlőtlenség teljesül.

Ha például megadható olyan n_0 valós szám, hogy tetszőleges $n \geq n_0$ pozitív egész szám esetén

$$\lim_{p\to\infty} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| \neq 0,$$

akkor a vizsgált sor divergens.

Példa 1.1.13 *Mutassuk meg a Cauchy-féle konvergenciakritérium alkalmazásával, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

un. harmonikus sor divergens!

Megoldás: Tetszőleges n pozitív egész szám esetén

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+p} \right| > \frac{p}{n+p}.$$

Mivel

$$\lim_{p\to\infty} \frac{p}{n+p} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{\frac{n}{p}+1} = 1,$$

ezért

$$\lim_{p\to\infty} |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| = \lim_{p\to\infty} \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{n+p} \right| \neq 0.$$

Így az 1.1.12 Megjegyzés miatt a vizsgált harmonikus sor divergens.

1.2. Műveletek számsorok között

Definíció 1.2.1 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsorok (ebben a sorrendben képezett) összegén a*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$$

számsort, különbségén pedig a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$$

számsort értjük.

Tétel 1.2.2 *Konvergens számsorok összege és különbsége is konvergens. Továbbá, ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor összege A, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsor összege B, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B.$$

Példa 1.2.3 *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

számsor összegét!

Megoldás: Világos, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3}$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{3}{2},$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{5^n}$ számsor összege

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{13}{6}.$$

Definíció 1.2.4 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsornak egy α számmal képezett szorzatán a $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ számsort értjük.*

Tétel 1.2.5 *Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens és összege A, akkor tetszőleges α számszorosa is konvergens, melynek összege megegyezik αA-val.*

Példa 1.2.6 *Adjuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n}$ számsor összegét!*
Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n,$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{7^n}$ számsor összege

$$5 \frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{5}{7}} = \frac{25}{2}.$$

Definíció 1.2.7 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ számsorok Cauchy-szorzatán azt a $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ számsort értjük, melynek n-dik tagja, azaz c_n, a következő szorzatösszeggel egyenlő:*

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots a_{n-1} b_2 + a_n b_1.$$

Megjegyzés 1.2.8 *Konvergens számsorok Cauchy-szorzata általában nem konvergens. Megmutatható, hogy a konvergens*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

számsor önmagával vett Cauchy szorzatában szereplő c_n *tagra*

$$c_n = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{n+1-i}}$$

teljesül. A számtani és mértani közép kapcsoltára érvényes összefüggés alapján

$$\sqrt{(i+1)(n+1-i)} \leq \frac{n+2}{2}$$

minden i*-re, ezért*

$$|c_n| \geq (n+1)\frac{2}{n+2} \geq 1$$

minden n*-re. Így a vizsgált sor önmagával képezett* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *Cauchy-szorzatában* $\lim_{n\to\infty} c_n \neq 0$*, ami miatt a* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *sor nem konvergens (az 1.1.8 Tételt szerint).*

1.3. Nemnegatív tagú sorok

Definíció 1.3.1 *Nemnegatív tagú soron olyan valós számokból álló sort értünk, melynek minden tagja nemnegatív.*

A nemnegatív tagú sorok k-dik részletösszegeinek $[s_k; k \in N^+]$ sorozata monoton növekvő. Jól ismert az a tény, hogy monoton növekvő, felülről korlátos sorozat konvergens. Az is igaz, hogy konvergens valós számsorozat (felülről) korlátos. Így igaz a következő állítás.

Tétel 1.3.2 *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* k*-dik részletösszegeinek* $[s_k; k \in N^+]$ *sorozata felülről korlátos.*

Példa 1.3.3 *Mutassuk meg, hogy az*

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

mértani sor konvergens, ha $0 \leq q < 1$*!*

Megoldás: Mint ismeretes,

$$s_k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}.$$

Ha $q = 0$, akkor minden k indexre $s_k = 1$; ebben az esetben a mértani sor konvergens.

Ha $0 < q < 1$, akkor

$$s_k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} < \frac{1}{1 - q},$$

azaz a mértani sor k-dik részletösszegeinek $[s_k; k \in N^+]$ sorozat korlátos. Így, az előző tétel szerint, a mértani sor konvergens. Ebből a képletből a mértani sor s összege is megkapható:

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Konvergenciakritériumok

Tétel 1.3.4 *(Integrálkritérium) Legyen $f(x)$ olyan egyváltozós valós függvény, amely valamely pozitív egész n_0 esetén az $[n_0, \infty)$ intervallumon monoton csökkenő és pozitív értékeket vesz fel. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ olyan számsor, amelynek tagjaira $a_n = f(n)$ teljesül. Ebben az esetben, a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$ impropius integrál konvergens.*

Példa 1.3.5 Legyen p tetszőleges (rögzített) valós szám! Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

számsor konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.
Megoldás: Alkalmazzuk az integrálkritériumot! $f(x) = \frac{1}{x^p}$ és $n_0 = 1$.

Először vizsgáljuk meg a $p = 1$ esetet!

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = lim_{b\to\infty} [lnx]_1^b = \lim_{b\to\infty} (lnb) = \infty.$$

Tehát $p = 1$ esetén a sor nem konvergens.

Vizsgáljuk most a $p \neq 1$ esetet!

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx = lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} [x^{1-p}]_1^b =$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (b^{1-p} - 1).$$

Ha $p < 1$, akkor a fenti határérték nem létezik, mert ekkor $\lim_{b\to\infty} b^{1-p} = \infty$. Ha $p > 1$, akkor a fenti határérték egyenlő $\frac{1}{p-1}$-gyel.

Az integrálkritérium szerint tehát a

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$$

sor konvergens, ha $p > 1$, és divergens, ha $p \leq 1$.

Példa 1.3.6 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^5}}$$

sor konvergens, vagy divergens!

Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n^5}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}},$$

ezért az előző példa alapján a vizsgált sor konvergens.

Példa 1.3.7 *Döntsük el, hogy a*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$$

sor konvergens, vagy divergens!

Megoldás: Mivel

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

ezért a vizsgált sor divergens.

Tétel 1.3.8 *(Majoránskritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esetén megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre*

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

teljesül, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Példa 1.3.9 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1}$$

sor konvergens!
Megoldás: Tetszőleges pozitív egész n esetén

$$\frac{n}{n^3+n^2+1} \leq \frac{n}{n^3+n^2} = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

sor konvergens, ezért a majoránskritérium alapján a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+n^2+1}$$

sor is konvergens.

Tétel 1.3.10 *(Minoránskritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esetén megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre*

$$a_n \geq b_n \geq 0$$

teljesül, és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is divergens.

Példa 1.3.11 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

sor divergens!
Megoldás: Minden n indexre

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \geq \frac{n^2}{n^3+n^3} = \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} = b_n$$

Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens, ezért - a minoráns kritérium szerint - a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$$

sor is divergens.

Megjegyzés 1.3.12 A továbbiakban azt fogjuk mondani, hogy a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok esetén a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor majorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort (illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor minorálja a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sort), ha megadható olyan n_0 valós szám, hogy minden n_0-nál nagyobb n indexre $0 \leq a_n \leq b_n$ teljesül.

Tétel 1.3.13 *(Általános gyökkritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz található olyan $0 < q < 1$ feltételnek eleget tevő valós szám és olyan n_0 nemnegatív egész szám, hogy $n > n_0$ esetén*

$$a_n \geq 0, \quad \textit{és} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsorhoz vannak olyan, a tételben szereplő feltételnek eleget tevő q és n_0 számok, melyekre

$$a_n \geq 0 \quad \text{és} \quad \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$$

teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ekkor minden k pozitív egész számra

$$0 \leq a_{n_0+k} \leq q^{n_0+k}$$

teljesül, azaz a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort majorálja a

$$q + q^2 + \cdots + q^n + \cdots$$

mértani sor. Mivel q-ra teljesül a $0 < q < 1$ feltétel, ezért a mértani sor konvergens. Így az általános majoránskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Tétel 1.3.14 *(Speciális gyökkritérium) Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Megjegyzés 1.3.15 Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

teljesül, akkor $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nem teljesülhet, és ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Megjegyzés 1.3.16 Az előzőek alapján a következők adódnak.

- Ha $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens.
- Ha $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor divergens.
- Ha $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsorról nem állíthatjuk sem azt, hogy konvergens, sem azt, hogy divergens; további vizsgálatokra van szükség.

Példa 1.3.17 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

számsor konvergens!
Megoldás: Alkalmazzuk a speciális gyökkritériumot! Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}} \frac{1}{e^2} < 1,$$

ezért a vizsgált sor konvergens.

Tétel 1.3.18 *(Általános hányadoskritérium) Ha a valós számokból álló $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz található olyan $0 < q < 1$ feltételnek eleget tevő valós szám és olyan n_0 nemnegatív egész szám, hogy $n > n_0$ esetén*

$$a_n > 0, \quad \text{és} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \le q,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens

Tétel 1.3.19 *(Speciális hányadoskritérium) Ha a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Megjegyzés 1.3.20 Ha a pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

teljesül, akkor van olyan N index, hogy $a_n > a_N > 0$ teljesül minden $n > N$ esetén, és ezért a $lim_{n\to\infty} a_n = 0$ egyenlőség nem teljesülhet; ebben az esetben a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor divergens.

Megjegyzés 1.3.21 Az előzőek alapján a következők adódnak.

- Ha $lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergens.

- Ha $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor divergens.
- Ha $lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsorról nem állíthatjuk sem azt, hogy konvergens, sem azt, hogy divergens; további vizsgálatokra van szükség.

Példa 1.3.22 Döntsük el, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$$

számsor konvergens-e, vagy divergens?
Megoldás: Alkalmazzuk a speciális hánydoskritériumot! Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} = \infty,$$

ezért a vizsgált sor divergens.

A következő példában szereplő két számsor mindegyikében $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Tehát a fentiek alapján nem tudunk dönteni. Viszont igazolható, hogy az első számsor divergens, a második pedig konvergens.

Példa 1.3.23 A

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

számsor esetén

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

számsor divergens. A

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

számsor esetén

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1$$

és a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

számsor konvergens.

1.4. Leibniz-sorok

Definíció 1.4.1 *Leibniz-soron olyan valós számsort értünk, amelyben a tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és a nullához konvergálnak.*

Tétel 1.4.2 *Minden Leibniz-sor konvergens.*

Bizonyítás. A vizsgált Leibniz-sort a következő alakban vesszük fel:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots,$$

ahol mindegyik a_n pozitív. Annak igazolásához, hogy a vizsgált sor k-dik részletösszegeinek $[s_k, k\in N^+]$ sorozata konvergens, elegendő megmutatni, hogy a sorozat páros indexű elemeiből álló $[s_{2k}, k\in N^+]$ részsorozata és a páratlan indexű elemeiből álló $[S_{2k-1}, k\in N^+]$ részsorozata konvergens, és ezek a részsorozatok közös határértékhez tartanak. Világos, hogy minden $k\in N^+$ esetén

$$s_{2k+1}=s_{2k-1}-a_{2k}+a_{2k+1}\le s_{2k-1},$$

azaz a páratlan indexű elemek részsorozata monoton csökkenő. Az is világos, hogy minden $k\in N^+$ esetén

$$s_{2k+2}=s_{2k}+a_{2k+1}-a_{2k+2}\ge s_{2k},$$

azaz a páros indexű elemek sorozata monoton növekvő. Mivel minden $k \in N^+$ esetén

$$s_2 \leq s_{2k} = s_{2k-1} - a_{2k} \leq s_{2k-1} \leq s_1,$$

ezért mindkét részsorozat korlátos. Ismert, hogy minden monoton csökkenő [növekvő], alulról [felülről] korlátos valós számsorozat konvergens, ezért a vizsgált részsorozatok konvergensek. Mivel $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = 0$, ezért

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k-1} - \lim_{k\to\infty} a_{2k} = \lim_{k\to\infty} s_{2k-1},$$

azaz a két részsorozat közös határértékhez tart. Tehát az $[s_k, k \in N^+]$ sorozat konvergens.

Példa 1.4.3 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ ln\ n}$$

sor konvergens!
Megoldás. Megmutatjuk, hogy a vizsgált sor Leibniz-sor. A sor tagjai váltakozó előjelűek. Az világos, hogy

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ ln\ n} = 0.$$

Mivel minden $n \geq 2$ egész számra

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} > 0 \quad \textit{és} \quad \frac{1}{ln\ n} > \frac{1}{ln(n+1)} > 0,$$

ezért

$$\frac{1}{nqln\ n} > \frac{1}{(n+1)ln(n+1)},$$

és így az $\frac{1}{n\ ln\ n}$ sorozat monoton csökkenő. Tehát a vizsgált sor Leibniz-sor, és így a sor konvergens.

1.5. Abszolút és feltételes konvergencia

Definíció 1.5.1 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsort abszolút konvergensnek nevezünk, ha a tagok abszolút értékéből alkotott*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

számsor konvergens.

Tétel 1.5.2 *Minden abszolút konvergens számsor konvergens.*

Bizonyítás. A Chauchy-féle konvergenciakritériumot használhatjuk. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor abszolút konvergens. Legyen ϵ tetszőleges pozitív egész szám. Akkor van olyan n_0 valós szám, hogy minden $n > n_0$ egész szám és minden p pozitív egész szám esetén

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon.$$

Így

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \epsilon,$$

amiből már következik a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsor konvergenciája. □

Példa 1.5.3 A

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$$

számsor abszolút konvergens, mert a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

számsor konvergens.

Tétel 1.5.4 *Abszolút konvergens számsorok összege, különbsége és számszorosa is abszolút konvergens. Abszolút konvergens számsor számszorosa is abszolút konvergens.*

Definíció 1.5.5 *Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ számsort feltételesen konvergensnek nevezünk, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Példa 1.5.6 Mutassuk meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

sor feltételesen konvergens.
Megoldás: Világos, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, ezért konvergens. Korábban már beláttuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

számsor (az un. harmonikus sor) divergens. Ezért a $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens.

Példa 1.5.7 A

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$$

számsor abszolút konvergens, ezért konvergens is. Így nem feltételesen konvergens.

2. fejezet

Függvénysorok

2.1. Függvénysorozatok

Definíció 2.1.1 *Az olyan sorozatot, amelynek elemei függvények, függvénysorozatnak nevezzük.*

Itt olyan függvénysorozatokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek elemei a komplex számok halmazán vagy annak valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvények. Az ilyen függvénysorozatokat komplex változós függvénysorozatoknak nevezzük. Speciális esetként foglalkozunk olyan függvénysorozatokkal is, amelyeknek elemei valós értékű, valós változós függvények. Az ilyen függvénysorozatokat valós változós függvénysorozatoknak nevezzük.

Definíció 2.1.2 *Egy komplex (speciálisan, valós) változós f_n függvénysorozat értelmezési tartományán mindazon komplex (speciálisan, valós) számoknak a halmazát értjük, amelyek az f_n függvények mindegyikének értelmezési tartományába beletartoznak.*

Példa 2.1.3 *Határozzuk meg az*

$$f_n(x) = \sqrt{x-n}, \; n = 1, 2, \ldots$$

valós változós függvénysorozat értelmezési tartományát!

Megoldás: Mivel az f_n függvény értelmezési tartománya az $[n, \infty)$ intervallum, ezért a vizsgált függvénysorozat értelmezési tartománya a

$$\cap_{n=1}^{\infty}[n, \infty)$$

halmaz, azaz az üres halmaz.

Példa 2.1.4 *Határozzuk meg az*

$$f_n(x) = \sqrt{n^2 - x^2},\ n = 1, 2, \ldots$$

valós változós függvénysorozat értelmezési tartományát!
Megoldás: Az f_n függvény értelmezési tartománya mindazon valós x számokból áll, amelyek teljesítik az

$$n^2 - x^2 \geq 0$$

egyenlőséget, azaz, amelyekre

$$n^2 \geq x^2$$

teljesül. Ezek pontosan azok a valós számok, amelyekre

$$n \geq |x|$$

igaz, vagyis amelyek beletartoznak a $[-n, n]$ intervallumba. Ezért a vizsgált függvénysorozat értelmezési tartománya a

$$\cap_{n=1}^{\infty}[-n, n]$$

halmaz, azaz a

$$[-1, 1]$$

intervallum.

Definíció 2.1.5 *Egy f_n függvénysorozat értelmezési tartományának valamely x_0 pontját a függvénysorozat konvergenciapontjának nevezzük, ha az x_0 pontnak a függvénysorazat elemeibe való behelyettesítésével keletkezett $f_n(x_0)$ számsorozat konvergens. Ha az $f_n(x_0)$ számsorozat divergens, akkor pedig azt mondjuk, hogy x_0 az f_n függvénysorozat divergenciapontja.*

Definíció 2.1.6 *Egy függvénysorozat konvergenciapontjainak halmazát a függvénysorozat konvergenciatartományának nevezzük.*

Példa 2.1.7 *Határozzuk meg az*

$$x^n; n = 1, 2, \ldots$$

valós változós függvénysorozat konvergenciatartományát!
Megoldás: A függvénysorozat értelmezési tartománya a valós számok halmaza. Ha $x_0 < -1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n$$

nem létezik, mert az x_0^n sorozat páros indexű elemei ∞-hez, páratlan indexű elemei $-\infty$-hez divergálnak. Tehát ekkor az x_0 pont divergenciapont.

Az $x_0 = -1$ pont divergenciapont, mert a behelyettesítésével keletkezett

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

sorozat divergens.

Ha $-1 < x_0 < 1$ teljesül, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = 0.$$

Tehát ekkor az x_0 pont konvergenciapont.

Az $x_0 = 1$ pont konvergenciapont, mert a behelyettesítésével keletkezett

$$1, 1, 1, \ldots$$

konstans sorozat 1-hez konvergál.

Ha $x_0 > 1$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} x_0^n = \infty.$$

Tehát minden 1-nél nagyobb valós szám a sorozat divergenciapontja.

Tehát a függvénysorozat konvergenciatartománya a balról nyílt, jobbról zárt $(-1, 1]$ intervallum.

Definíció 2.1.8 *Egy f_n függvénysorozat határfüggvényének nevezzük azt a h függvényt, melynek értelmezési tartománya a függvénysorozat konvergenciatartománya, és tetszőleges x_0 konvergenciaponthoz a $\lim_{\to\infty} f_n(x_0)$ határértéket rendeli függvényértékként. Képletben:*

$$h(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

Példa 2.1.9 *Az előző példában szereplő $x^n; n = 1, 2, \ldots$ függvénysorozat határfüggvénye az a h függvény, melynek értelmezési tartománya a $(-1, 1]$ intervallum, és*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & ha \ -1 < x < 1 \\ 1 & ha \ x = 1. \end{cases}$$

2.2. A függvénysorokkal kapcsolatos alapfogalmak

Definíció 2.2.1 *Az olyan sort, amelynek tagjai függvények, függvénysornak nevezzük.*

A függvénysorok indexezését általában 0-tól kezdjük, azaz a függvénysorok általános alakja

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Mint a függvénysorozatoknál, olyan függvénysorokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek tagjai a komplex számok halmazán vagy annak valamely részhalmazán értelmezett, komplex értékű függvények. Az ilyen függvénysorokat komplex változós függvénysoroknak nevezzük. Speciális esetként foglalkozunk olyan függvénysorokkal is, amelyeknek tagja valós értékű, valós változós függvények. Az ilyen függvénysorokat valós változós függvénysoroknak nevezzük.

Definíció 2.2.2 *Egy komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor értelmezési tartományán mindazon komplex (speciálisan, valós) számoknak a halmazát értjük, amelyek az f_n függvények mindegyikének értelmezési tartományába beletartoznak.*

Példa 2.2.3 Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} ln(x-n)$$

valós változós függvénysor értelmezési tartományát!
Megoldás: Az $f_n(x) = ln(x-n)$ függvény értelmezési tartomány az (n, ∞) intervallum. Ezért egy x valós szám akkor és csak akkor van benne a függvénysor értelmezési tartományába, ha $x > n$ minden n nemnegatív egész n esetén. Így a függvénysor értelmezési tartomány az üres halmaz.

Példa 2.2.4 Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x+n}$$

valós függvénysor értelmezési tartományát!
Megoldás: Az $f_n(x) = \sqrt{x+n}$ függvény értelmezési tartománya az $[-n, \infty)$ intervallum. Ezért a függvénysor értelmezési tartománya a $[0, \infty)$ intervallum.

Definíció 2.2.5 *A komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor értelmezési tartományának x_0 elemét a függvénysor konvergenciapontjának nevezzük, ha az $x = x_0$ helyettesítéssel adódó $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ számsor konvergens. Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ számsor divergens, akkor az x_0 számot a függvénysor divergenciapontjának nevezzük.*

Példa 2.2.6 *Mutassuk meg, hogy a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n}(x+1)^n$$

valós változós függvénysornak az $x_0 = -\frac{4}{3}$ szám konvergenciapontja, az $x_0 = -\frac{2}{3}$ szám pedig divergenciapontja!
Megoldás: Az $x_0 = -\frac{4}{3}$ számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n + 2^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

számsor Leibniz sor, ezért a sor konvergens. Tehát az $x_0 = -\frac{4}{3}$ szám konvergenciapont.

Az $x_0 = -\frac{2}{3}$ számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$$

számsor divergens, mivel a sort minorálja a divergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor. Tehát az $x_0 = -\frac{2}{3}$ szám divergenciapont.

Definíció 2.2.7 *Egy függvénysor konvergenciapontjainak halmazát a függvénysor konvergenciatartományának nevezzük.*

Példa 2.2.8 Határozzuk meg a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ valós függvénysor konvergenciatartományát!
Megoldás: Egy q valós számnak a függvénysorba való behelyettesítésével keletkezett q kvóciensű $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mértani sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Így a vizsgált függvénysor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum.

Definíció 2.2.9 *Egy komplex (speciálisan, valós) változós $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor összegfüggvényén azt a $s(x)$ függvényt értjük, melynek értelmezési tartománya megegyezik a függvénysor konvergencitartományával, és ezen konvergenciatartomány tetszőleges x_0 pontjához a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ számsor összegét rendeli. Képletben:*

$$s(x_0) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0).$$

Példa 2.2.10 *Határozzuk meg a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x+1)^n$$

hatványsor összegfüggvényét!
Megoldás: A vizsgált sor

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2(x+1))^n$$

alakban is írható, amely egy $2(x+1)$ *kvóciensű mértani sor. Ennek konvergenciatartománya mindazon valós* x*-ek halmaza, amelyekre*

$$|2(x+1)| < 1$$

teljesül, azaz, amelyekre

$$-\frac{3}{2} < x < -\frac{1}{2}.$$

Így a függvénysor $s(x)$ *összegfüggvényének értelmezési tartománya a* $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ *intervallumon, és ennek tetszőleges* x *pontjára*

$$s(x) = \frac{1}{1-2(x+1)} = -\frac{1}{2x+1}.$$

2.3. Hatványsorok

Definíció 2.3.1 *Az* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *és* z_0 *komplex konstansokkal, valamint a* z *komplex változóval képezett*

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots$$

függvénysort a z_0 *körüli komplex változós hatványsornak nevezzük. Ha a konstansok valósak és* z *is valós változó, akkor a sort valós változós hatványsornak nevezzük.*

Megjegyzés 2.3.2 *Egy hatványsor szummajellel rövidebben is felírható:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Megjegyezzük, hogy az $a_0(z-z_0)^0$ *akkor is jelöljön* a_0*-t, ha* $z = z_0$*.*

Tétel 2.3.3 *(Abel-féle tétel) Ha a* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *hatványsor konvergens egy* $z_1 \neq z_0$ *pontban, akkor abszolút konvergens minden olyan* z *pontban, amelyre* $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ *teljesül.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergens egy $z_1 \neq z_0$ pontban. Definíció szerint ez annyit jelent, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ számsor konvergens és ezért

$$lim_{n\to\infty} a_n(z_1-z_0)^n = 0.$$

Mivel minden konvergens sorozat korlátos, ezért megadható olyan $v > 0$ valós szám, hogy minden n indexre

$$|a_n(z_1-z_0)^n| \leq v$$

teljesül. Legyen z olyan komplex szám, amely eleget tesz a $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ feltételnek. Ez ilyen z számokra igaz, hogy

$$0 < \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| < 1,$$

és ezért a

$$v\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$$

mértani sor konvergens. Mivel

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n|\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n \leq v\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n,$$

ezért a $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-z_0)^n|$ sort majorálja a konvergens $v\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n$ mértani sor. A majoránskritérium szerint a $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n(z-z_0)^n|$ sor konvergens, azaz a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sor abszolút konvergens.

Megjegyzés 2.3.4 Az Abel-féle tétel szerint minden z_0 körüli komplex változós hatványsor konvergenciatartománya a komplex számsík valamely z_0 középpontú körének belső pontjaiból, illetve a kerületen lévő pontok némelyikéből áll. Ennek a körnek a ϱ sugarát a hatványsor konvergenciasugarának nevezzük; ez lehet 0, lehet egy pozitív egész szám, de lehet ∞ is. Megmutatható, hogy

$$\varrho = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

Valós változós x_0 körüli
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$
hatványkör konvergenciatartománya (az előzőek következményeként) az $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ nyilt intervallum pontjaiból, esetleg ezen intervallum végpontjainak valamelyikéből állnak. Az intervallum felének ϱ értékére az előzőekben felírt képletek érvényesek.

Példa 2.3.5 *Adja meg az $x_0 = 0$ körüli*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$$
hatványsor konvergenciatartományát!
Megoldás: A hatványsor konvergenciasugara:
$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$
Így a $(-1,1)$ intervallum pontjai a függvénysor konvergenciapontjai. Mivel a -1, illetve 1 számoknak a hatványsorba való behelyettesítésével keletkezett
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad \textit{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
számsorok általános tagja nem tart nullához, ezért a -1 és 1 számok divergenciapontok. Tehát a vizsgált számsor konvergenciatartománya a
$$(-1,1)$$
intervallum.

Példa 2.3.6 *Adja meg az $x_0 = 1$ körüli*
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x-1)^n$$
hatványsor konvergenciatartományát!

Megoldás: A hatványsor konvergenciasugara:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Így, az Abel-féle tétel szerint, a $(0,2)$ *intervallum belső pontjai konvergenciapontok. Az intervallum bal oldali végpontjának behelyettesítésével keletkezett számsor:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}},$$

amely számsor Leibniz sor, ezért konvergens. Így a -1 *pont a sor konvergenciapontja. Az intervallum jobb oldali végpontjának behelyettesítésével keletkezett számsor:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

amely számsor divergens. Így a 2 *pont divergenciapont. Tehát a vizsgált sor konvergenciatartománya a*

$$[0,2)$$

intervallum.

Példa 2.3.7 *Adja meg az* $x_0 = 2$ *körüli*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(x-2)^n$$

hatványsor konvergenciatartományát!
Megoldás: A hatványsor konvergenciasugara:

$$\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

Így, az Abel-féle tétel szerint, a $(1,3)$ *intervallum belső pontjai konvergenciapontok. Az intervallum bal oldali végpontjának behelyettesítésével keletkezett számsor:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2}$$

Leibniz-sor, ezért konvergens. Az intervallum jobb oldali végpontjának behelyettesítésével keletkezett számsor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

amely konvergens. Tehát a vizsgált sor konvergenciatartománya az

$$[1,3]$$

intervallum.

Tétel 2.3.8 *Ha a valós változós*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

hatványsor az $I=(a,b)$ véges vagy $I=(-\infty,\infty)$ végtelen intervallumban konvergens, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = s(x),$$

akkor a tagonkénti differenciállással, illetve tagonkénti integrálással adódó

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}, \quad \textit{illetve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

hatványsor is konvergens az I intervallumban, és ott

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = s'(x),$$

illetve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = S(x)-S(x_0),$$

ahol S az s függvény tetszőlegesen választott primitív függvénye.

Példa 2.3.9 Határozzuk meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2}x + \frac{3}{2^3}x^2 + \frac{4}{2^4}x^3 + \cdots$$

hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!
Megoldás: A vizsgált hatványsor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \cdots$$

hatványsor tagonkénti deriválásával keletkezett hatványsor. Ezen utóbbi hatványsor $\frac{x}{2}$ kvóciensű mértani sor, melynek konvergenciatartománya a $(-2, 2)$ intervallum, összegfügvénye pedig (ezen az intervallumon):

$$s(x) = \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{2}{2-x}.$$

Így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^n = s'(x) = \left(\frac{2}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2}.$$

2.4. Taylor-sorok, Maclaurin-sorok

Egy x_0 pontban n-szer differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 pontbeli n-dik Taylor polinomján a

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

polinomot értjük. Ha egy egyváltozós valós f függvény az x_0 pont valamely E teljes környezetében $(n+1)$-szer folytonosan differenciálható, akkor az E tetszőleges x pontja esetén megadható olyan x_0 és x közötti ξ pont, hogy

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} =$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Ezt a formulát Taylor-fromulának nevezzük. Az

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

tagot maradéktagnak nevezzük.

Definíció 2.4.1 *Az x_0 pont valamely teljes környezetében akárhányszor differenciálható egyváltozós valós f függvény x_0 körüli Taylor-során az*

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots$$

hatványsort értjük; ha $x_0 = 0$, akkor a sort Maclaurin-sornak is nevezzük.

Tétel 2.4.2 *Legyen f az x_0 valós szám valamely E teljes környezetében akárhányszor differenciálható egyváltozós valós függvény. Az f függvény ebben a teljes környezetben akkor és csak akkor egyenlő saját x_0 körüli Taylor-sorának összegfüggvényével, azaz*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

akkor és csak akkor teljesül, ha a Taylor-formula maradéktagja $n \to \infty$ esetén 0-hoz konvergál minden $x \in E$ pontban, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

teljesül tetszőleges $x \in E$ esetén.

Megjegyzés 2.4.3 *Az $f(x) = e^x$ függvény Maclaurin-sora:*

$$e^x := 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Az $f(x) = \sin x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\sin x := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Az $f(x) = \cos x$ függvény Maclaurin-sora:

$$\cos x := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Tétel 2.4.4 *Legyen K az*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^2 + \cdots$$

hatványsor konvergenciatartománya, és legyen $s(x)$ a sor összegfüggvénye. Ekkor $s(x)$-nek a K halmazon létezik Maclaurin-sora, és ez éppen az eredetileg adott

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^2 + \cdots$$

sorral egyenlő.

Példa 2.4.5 *Adjuk meg az*

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

függvény Maclaurin-sorát!
Megoldás: Mivel a $-1 < x < 1$ feltételnek eleget tevő valós x-ek estén

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ,$$

ezért az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény Maclaurin-sora az

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

sor.

Példa 2.4.6 *Adjuk meg az*

$$f(x) = arctgx$$

függvény Maclaurin-sorát!
Megoldás: Ismert, hogy

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Az

$$s(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$$

függvény a $-x^2$ *kvóciensű*

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

mértani sor összegfüggvénye a $(-1, 1)$ *intervallumon. Ennek tagonkénti integrálásával keletkezett sor az*

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

sor. Mivel $S(x) = arctgx$ *az* $s(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *függvény egy primitív függvénye, ezért az* $s(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *függvény Maclaurin-sorának tagonkénti integrálásával keletkezett*

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

sorra

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = S(x) - S(0) = arctgx - arctg0 = arctgx$$

teljesül. Tehát az arctgx függvény Maclaurin-sora

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

2.5. Fourier-sorok

A legegyszerűbb rezgések, az úgynevezett harmonikus rezgések, amelyek eredő-jeként a legkülönbözőbb rezgések alakulhatnak ki. Természetesen vetődik fel az a kérdés, hogy előállítható-e minden rezgőmozgás tiszta harmonikus rezgések eredőjeként. A tapasztalat azt mutatja, hogy a periodikus rezgések általában előállíthatók ilyen módon.

A tiszta harmonikius rezgések matematikailag a $\cos nx$ és a $\sin nx$ ($n \in N^+$) függvényekkel írhatók le. A fenti kérdés matematikailag tehát úgy fogalmazható meg, hogy adott f egyváltozós valós függvény előállítható-e

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

alakban. Mivel ennek az egyenlőségnek a jobb oldalán 2π szerint periodikus függvények állnak, ezért ilyen előállítás csak akkor lehetséges, ha az f függvény is 2π szerint periodikus.

Felvetődik az a kérdés, hogy ha az egyváltozós valós f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor megadható-e olyan zérustól különböző c konstans, amellyel fenáll az

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos cx + b_1 \sin cx + a_2 \cos 2cx + b_2 \sin 2cx + \cdots$$

egyenlőség. Az egyenlőség teljesülése esetén a $\cos cx$ és $\sin cx$ függvényeknek $2p$ szerint periodikusnak kell lenni; ez pedig akkor és csak akkor következik be, ha c-re teljesülnek a

$$\cos 2pc = \cos 0 = 1 \quad \text{és} \quad \sin 2pc = \sin 0 = 0$$

egyenlőségek. A legkisebb olyan c, amelyre ez teljesül, a

$$2pc = 2\pi$$

egyenlet megoldása, vagyis

$$c = \frac{\pi}{p}.$$

A $2p$ szerint periodikus f függvényekhez definiálni fogunk egy

$$a_0 + a_1 \cos \frac{\pi}{p} x + b_1 \sin \frac{\pi}{p} x + a_2 \cos 2\frac{\pi}{p} x + b_2 \sin 2\frac{\pi}{p} x + \cdots$$

alakú függvénysort speciális

$$a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$$

együtthatókkal (az un. Fourier-együtthatókkal), amely sort az f függvény Fourier-sorának nevezzük, és megvizsgáljuk, hogy milyen esetben lesz az f függvény a Fourier-sorának összegfüggvénye.

Definíció 2.5.1 *A $2p$ szerint periodikus valós f függvény Fourier-együtthatóin az*

- $a_0 = \frac{1}{2p} \int_0^{2p} f(x)dx,$

- *$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}xdx \quad (n \in N^+)$,*
- *$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}xdx \quad (n \in N^+)$*

számokat értjük; az ezekkel képezett

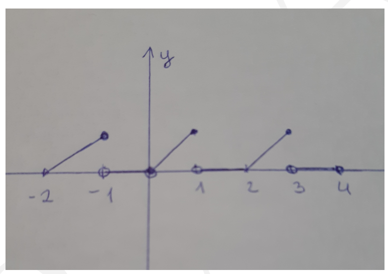
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\frac{\pi}{p}x + b_n \sin n\frac{\pi}{p}x)$$

függvénysort pedig az f függvény Fourier-sorának nevezzük.

Példa 2.5.2 Határozza meg a $(0, 2]$ intervallumon az

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ 0 < x \leq 1 \\ 0, & ha\ 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

képlettel definiált, 2 szerint periodikus függvény Fourier-együtthatóit!



2.1. ábra. f(x) grafikonja

Megoldás: A függvény $2p = 2$ szerint periodikus, ezért $p = 1$. Így

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 xdx + \int_1^2 0dx\right) = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right) = \frac{1}{4}.$$

Legyen $n \geq 1$ tetszőleges egész szám. Akkor

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}xdx = \int_0^1 x\cos n\pi xdx.$$

Parciális integrálást alkalmazunk. Legyen

$$u(x) = x \quad \text{és} \quad v'(x) = \cos n\pi x.$$

Akkor
$$u'(x) = 1 \quad \text{és} \quad v(x) = \frac{\sin n\pi x}{n\pi}.$$
Így
$$\int_0^1 x\cos n\pi x dx = \left[x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx = \left[\frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} - \frac{\cos 0}{n^2\pi^2} = \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{1}{n^2\pi^2} = \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi^2}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$
Továbbá,
$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}xdx = \int_0^1 x\sin n\pi x dx.$$
Parciális integrálást alkalmazunk. Legyen
$$u(x) = x \quad \text{és} \quad v'(x) = \sin n\pi x.$$
Akkor
$$u'(x) = 1 \quad \text{és} \quad v(x) = -\frac{\cos n\pi x}{n\pi}.$$
Így
$$\int_0^1 x\sin n\pi x dx = \left[-x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx = -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \left[\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right]_0^1 =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ -\frac{1}{n\pi}, & \text{ha } n \text{ páros.} \end{cases}$$

A 2.5.1 Definíciónak a $p = \pi$ esetre vonatkozó alakját is megfogalmazzuk.

Definíció 2.5.3 *A 2π szerint periodikus valós f függvény Fourier-együtthatóin az*

- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx,$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n \in N^+),$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n \in N^+)$

számokat értjük; az ezekkel képezett

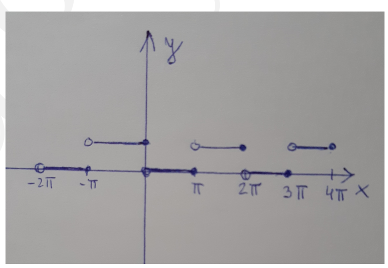
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

függvénysort pedig az f függvény Fourier-sorának nevezzük.

Példa 2.5.4 Határozza meg a $(0, 2\pi]$ intervallumon az

$$f(x) = \begin{cases} 0, & ha\ 0 < x \leq \pi \\ 1, & ha\ \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

képlettel definiált, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát!



2.2. ábra. f(x) grafikonja

Megoldás:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 1dx = \frac{1}{2\pi} [x]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_\pi^{2\pi} = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_\pi^{2\pi} \sin nx dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_\pi^{2\pi} =$$

$$= \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & \textit{ha } n \textit{ páratlan,} \\ 0, & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

Így a vizsgált $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$$

Tétel 2.5.5 *Ha a periodikus egyváltozós valós f függvénynek az x_0 helyen van bal oldali és jobb oldali határértéke, és a függvény Fourier-sora az x_0 pontban konvergens, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli összege az f függvény x_0 pontbeli bal oldali és jobb oldali határértékének számtani közepével egyenlő Speciálisan, ha az f függvény folytonos az x_0 helyen, Fourier-sora pedig konvergens x_0-ban, akkor a Fourier-sor x_0 pontbeli összege $f(x_0)$-lal egyenlő.*

Tétel 2.5.6 *Ha a $[-p,p]$ intervallumnak van olyan*

$$-p = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = p$$

beosztása, hogy az (x_{i-1}, x_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ intervallumokon a $2p$ szerint periodikus függvény monoton, akkor az f függvény Fourier-sora (ha létezik) mindenütt konvergens.

A Fourier-együtthatók kiszámításához hasznos adalék a következő tétel.

Tétel 2.5.7 *Ha az egyváltozós valós f függvény $2p$ szerint periodikus, akkor bármely valós a számra*

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_0^{2p} f(x)dx.$$

Ebből adódóan, a Fourier együtthatók kiszámításakor az integrálás tetszőleges $2p$ hosszúságú intervallumon végezhető.

Bizonyítás.

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_a^{2p} f(x)dx + \int_{2p}^{a+2p} f(x)dx.$$

Az egyenlőség jobb oldalán álló második integrálban végezzünk

$$x = t + 2p$$

helyettesítést. Mivel

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

és a

$$t(x) = x - 2p$$

szigorúan monoton növekvő függvényre

$$t(2p) = 0 \quad \text{és} \quad t(a + 2p) = a$$

teljesül, ezért

$$\int_{2p}^{a+2p} f(x)dx = \int_0^a f(t + 2p)dt = \int_0^a f(t)dt,$$

felhasználva azt is, hogy az f függvény $2p$ szerint periodikus (és ezért $f(t + 2p) = f(t)$). Az $\int_0^a f(t)dt$ integrálban x-et írhatunk a t helyett, azaz

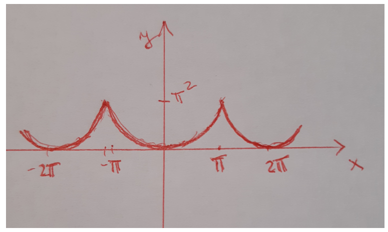
$$\int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx.$$

A bizonyítás elején levő egyenlőség tehát a következő alakú:

$$\int_a^{a+2p} f(x)dx = \int_a^{2p} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx.$$

Példa 2.5.8 *Írjuk fel annak a 2π szerint periodikus $f(x)$ függvénynek a Fourier sorát, amely a $(0, 2\pi]$ intervallumon a következő képlettel van definiálva:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } 0 < x \le \pi \\ (x - 2\pi)^2, & \text{ha } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$



2.3. ábra. f(x) grafikonja

Mivel a vizsgált $f(x)$ függvény 2π szerint periodikus, ezért a Fourier-együtthatók kiszámításánál tetszőleges 2π hosszúságú intervallumon integrálhatunk. Az eredeti képletek alkalmazásakor az $f(x)$ függvény más-más képlettel van értelmezve a $(0,\pi]$, illetve a $(\pi, 2\pi]$ intervallumokon. Viszont a $(-\pi,\pi]$ intervallumon az $f(x)$ függvényre $f(x) = x^2$ teljesül, így célszerű a $(-\pi,\pi]$ intervallumon elvégezni az integrálást. Ezért

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Ha $n \geq 1$, akkor

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx.$$

A parciális integrálás képletét alkalmazzuk. Legyen

$$u(x) = x^2, \quad \textit{és} \quad v'(x) = \cos nx.$$

Akkor

$$u'(x) = 2x, \quad \textit{és} \quad v(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

Így

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\sin nx}{n}dx.$$

Ismét alkalmazzuk a parciális integrálás képletét. Legyen

$$u(x) = x, \quad \textit{és} \quad v'(x) = \frac{\sin nx}{n}.$$

Akkor

$$u'(x) = 1, \quad \textit{és} \quad v(x) = -\frac{\cos nx}{n^2}.$$

Így

$$-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\sin nx}{n}dx = -\frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n^2} + \frac{\sin nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \cdots = (-1)^n\frac{4}{n^2}.$$

A b_n együtthatókra pedig a következő eredményt kapjuk:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx.$$

A parciális integrálás képletét alkalmazzuk. Legyen

$$u(x) = x^2, \quad \textit{és} \quad v'(x) = \sin nx.$$

Akkor

$$u'(x) = 2x, \quad \textit{és} \quad v(x) = -\frac{\cos nx}{n}.$$

Így

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\left[-x^2\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2x\frac{\cos nx}{n}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\cos nx}{n}dx.$$

Ismét alkalmazzuk a parciális integrálás képletét. Legyen

$$u(x) = x, \quad \textit{és} \quad v'(x) = \frac{\cos nx}{n}.$$

Akkor

$$u'(x) = 1, \quad \textit{és} \quad v(x) = \frac{\sin nx}{n^2}.$$

Így

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\cos nx}{n}dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-x\sin nx}{n^2} + \frac{\cos nx}{n^3}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Tehát a vizsgált $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx.$$

Ismeretes, hogy ha egy egyváltozós valós függvény az egész számegyenesen értelmezve van, akkor felírható egy páros és egy páratlan függvény összegeként. Ezért is érdekes számunkra a következő tétel.

Páros h függvény $[-p, p]$ intervallumon vett integrálja a $[0, p]$ intervallumon vett integrál kétszerese, páratlan h függvény $[-p, p]$ intervallumon vett integrálja pedig 0. Ezt a tényt is használjuk a következő megjegyzésben.

Megjegyzés 2.5.9 *Ha f páros függvény, akkor $f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x$ páratlan, $f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x$ pedig páros függvény, és ezért (használva a fentebb bizonyított tétel eredményét is)*

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx = 0,$$

valamint

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx$$

és

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Ha f páratlan függvény, akkor $f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x$ páratlan, $f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x$ pedig páros függvény, és ezért

$$a_0 = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = 0$$

és

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx = 0,$$

valamint

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx = \frac{2}{p}\int_{0}^{p} f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Az előző megjegyzés alapján megfogalmazhatjuk a következő tételt.

Tétel 2.5.10 *Páros f függvény Fourier-sorában csak konstans és koszinoszos tagok szerepelnek:*

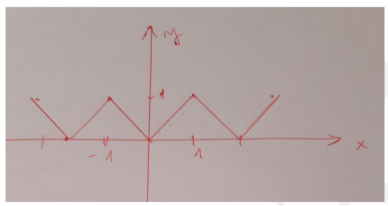
$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{0}^{p} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Páratlan f függvény Fourier-sorában csak szinuszos tagok szerepelnek:

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin n\frac{\pi}{p}x dx.$$

Példa 2.5.11 *Adjuk meg annak a 2 szerint periodikus $f(x)$ függvénynek a Fourier-sorát, amely a $[-1,1)$ intervallumon az $f(x) = |x|$ képlettel van definiálva.*



2.4. ábra. f(x) grafikonja

Mivel a vizsgált $f(x)$ függvény páros, ezért Fourier-sorában a b_n együtthatókra

$$b_n = 0$$

teljesül. A függvény $2p = 2$ szerint periodikus, ezért $p = 1$. A 2.5.10 Tétel szerint

$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx = \cdots = \begin{cases} -\frac{2}{n^2\pi^2}, & \textit{ha } n \textit{ páratlan} \\ 0, & \textit{ha } n \textit{ páros.} \end{cases}$$

Így a vizsgált $f(x)$ függvény Fourier-sora:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2\pi^2}\cos(2k-1)\pi x.$$