

## Algebra 1.

### Vizsgatételek - 2024 ősz

1. Művelet, algebrai struktúra, félcsoport, csoport, a csoport fogalmával ekvivalens feltételek, csoport elemének rendje. Nevezetes csoportok definíciói (kvaternió-csoport,  $n$ -edfokú diéder-csoport, Klein-csoport,  $n$ -edfokú szimmetrikus csoport, szabad csoport).
2. Részcsoport (ekvivalens definíciók), részcsoportok metszete, részcsoport szerinti bal oldali és jobb oldali mellékosztályok, a közöttük levő kapcsolat. A Lagrange-tétel.
3. Részcsoport generálása, ciklikus csoport, ciklikus csoportok izomorfiaja, részcsoportjai, elem endje,  $n$ -edrendű ciklikus csoport  $n$ -edrendű elemeinek száma.
4. Normálosztó, faktorcsoport. Csoport homomorfizmusának fogalma és alaptulajdonságai, homomorfizmus magja, csoport normális részcsoportjai és homomorfizmusai közötti kapcsolat.
5. Homomorfizmustétel, izomorfizmustételek.
6. Direkt szorzat (ekvivalens definíciók), direkt szorzat elemeinek rendje, ciklikus csoport direkt szorzatra bontása. Szemidirekt szorzat.
7. Véges Abel-csoportok alaptétele.
8. Szimmetrikus csoport, ciklusok, transzpozíciók, permutációk ciklusok, illetve transzpozíciók szorzatára való bontása, az  $S_n$  csoport feloldhatósága. A Cayley-tétel. A páros permutációk 3 hosszúságú ciklusokkal való előállítása. Az  $A_n$  alternáló csoport egyszerű, ha  $n \geq 5$ .
9. Centrum, centralizátor, normalizátor. Konjugáltosztály elemszáma, osztályegyenlet, véges  $p$ -csoport centruma.
10. Sylow-tételek (csak Sylow I. tételét kell bizonyítani), normalizátor,  $p$ -Sylow-részcsoportok száma (használva a részcsoport normalizátorának fogalmát is). A Chauchy-tétel
11. Kommutátor-részcsoport definíciója, tulajdonságai, jellemzése. Csoport kommutátorláncának fogalma.
12. Feloldhatóság, véges csoport feloldhatóságának ekvivalens feltételei, prímszámú rendű csoport feloldhatósága. A Burnside-tétel és a Feit–Thompson-tétel kimondása. Csoport kommutátorláncának és feloldhatóságának kapcsolatáról szóló tétel kimondása.
13. Normállánc, kompozíciólánc, A Jordan–Hölder-tétel. Véges csoport feloldhatóságának jellemzése kompozícióláncának faktoraival.
14. Szabad csoport, definiáló relációk, Dyck-tétel. Az  $S_3$  csoport előállítása definiáló relációkkal. Kis elemszámú csoportok.
15. Gyűrű részgyűrűje, ideálja, gyűrűhomomorfizmus, faktorgyűrű, homomorfizmustétel, izomorfizmustételek, test fölötti mátrixgyűrű egyszerűsége.
16. Beágyazás egységelemes gyűrűbe, hányadostest.

17. Egységelemes integritási tartományok. Az irreducibili elem és a prímelem fogalma és kapcsolatuk. A Gauss-gyűrű, a főideálgyűrű, az Euklideszi-gyűrű. A Noether-gyűrű, Hilbert tétele egységelemes Noether gyűrű feletti polinomgyűrűről.

18.  $K$  test feletti  $K[x]$  polinomgyűrű.  $K[x]$  maximális ideáljai.  $K[x]$  mely faktorai testek?

19. Teljes mátrixgyűrűk, gyűrűk direkt összege, féligegyszerű gyűrűk, Wedderburn 1. és 2. tétele (bizonyítás nélkül).

20. A ferdetest és a test fogalma, a Wedderburn-tétel. Nullosztómentes gyűrű és ferdetest karakterisztikája. Résztest, prímtest. Legalább két elemet tartalmazó véges nullosztómentes gyűrű. Kommutatív egyszerű gyűrű (ha nem zérógyűrű).

21. Testbővítés. Az algebrai és transzcendens elem fogalma. Minimálpolinom, irreducibilis polinom gyökével való bővítés egyértelmősége, transzcendens elemmel való bővítés.

22. Algebrai bővítések, véges fokú bővítések, felbontási test. Véges testek elemszáma, prímszámú test létezése.