LINEÁRIS ALGEBRA

NAGY ATTILA

2016.05.15.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

A középiskolai algebraoktatásban az egyenletek megoldása a központi téma. Ennek első lépése az egyismeretlenes elsőfokú egyenletek vizsgálata, amelyet később a másodfokú egyenletek, valamint az olyan egyenletrendszerek vizsgálata követ, amelyek két vagy három olyan elsőfokú egyenletből állnak, amelyek két vagy esetleg három ismeretlent tartalmaznak.

A felsőoktatásban az algebraoktatás továbbhalad mindkét irányban. Az egyik irány a lineáris egyenletrendszerek vizsgálata, a másik pedig a polinomok algebrája. A felsőbb algebra csupán kezdete az algebrának, amely igen szerteágazó.

A Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem mérnökoktatásában szereplő Matematika A2a tantárgy tematikájának részeként a lineáris algebra legalapvetőbb fogalmaival, illetve eredményeivel ismerkedünk meg. Ez a jegyzet a Budapest Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar hallgatói számára meghirdetett Matematik A2a előadásaim lineáris algebrával kapcsolatos anyagát tartalmazza.

A jegyzet - a számozatlan bevezetőn kivül - nyolc fejezetből áll. Az első fejezetben a művelet fogalmával és nevezetesebb algebrai struktúrákkal, a félcsoport, a csoport, a gyűrű és a test fogalmával ismerkedünk meg. A második fejezet test feletti lineáris egyenletrendszerek egy megoldási módszerét, a Gauss módszert tartalmazza. A harmadik fejezetben a vektorterekkel kapcsolatos alapfogalmakat és alapvető tulajdonságokat tárgyaljuk. A fejezet végén szükséges és elégséges feltételt adunk egy lineáris egyenlet megoldhatóságára, illetve egyértemű megoldhatóságára. A negyedik fejezetben a mátrixalgebrával foglalkozunk. Definiáljuk a mátrixok közötti összeadást és szorzást, és bizonyítjuk a műveletekkel kapcsolatos tulajdonságokat. Definiáljuk a négyzetes mátrixok invertálhatóságának fogalmát is. A fejezet végén a lineáris egyenletrendszerek mátrixszorzatos alakjával foglalkozunk. Az ötödik fejezetben definiáljuk a determináns fogalmát, és foglalkozunk a determináns alaptulajdonságaival. Bizonyítjuk a determinánsok szorzástételét. Definiáljuk a mátrix rangját, bizonyítjuk a rangszámtételt, és vizsgáljuk a négyzetes mátrixok invertálhatóságának determinánssal kapcsolatos feltételét. A fejezet végén bizonyítjuk az n ismeretlent tartalmazó, n egyenletből álló lineáris egyenletrendszerekkel kapcsolatos Cramer-szabályt. A hatodik fejezetben a mátrixok sajátértékei, illetve sajátvektorai állnak a vizsgálat középpontban. A hetedik fejezetben a vektorterek közötti lineáris leképezésekkel foglalkozunk. Definiáljuk egy lineáris leképezés képterének és nullterének fogalmát, és bizonyítjuk a velük kpcsolatos dimenziótételt. Megmutatjuk, hogy egy test feletti n-dimenziós V_1 vektortérnek egy m-dimenziós V_2 vektortérbe való lineáris leképezései és a vektorterek rögzített bázisai esetén kölcsönösen egyértelmű kapcsolat van V_1-nek V_2-be való lineáris leképezései és a test elemeiből képezett $m \times n$-típusú mátrixok között. Megvizsgáljuk azt is, hogy milyen kapcsolat van egy test feletti V vektortérnek önmagába való lineáris leképezéseihez (azaz lineáris transzformációihoz) a V vektortér különböző bázisa szerint tartozó mátrixok között. Definiáljuk a lineáris transzformációk sajátértékeinek és sajátvektorainak fogalmát, és vizsgáljuk a mátrixok diagonalizálhatóságának szükséges és elégséges feltételét. A nyolcadik fejezetben az $\mathbb{R}^n$ vektortérrel kapcsolatos alapvető fogalmakkal és az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációival (az n-dimenziós tenzorokkal) foglalkozunk.

1. fejezet

Algebrai struktúrák

1.1. Definíció *Tetszőleges A és B halmazok (ebben a sorrendben vett) Descartes-szorzatán értjük az*

$$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A, b \in B\}$$

halmazt, azaz az olyan rendezett párok halmazát, amelyekben az első helyen tetszőleges A-beli, a második helyen pedig tetszőleges B-beli elem áll. Az $A \times A$ szorzatot A^2-tel fogjuk jelölni. Tetszőleges $n \geq 2$ egész szám esetén A^n jelöli az $A^{n-1} \times A$ halmazt. Az A^n elemei tulajdonképpen az A elemeiből képezett rendezett elem n-esek (azaz n-elemű sorozatok) halmaza, ahol n pozitív egész szám (A^1 az A-t jelöli).

A művelet fogalma

1.2. Definíció *Egy A halmazon értelmezett n-változós műveleten (n pozitív egész szám) az A^n halmaznak az A halmazba való egyértelmű leképezését értjük. Az A halmaz egy elemének kijelölését nullváltozós műveletnek nevezzük.*

Az algebrai struktúra fogalma

1.3. Definíció *Algebrai struktúrán olyan nem üres halmazt értünk, amelyen értelmezve van legalább egy művelet. Algebra struktúrán tehát egy olyan $(A; \Omega)$ párost értünk, ahol A egy nem üres halmaz, Ω pedig az A-n értelmezett műveletek halmazát jelöli. Az A halmazt az algebrai struktúra alaphalmazának is szoktuk nevezni.*

Például, $(A; +, *)$ olyan algebrai struktúrát jelöl, amelynek alaphalmaza egy A halmaz, és ezen a halmazon két művelet van értelmezve; az $+$ és a $*$ műveletek. Így Ω olyan kételemű halmaz, amelynek elemei a $+$ és $*$ műveleti jelek, azaz $\Omega = \{+, *\}$.

1.4. Megjegyzés Ebben a jegyzetben csak kétváltozós műveletekkel fogunk foglalkozni, ezért a továbbiakban a művelet kifejezés mindig egy kétváltozós műveletet fog jelenteni. Kétváltozós f művelet esetén valamely $(x, y) \in A^2$ elempárhoz hozzárendelt f-szerinti A-beli elemet $f(a, b)$ helyett afb módon jelöljük (például: $a + b$, $a * b$ vagy $a \cdot b$).

Kétváltozós műveletet sok esetben (például véges halmazon értelmezett műveletek esetén) táblázattal, az un. Cayley-féle művelettáblázattal is meg lehet adni. Az alábbiakban egy ilyen esetet szemléltetünk. Ha egy kételemű $A = \{a, b\}$ halmazon egy $*$ művelet van értelmezve mégpedig úgy, hogy $a * a = a$. $a * b = a$, $b * a = a$, $b * b = b$, akkor az ennek megfelelő Cayley-féle művelettáblázat a következő:

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

A táblázat jobb alsó része 2 sorból és 2 oszlopból áll. Ebben az A halmaz mindkét elemhez tartozik egy-egy sor és egy-egy oszlop (az első sor az a elem sora, a második sor a b elem sora, az első oszlop az a elem oszlopa, a második oszlop a b elem oszlopa), és ezek metszetében a sorhoz, illetve az oszlophoz tartozó elemeknek a $*$ művelet szerini eredménye van feltüntetve. Például az a elem sorának és a b elem oszlopának metszetében azért szerepel b, mert $a * b = b$.

A félcsoport és a csoport fogalma

1.5. Definíció *Azt mondjuk, hogy egy A halmazon értelmezett $*$ művelet asszociatív, ha minden $a, b, c \in A$ elemhármas esetén $a * (b * c) = (a * b) * c$ teljesül.*

1.6. Definíció *Ha egy A halmazon értelmezett $*$ műveletre teljesül, hogy tetszőleges $a, b \in A$ elemek esetén $a * b = b * a$, akkor akkor azt mondjuk, hogy a $*$ művelet kommutatív.*

1.7. Definíció *Egy egyműveletes $(S;*)$ algebrai stuktúrát félcsoportnak nevezünk, ha a $*$ művelet asszociatív. Ha a $*$ művelet ezen felül még kommutatív is, akkor kommutatív félcsoportról beszélünk.*

Jól ismert példák kommutatív félcsoportokra:

(1) $(N;+)$, azaz a nemnegatív egész számok additív félcsoportja,

(2) $(N;\cdot)$, azaz a nemnegatív egész számok multiplikatív félcsoportja,

(3) $(Z;\cdot)$, azaz az egész számok multiplikatív félcsoportja.

Könnyen ellenőrízhető, hogy a

$*$	a	b
a	a	a
b	b	b

Cayley-féle művelettáblázattal megadott művelet asszociatív, azaz az $A = \{a, b\}$ kételemű halmaz a táblázattal definiált műveletre nézve félcsoportot alkot.

1.8. Definíció *Egy $(S;*)$ félcsoport e elemét neutrális elemnek nevezzük, ha minden $s \in S$ elemre $e * s = s * e = s$ teljesül.*

1.9. Megjegyzés A neutrális elemet a szorzás művelete esetén egységelemnek, az összeadás művelete esetén pedig nullelemnek nevezzük. Tehát, ha egy S halmazon értelmezett művelet a szorzás, akkor az S egy e eleme akkor egységelem, ha minden S-beli a elemre teljesül az $e \cdot a = a \cdot e = a$ egyenlőség. Ha egy S halmazon értelmezett művelet az összeadás, akkor az S egy 0 eleme akkor nullelem, ha S minden a elemére teljesül az $a + 0 = 0 + a = a$ egyenlőség.

Az előző példában szereplő mindhárom félcsoportnak van neutrális eleme. Az $(N;+)$ additív félcsoportnak 0 a neutrális eleme, azaz a nulleleme. Az $(N;\cdot)$ és $(Z;\cdot)$ félcsoportok esetén az 1 szám a neutrális elem, azaz az egységelem.

1.10. Definíció *Egy e neutrális elemű $(S;*)$ félcsoport a' elemét az $a \in S$ elem inverzének nevezzük, ha $a' * a = a * a' = e$ teljesül.*

1.11. Megjegyzés Az előző definícióban szereplő a' elemet a szorzás művelete esetén az a elem reciprokának is szoktuk nevezni és a^{-1} módon is szoktuk jelölni. Tehát $a^{-1} \in S$ az az elem, amelyre (az $a \in S$ elemmel együtt) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ teljesül. Az összeadás művelete esetén az a' elemre az a elem ellentettje kifejezést haszáljuk és $-a$ módon jelöljük. Tehát $-a \in S$ az az elem, amelyre (az $a \in S$ elemmel együtt) $a+(-a) = (-a) + a = 0$ teljesül.

1.12. Definíció *Akkor mondjuk, hogy egy $G \neq \emptyset$ halmaz csoportot alkot egy $*$ műveletre nézve, ha*

(1) a $*$ művelet asszociativ,

(2) van G-nek neutrális eleme, és

(3) G minden elemének van inverze (G-ben).

1.13. Megjegyzés Ha a művelet a szorzás, akkor az előző definícióban szereplő (2) és (3) feltételeket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy van G-nek egységeleme (azaz olyan e eleme, amelyre $e \cdot g = g \cdot e = g$ teljesül minden $g \in G$ elemre), és G minden elemének van reciproka (azaz minden $g \in G$ elemhez van olyan $g^{-1} \in G$ elem, amelyre $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ teljesül).

Ha a művelet az összeadás, akkor a (2) és (3) feltételeket úgy is meg lehet fogalmazni, hogy van G-nek nulleleme (azaz olyan 0 eleme, amelyre $0 + g = g + 0 = g$ teljesül minden $g \in G$ elemre), és G minden elemének van ellentettje (azaz mindeg $g \in G$ elemhez van olyan $-g \in G$ elem, amelyre $g + (-g) = (-g) + g = 0$ teljesül).

Jól ismert példák csoportokra:

(1) $(Z; +)$, azaz az egész számok additív csoportja, amelyben 0 a neutrális elem (azaz a nullelem), és egy a egész szám inverze (azaz az ellentettje) a $-a$ egész szám.

(2) $(Q \setminus \{0\}; \cdot)$, azaz a nullától különböző racionális számok multiplikatív csoportja, amelyben 1 a neutrális elem (azaz az egységelem), és egy $r \neq 0$ racionális szám inverze (azaz a reciproka) az ugyancsak nem nulla $1/r$ racionális szám.

A gyűrű és a test fogalma

1.14. Definíció *Legyen R olyan nem üres halmaz, amelyen értelmezve van egy $+$ összeadás és egy $\cdot$ szorzás művelet. Azt mondjuk, hogy R erre a két műveletre nézve gyűrűt alkot, ha*

(1) $(R;+)$ egy kommutatív csoport,

(2) $(R;\cdot)$ egy félcsoport,

(3) A $\cdot$ művelet mindkét oldalról disztributív az $+$ műveletére nézve, azaz, $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ és $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ teljesül minden $a,b,c \in R$ elemre.

Egy olyan gyűrűt, amelyben a szorzás kommutatív is, kommutatív gyűrűnek nevezünk.

1.15. Megjegyzés Tehát egy kétműveletes $(R;+,\cdot)$ algebrai struktúra gyűrű, ha

(1) az $+$ összeadás művelete asszociatív, azaz $a+(b+c) = (a+b)+c$ teljesül minden $a,b,c \in R$ elemre,

(2) az összeadás kommutatív, azaz $a+b = b+a$ teljesül minden $a,b \in R$ elemre,

(3) R-nek van nulleleme, azaz tartalmaz olyan 0 elemet, hogy $a+0 = 0+a = a$ teljesül minden $a \in R$ elemre,

(4) R minden a elemének van ellentettje, azaz olyan $-a$ elem, amelyre $a+(-a) = (-a)+a = 0$ teljesül,

(5) a $\cdot$ szorzás művelete asszociatív, azaz $a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$ teljesül minden $a,b,c \in R$ elemre,

(6) a szorzás disztributív mindkét oldalról az összeadásra nézve, azaz $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ és $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$ teljesül minden $a,b,c \in R$ elemre.

1.16. Megjegyzés Könnyen ellenőrízhető, hogy $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, $(\mathbb{Q};+,\cdot)$, $(\mathbb{R};+,\cdot)$ egy-egy példa gyűrűre. Ezek mindegyike kommutatív és egységelemes.

További példa gyűrűre Legyen $m \geq 2$ egy egész szám, és legyen $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. Definiáljunk a $\mathbb{Z}_m$ halmazon egy összeadást és egy szorzást a következőképpen. Ha x és y tetszőleges $\mathbb{Z}_m$-beli elemek, akkor összegük (szorzatuk) legyen egyenlő a következővel: számítsuk ki az x és y szokásos összegét (szorzatát), majd nézzük meg, hogy mivel egyenlő ennek az összegnek (szorzatnak) az m-mel való maradékos osztásánál keletkezett maradéka. Legyen ez a maradék a végeredmény. Ha pl. $m = 3$, akkor a $\mathbb{Z}_3$ halmazon értelmezett összeadás és szorzás művelettáblái a következők:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Itt nem foglalkozunk vele, de megmutatható, hogy $\mathbb{Z}_m$ gyűrűt alkot a fentebb részletezett összeadásra és szorzásra nézve. Ezt szoktuk az egészek modulo m maradékosztály gyűrűjének nevezni.

1.17. Megjegyzés *Ha 0 jelöli egy R gyűrű nullelemét, akkor tetszőleges $r \in R$ elemre $0 \cdot r = (0+0) \cdot r = 0 \cdot r + 0 \cdot r$ teljesül, és így (mindkét oldalhoz hozzáadva a $0r$ elem ellentettjét) $0 = 0r$ adódik. Hasonlóan, $r \cdot 0 = 0$. Ha egy R gyűrű csak egy elemet tartalmaz (a 0 nullelemet), akkor ez az R egységeleme is. Ha R legalább két elemet tartalmaz, akkor a nulleleme nem lehet egységelem is, mert ahhoz $0 \cdot a = a$-nak kellene teljesülni tetszőleges $a \neq 0$ elemre, ami viszont az előzőek miatt lehetetlen. Ha egy legalább kételemű gyűrű tartalmaz egységelemet (ami nem lehet az R nulleleme), akkor 0-nak nem lehet R-ben inverze, amiből következik, hogy nincs olyan legalább kételemű R gyűrű, amelyben minden elemnek létezne (a szorzásra nézve) inverze.*

1.18. Definíció *Egy legalább kételemű $(F : +, \cdot)$ kommutatív gyűrűt testnek nevezünk, ha F-nek van e egységeleme (azaz olyan elem, amelyre $r \cdot e = e \cdot r = r$ teljesül minden $r \in F$ elem esetén), és F minden 0-tól különböző elemének van R-ben inverze (más szóval: reciproka).*

1.19. Megjegyzés Tehát egy legalább kételemű, kétműveletes $(F; +, \cdot)$ algebrai struktúra test, ha

(1) az $+$ összeadás művelete asszociatív, azaz $a + (b + c) = (a + b) + c$ teljesül minden $a, b, c \in F$ elemre,

(2) az összeadás kommutatív, azaz $a + b = b + a$ teljesül minden $a, b \in F$ elemre,

(3) F-nek van nulleleme, azaz tartalmaz olyan 0 elemet, hogy $a+0 = 0+a = a$ teljesül minden $a \in F$ elemre,

(4) F minden a elemének van ellentettje, azaz olyan $-a$ elem, amelyre $a + (-a) = (-a) + a = 0$ teljesül,

(5) a $\cdot$ szorzás művelete asszociatív, azaz $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ teljesül minden $a, b, c \in F$ elemre,

(6) a szorzás művelete kommutatív, azaz $a \cdot b = b \cdot a$ teljesül minden $a, b \in F$ elemre,

(7) F-nek van egységeleme, azaz tartalmaz olyan e elemet, hogy $a \cdot e = e \cdot a = a$ teljesül minden $a \in F$ elemre,

(8) F minden $a \neq 0$ elemének van inverze (reciproka), azaz olyan a^{-1} elem, amelyre $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ teljesül,

(9) a szorzás disztributív mindkét oldalról az összeadásra nézve, azaz $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ és $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ teljesül minden $a, b, c \in F$ elemre.

Az előzőek alapján megfogalmazható a test fogalmának egy, az előzővel ekvivalens definíciója.

1.20. Definíció *A test olyan legalább kételemű gyűrű, amelyben a nem nulla elemek egy kommutatív csoportot alkotnak a szorzásra nézve.*

1.21. Megjegyzés $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$, $(\mathbb{R}; +, \cdot)$ és $(\mathbb{C}; +, \cdot)$ egy-egy példa testre. További példa testre: Legyen p egy prím szám. Megmutatható, hogy a $\mathbb{Z}_p$ maradékosztály gyűrű test.

Megjegyezzük, hogy a továbbiakban egy test elemei közé a szorzás jelét nem fogjuk kiírni, azaz $a \cdot b$ helyett ab-t írunk.

2. fejezet

Lineáris tér (vektortér)

A térbeli vektor fogalma már ismert. Szó volt a térbeli vektorok összegéről és valós számokkal (azaz a valós számok testéhez tartozó elemekkel) való szorzásáról is. Ismert tény, hogy a térbeli vektorok halmaza kommutatív csoportot alkot a térbeli vektorok szokásos összeadására nézve, továbbá tetszőleges $\underline{a}$ és $\underline{b}$ térbeli vektorokra, valamint tetszőleges α, β valós számokra teljesülnek az alábbiak

$$\alpha(\underline{a}+\underline{b}) = \alpha\underline{a}+\alpha\underline{b},$$

$$(\alpha+\beta)\underline{a} = \alpha\underline{a}+\beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a})$$

$$1\underline{a} = \underline{a}.$$

Hasonló konstrukciót szemléltet a következő példa. Jelölje $\mathbb{R}^n$ a valós számokból képezett n-elemű sorozatok halmazát. Az $\mathbb{R}^n$ halmazról igen egyszerűen belátható, hogy kommutatív csoportot alkotnak a számsorozatok szokásos összeadására nézve, azza az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{bmatrix}$$

összeadásra nézve. Definiálhatjuk egy α valós számnak egy $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ sorozattal való szorzatát a következőképpen:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}.$$

Megmutatható, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ sorozatokra, valamint tetszőleges α, β valós számokra teljesülnek az alábbiak

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$

$$(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a})$$

$$1\underline{a} = \underline{a}.$$

A matematikában számos egyéb helyen is találkozunk olyan konstrukcióval, ahol egy $(V; +)$ kommutatív csoport és egy $\mathbb{F}$ test elemei között értelezve van egy szorzás (skalárral való szorzás) úgy, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V$ és $\alpha, \beta \in F$ elemekre teljesül a fenti négy feltétel (a negyedikben 1 az $\mathbb{F}$ test egységelemét jelöli). Ebben a fejezetben ilyen konstrukciókkal foglalkozunk.

2.1. A vektortér fogalma

2.1. Definíció *Akkor mondjuk, hogy egy $(V; +)$ kommutatív csoport vektorteret alkot egy $\mathbb{F}$ test felett, ha tetszőleges $(\alpha, \underline{a}) \in \mathbb{F} \times V$ elempárhoz hozzá van rendelve egyértelműen a V egy $\alpha\underline{a}$ módon jelölt eleme úgy, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ és $\underline{a}, \underline{b} \in V$ elemek esetén az alábbi egyenlőségek teljesülnek:*

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$

$$(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a}),$$

$$1\underline{a} = \underline{a},$$

ahol 1 az $\mathbb{F}$ test egységelemét jelöli.

Kicsit részletesebben: Legyen adott egy $(V;+)$ kommutatív csoport, azaz egy olyan algebrai stuktúra amelyben

- az összeadás asszociatív, azaz $\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})=(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}$ teljesül minden $\underline{a},\underline{b},\underline{c}\in V$ elemre,
- az összeadás kommutatív, azaz $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$ teljesül minden $\underline{a},\underline{b}\in V$ elemre,
- van nullelem, azaz van olyan $\underline{0}$ elem, hogy $\underline{a}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{a}$ teljesül minden $\underline{a}\in V$ elemre,
- minden $\underline{a}\in V$ elemnek van ellentettje, azaz olyan $-\underline{a}\in V$ elem, hogy $\underline{a}+(-\underline{a})=(-\underline{a})+\underline{a}=\underline{0}$ teljesül.

Legyen adott továbbá egy $\mathbb{F}$ test (például a racionális számok teste, vagy a valós számok teste, vagy a komplex számok teste).

Akkor mondjuk, hogy V vektorteret alkot $\mathbb{F}$ felett, ha értelmezve van tetszőleges V-beli $\underline{a}$ és tetszőleges $\mathbb{F}$-beli α elem esetén az $\underline{a}$-nak α-val való $\alpha\underline{a}$ módon jelölt V-beli szorzata úgy, hogy tetszőleges $\alpha,\beta\in F$ és $\underline{a},\underline{b}\in V$ elemek esetén az alábbi egyenlőségek teljesülnek:

- $\alpha(\underline{a}+\underline{b})=\alpha\underline{a}+\alpha\underline{b}$,
- $(\alpha+\beta)\underline{a}=\alpha\underline{a}+\beta\underline{a}$,
- $(\alpha\beta)\underline{a}=\alpha(\beta\underline{a})=\beta(\alpha\underline{a})$,
- $1\underline{a}=\underline{a}$.

Ha V vektortér $\mathbb{F}$ felett, akkor a V elemeit vektoroknak, az $\mathbb{F}$ elemeit pedig skalároknak is nevezzük. Az $\alpha\underline{a}$ szorzatra azt mondjuk, hogy az $\underline{a}$ vektornak az α skalárral képezett szorzata (vagy másképpen: az $\underline{a}$ vektor α skalárszorosa).

Példák vektorterekre:

(1) A bevezetőben leírtak alapján mondhatjuk, hogy a térbeli vektorok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett.

(2) Hasonlóan, az $\mathbb{R}^n$ halmaz is vektorteret alkot a valós számok teste felett.

(3) Megmutatható, hogy (az $\mathbb{R}^n$ mintájára) tetszőleges $\mathbb{F}$ test segítségével képezett $\mathbb{F}^n$ halmaz vektorteret alkot az $\mathbb{F}$ test felett.

(4) Egy F test elemeiből képezett egyváltozós polinomok $F[x]$ halmaza vektorteret alkot F felett.

(5) Egy x_0 pontban differenciálható egyváltozós valós függvények halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett.

(6) Egy egyelemű $(V;+)$ csoport (amelynek eleme a csoport nulleleme) tetszőleges test felett vektorteret alkot.

2.2. Tétel *Egy F test feletti V vektortérben $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\underline{a} = \underline{0}$ vagy $\alpha = 0$.*

Bizonyítás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha $\underline{a} = \underline{0}$ vagy $\alpha = 0$, akkor $\alpha\underline{a} = \underline{0}$.

Legyen $\underline{a} \in V$ tetszőleges vektor. Akkor

$$0\underline{a} = (0+0)\underline{a} = 0\underline{a} + 0\underline{a},$$

amiből

$$0\underline{a} = \underline{0}$$

következik.

Legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Akkor

$$\alpha\underline{0} = \alpha(\underline{0} + \underline{0}) = \alpha\underline{0} + \alpha\underline{0},$$

amiből

$$\alpha\underline{0} = \underline{0}$$

következik.

A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\alpha\underline{a} = \underline{0}$ teljesül valamely $\alpha \in F$ skalárra és $\underline{a} \in V$ vektorra. Elegendő megmutatni, hogy ha $\alpha \neq 0$, akkor $\underline{a} = \underline{0}$. Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 0$. Akkor

$$\underline{a} = 1\underline{a} = (\frac{1}{\alpha}\alpha)\underline{a} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\underline{a}) = \frac{1}{\alpha}\underline{0} = \underline{0},$$

felhasználva a vektortér definíciójában szereplő negyedik azonosságot és a fentebb már bizonyítottakat. $\square$

2.3. Tétel *Egy F test feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}$ vektorára és tetszőleges $\alpha \in F$ skalárra, $\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}$, ahol $-\underline{a}$ az $\underline{a}$ vektor ellentettjét jelöli.*

Bizonyítás. A 2.2. Tétel és a vektortér definíciójában szereplő első azonosság felhasználásával,

$$\underline{0} = \alpha\underline{0} = \alpha(\underline{a} + (-\underline{a})) = \alpha\underline{a} + \alpha(-\underline{a}),$$

amiből

$$\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a})$$

adódik.

A 2.2. Tétel és a vektortér definíciójában szereplő második azonosság felhasználásával,

$$\underline{0} = 0\underline{a} = (\alpha + (-\alpha))\underline{a} = \alpha\underline{a} + (-\alpha)\underline{a},$$

amiből

$$-(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}$$

adódik. Tehát

$$\alpha(-\underline{a}) = -(\alpha\underline{a}) = (-\alpha)\underline{a}.$$

□

2.4. Definíció *Egy $\mathbb{F}$ test feletti V vektortér*

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$$

vektorainak az

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

skalárokkal képezett lineáris kombinációján az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n \in V$$

vektort értjük. Akkor mondjuk, hogy egy $b \in V$ vektor előáll az

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in V$$

vektorok lineáris kombinációjaként, ha megadhatók olyan

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$$

skalárok, amelyekkel teljesül a

$$\underline{b} = \alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n$$

egyenlőség.

2.2. Vektorok lineáris függetlensége és függősége

2.5. Megjegyzés A 2.2. Tétel alapján tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok esetén

$$0\underline{a}_1 + \cdots + 0\underline{a}_n = \underline{0},$$

azaz a 0 skalárokkal képezett lineáris kombináció eredményeként a nullvektort kapjuk. A vektorterek elméletében fontos szerepet játszanak azok a vektorok, amelyeknél nincs is más lineáris kombináció, amely eredményeként a nullvektor adódik.

2.6. Definíció *Egy F test feletti V vektortér*

$$\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$$

vektorairól azt mondjuk, hogy lineárisan függetlenek, ha az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}$$

egyenlőségből

$$\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$$

következik. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Ez utóbbi annyit jelent, hogy megadhatók olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ skalárok, amelyek között van legalább egy nem-nulla, s amelyekre fennáll az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}$$

egyenlőség.

2.7. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer bármely nem-üres részrendszere is lineárisan független.*

Bizonyítás. Ha az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ lineárisa független vektorrendszernek $\{\underline{a}_{i_1}, \ldots, \underline{a}_{i_k}\}$ egy nem-üres lineárisan függő részrendszere, azaz

$$\alpha_{i_1}\underline{a}_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_k}\underline{a}_{i_k} = \underline{0}$$

úgy is teljesül valamely $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ skalárokkal, hogy közöttük van nullától különböző, akkor ezt a lineáris kombinációt úgy kiegészítve, hogy a benne nem szereplő $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$-beli vektorokat is beírjuk 0 együtthatókkal, akkor az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszernek olyan lineáris kombinációját kapjuk, amely a nullvektorral egyenlő, de a benne szereplő együtthatók között van olyan, amelyik nem nulla. Ez viszont ellentmond annak, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független. □

2.8. Megjegyzés A vektorok lineáris függetlenségének definíciójában (2.6. Definíció) csak véges sok vektorból álló vektorrendszer lineáris függetlenségét definiáltuk, mert főleg ezzel a fogalommal foglalkozunk, de megjegyezzük, hogy a vektorok lineáris függetlensége vektorok tetszőleges számosságú (nem-üres) részhalmazára is értelmezhető. Egy F test feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges (nem-üres) vektorrendszerét lineárisan függetlennek nevezzük, ha annak bármely (nem-üres) véges részredszere lineárisan független.

2.9. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer nem tartalmazza a nullvektort.*

Bizonyítás. Mivel a nullvektor lineárisan függő, ezért a 2.7. Tétel szerint nem lehet eleme egy lineárisan független vektorrendszernek. □

2.10. Tétel *Lineárisan független vektorrendszer páronként különböző vektorokból áll.*

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $\underline{a}$ vektor esetén

$$1\underline{a} + (-1)\underline{a} = \underline{0},$$

ezért az $\{\underline{a}, \underline{a}\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Így a 2.7. Tétel miatt egy lineárisan független vektorrendszer a vektortér valamely vektorát vagy nem tartalmazza, vagy ha tartalmazza, akkor pontosan egyszer. □

2.11. Tétel *Ha $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ egy F test feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere, akkor a V bármely vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ egy F test feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere. Tegyük fel, hogy

$$\alpha\underline{a}_1 + \dots \alpha_n\underline{a}_n = \beta_1\underline{a}_1 + \dots + \beta_n\underline{a}_n.$$

Akkor

$$(\alpha_1 - \beta_1)\underline{a}_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{a}_n = \underline{0},$$

amiből

$$\alpha_i - \beta_i = 0,$$

azaz

$$\alpha_i = \beta_i$$

következik minden $i = 1, \dots, n$ indexre. $\square$

2.12. Tétel *Ha $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ egy F test feletti V vektortér lineárisan független vektorrendszere, $\underline{b}$ pedig a vektortér olyan vektora, amely nem állítható elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, akkor az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer lineárisan független.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n + \beta\underline{b} = \underline{0}$$

valamely $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{F}$ skalárokkal. Mivel $\underline{b}$ nem állítható elő az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként, ezért $\beta = 0$. Ekkor viszont

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}.$$

Mivel az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, ezért $\alpha_i = 0$ minden $i = 1, \dots, n$ indexre. Mivel minden együttható egyenlő a nullával, ezért az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer lineárisan független.

2.13. Tétel *Egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha az $\underline{a}$ vektor a nullvektor. Legalább kételemű vektorendszer akkor és csak akkor lineárisan függő, ha legalább egyikük előállítható a redszerthez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer lineárisan függő. Akkor van olyan $0 \neq \alpha \in F$ skalár, hogy $\alpha\underline{a} = 0$. A 2.2. Tétel miatt ekkor az adódik, hogy a a nullvektor. Fordítva, ha a a nullvektor, akkor (ugyancsak a 2.2. Tétel miatt) $1\underline{a}$ a nullvektor, és így a nullvektor lineárisan függő.

Foglalkozzunk ezek után a legalább két elemet tartalmazó vektorrendszerekkel. Tegyük fel, hogy egy $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer ($n \geq 2$) lineárian függő. Akkor megadhatók olyan $\alpha 1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalárok, hogy

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0},$$

és (például) $\alpha_1 \neq 0$. Akkor

$$\underline{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\underline{a}_2 + \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\underline{a}_n,$$

azaz az $\underline{a}_1$ vektort ki lehet fejezni a rendszert alkotó többi vektor lineáris kombinációjaként.

Fordítva, tegyük fel, hogy valamelyiket (például $\underline{a}_1$-et) ki lehet fejezni a többiek lineáris kombinációjaként:

$$\underline{a}_1 = \beta_2 \underline{a}_2 + \cdots + \beta n \underline{a}_n.$$

Akkor

$$\underline{0} = -\underline{a}_1 + \beta_2 \underline{a}_2 + \cdots + \beta n \underline{a}_n,$$

azaz van a rendszert alkotó vektoroknak olyan lineáris kombinációja, amelynek eredményeként a nullvektor adódik, de az együtthatók között van nem nulla (ugyanis, az $\underline{a}_1$ együtthatója -1). Tehát a vizsgált vektorrendszer lineárisan függő. □

A 2.13. Tétel alapján nyílvánvaló a következő tétel állítása.

2.14. Tétel *Egy egyelemű $\{\underline{a}\}$ vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha az $\underline{a}$ vektor nem a nullvektor. Legalább kételemű vektorendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha a redszert alkotó vektorok egyikét sem lehet kifejezni a rendszerhez tartozó többi vektor lineáris kombinációjaként.*

2.15. Definíció *Egy V vektortér $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ lineárisan független vektorrendszerről azt mondjuk, hogy maximálisan lineárisan független, ha V tetszőleges b vektora esetén a $\{b, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan függő, azaz az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszert a V akármelyik vektorával egészíjük ki, lineárisan függő vektorrendszert kapunk.*

2.3. Generátorrendszer, bázis, dimenzió

2.16. Definíció *Egy F test feletti V vektortér $\{\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n\}$ vektorrendszerét a V vektortér egy generátorrendszerének nevezzük, ha V minden vektora előáll az $\underline{g}_1, \dots, \underline{g}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

2.17. Megjegyzés A generátorrendszer fogalmát csak véges sok vektorból álló vektorrendszerre értelmeztük, de megjegyezzük, hogy tetszőleges számosságú (nemüres) vektorrendszerre is értelmezhető. Egy F test feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges (nem-üres) $\mathcal{G}$ vektorrendszerét a vektortér generátorrendszerének nevezzük, ha a V vektortér bármely $\underline{v}$ vektorához megadható $\mathcal{G}$-nek olyan véges részrendszere, amelyhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként előállítható a $\underline{v}$ vektor. Jó példa erre egy F test feletti egyváltozós polinomok vektortere, amelyben az $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok generátorrendszert alkotnak.

2.18. Definíció *Egy F test feletti V vektortér $\{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_n\}$ generátorrendszerét minimális generátorrendszernek nevezzük, ha bárhogy is hagyunk el ebből a rendszerből vektorokat, akkor vagy az üres halmazt kapjuk, vagy a keletkezett vektorrendszer már nem generátorrendszer.*

2.19. Tétel *(Kicserélési tétel) Ha $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ egy lineárisan független vektorrendszere, $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$ pedig egy generátorrendszere egy F test feletti V vektortérnek, akkor bármely f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorhoz van olyan g_j vektor, hogy az*

$$\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_{i-1}, \underline{g}_j, \underline{f}_{i+1} \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független.

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy $dimV \geq 1$. Ekkor a generátorrendszer tartalmaz legalább egy nem nullvektort. Így, ha $n = 1$, akkor a független vektorrendszer vektora helyére beírva a generátorrendszer egy nem nulla vektorát, egy lineárisan független vektorrendszert kapunk. Így a továbbiakban feltehetjük, hogy $n \geq 2$. Tegyük fel, indirekt módon, hogy van olyan $\underline{f}_i$ vektor (legyen ez, például, az $\underline{f}_1$ vektor), amelyet bármelyik $\underline{g}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ vektorral is cserélünk ki, a cserével keletkezett

$$\underline{g}_j, \ldots, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan függő. Akkor minden $j = 1, \ldots, m$ esetén vannak olyan $\beta_j, \alpha_{i,j}$ $(i = 2, \ldots, n)$ skalárok, hogy

$$\beta_j \underline{g}_j + \alpha_{2,j} \underline{f}_2 + \cdots + \alpha_{n,j} \underline{f}_n = \underline{0},$$

de az együtthatók között van olyan, amelyik nem a nulla. Mivel az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független (mert az

$$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

lineárisan független vektorrendszer nem üres részrendszere), ezért $\beta_j \neq 0$ tetszőleges $j = 1, \ldots, m$ index esetén. Tehát $\underline{g}_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ kifejezhető az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorok lineáris kombinációjaként. Mivel a

$$\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$$

vektorrendszer generátorrendszer, ezért $\underline{f}_1$ kifejezhető a

$$\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$$

vektorok, és így az

$$\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineáris kombinációjaként. Ez viszont azt jelenti, hogy az

$$\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan függő. Ez ellentmondás. Így az indirekt állítás nem helyes, azaz a tétel állítása az igaz. □

2.20. Tétel *Ha $\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n$ egy lineárisan független vektorrendszere, $\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_m$ pedig egy generátorrendszere egy F test feletti V vektortérnek, akkor $n \leq m$.*

Bizonyítás. Az $\underline{f}_1$ vektorhoz van olyan vektor (pl. $\underline{g}_1$) úgy, hogy

$$\underline{g}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n$$

lineárisan független vektorrendszer. Az $\underline{f}_2$-höz is van olyan vektor a generátorrendszerben, amit $\underline{f}_2$ helyébe írva, lineárisan független vektorrendszert kapunk. Ebben a $\underline{g}_2$

nem fordulhat elő kétszer, ezért ez a vektor nem egyenlő $\underline{g}_1$-gyel. Feltehetjü (az indexek esetleges felcserélése után), hogy ez a vektor a $\underline{g}_2$ vektor, azaz a

$$\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{f}_3, \cdots, \underline{f}_n$$

vektorrendszer lineárisan független. Mivel azt az eljárást folytathatjuk mindaddig, amig a független vektorrendszer vektorai el nem fogynak, ezért $n \leq m$. □

2.21. Definíció *Egy F test feletti V vektortér $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ vektorrendszerét a V vektortér egy bázisának nevezzük, ha V minden vektora előáll egyértelműen az $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként.*

Ha $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ egy F test feletti V vektortér bázisa, akkor tetszőleges $\underline{a} \in V$ vektorhoz van egy és csak egy F-beli elemekből álló olyan $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ elemsorozat, amelyre $\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$ teljesül. Az $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárokat az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázisra vonatkozó koordinátáinak nevezzük.

2.22. Tétel *Egy F test feletti V vektortér valamely nemüres vektorrendszere akkor és csak akkor bázis, ha független generátorrendszer.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer egy bázis. Akkor a tér minden vektora előállítható (egyértelműen) a benne levő vektorok lineáris kombinációjaként, és így a vektorrendszer a vektortér generátorrendszere. Mivel minden vektort, így a nullvektort is csak egyféleképpen lehet előállítani a rendszerben levő vektorok lineáris kombinációjaként. Viszont a nullvektorra érvényes a

$$0\underline{a}_1 + 0\underline{a}_2 + \cdots + 0\underline{a}_n = \underline{0}$$

előállítás, ezért tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalárok esetén az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{0}$$

feltételből

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

következik, azaz a vektorrendszer lineárisan független.

Fordítva, tegyük fel, hogy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ egy lineárisan független generátorrendszer. Akkor a vektortér minden vektora előáll a rendszerhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként. Tegyük fel, hogy valamely b vektorra érvényesek az

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \underline{b}$$

és

$$\alpha'_1\underline{a}_1 + \alpha'_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha'_n\underline{a}_n = \underline{b}$$

előállítások. Akkor

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n = \alpha'_1\underline{a}_1 + \alpha'_2\underline{a}_2 + \cdots + \alpha'_n\underline{a}_n,$$

amiből

$$(\alpha_1 - \alpha'_1)\underline{a}_1 + (\alpha_2 - \alpha'_2)\underline{a}_2 + \cdots + (\alpha_n - \alpha'_n)\underline{a}_n = \underline{0}$$

adódik. Mivel (a feltétel szerint) az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független, minden $i = 1, \ldots, n$ indexre $\alpha_i - \alpha'_i = 0$, azaz $\alpha_i = \alpha'_i$. Tehát minden vektort pontosan egyféleképpen lehet előállítani az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer bázis. $\square$

Bizonyítás nélkül mondjuk ki a következő tételt.

2.23. Tétel *Tetszőleges F test feletti $V \neq \{\underline{0}\}$ vektortér tetszőleges, nemüres vektorrendszere esetén a következő feltételek egymással ekvivalensek:*

1. *a vektorrendszer a V vektortér bázisa;*
2. *a vektorrendszer a V vektortér maximális független rendszere.*
3. *a vektorrendszer a V vektortér minimális generátorrendszere.*

2.24. Megjegyzés A bázis fogalmát csak véges sok vektorból álló vektorrendszerre értelmeztük, de megjegyezzük, hogy tetszőleges számosságú (nemüres) vektorrendszerre is értelmezhető. Egy F test feletti vektortér vektoraiból álló tetszőleges $\mathcal{B}$ vektorrendszerét a vektortér bázisának (pontosabban: Hamel-bázisának) nevezzük, ha a V vektortér bármely $\underline{v}$ vektorához megadható $\mathcal{G}$-nek egy és csak egy olyan véges részrendszere, amelyhez tartozó vektorok lineáris kombinációjaként egyértelműen előállítható a $\underline{v}$ vektor. Egy F test feletti egyváltozós polinomok vektorterében az $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok halmaza a vektortér egy Hamel-bázisa. Tetszőleges számosság esetén is érvényes, hogy a bázis fogalma egybeesik a független generátorrendszer fogalmával.

2.25. Tétel *Ha egy F test feletti vektortérnek van n elemű bázisa, akkor bármely bázisa n vektort tartalmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ és $\mathcal{B}'$ egy V vektortér egy-egy bázisa. Tegyük fel, hogy a $\mathcal{B}$ bázisban lévő vektorok száma n. Mivel $\mathcal{B}'$ generátorrendszer, ezért $\mathcal{B}'$-ben legalább n vektor van az előző tétel miatt. Ha $\mathcal{B}'$-ben n-nél több vektor lenne, akkor $\mathcal{B}'$ tartalmazna legalább $n+1$ vektorból álló lineárisan független rendszert. Mivel $\mathcal{B}$ egy n-elemű generátorrendszer, ezért minden (véges) lineárisan független vektorrendszerben legfeljebb n elem van, amiből az ellentmondó $n+1 \leq n$ egyenlőséghez jutunk. Tehát a $\mathcal{B}'$ ben lévő vektorok száma is n. □

2.26. Definíció *Legyen n pozitív egész szám. Egy F test feletti vektorteret n-dimenziós vektortérnek nevezünk, ha V ben van n-elemű bázis. Az egyetlen vektorból (csak a nullvektorból) álló vektortér dimenzióján 0-át értünk. Ha egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortér nem tartalmaz véges bázist akkor azt mondjuk, hogy a vektortér végtelen dimenziós.*

2.27. Megjegyzés *Bizonyítható, hogy egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortérnek akkor és csak akkor van véges bázisa, ha van véges generátorrendszere. Így egy (nem csak a nullvektorból álló) vektortér akkor és csak akkor végtelen dimenziós, ha nincs véges generátorrendszere.*

2.28. Tétel *Legyen V egy F test feletti olyan vektortér, amelynek van véges bázisa. Akkor V bármely független vektorrendszere kiegészíthető V-beli vektorokkal úgy, hogy a kiegészítéssel keletkezett vektorrenszer a V egy bázisa. Más szavakkal: V minden független vektorrendszere benne van V egy bázisában.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a V vektortér tartalmaz egy n-elemű bázist. A 2.20. Tétel miatt minden független vektorrendszer legfeljebb n elemet tartalmaz. Legyen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ a V egy független vektorrendszere ($m \leq n$). Ha ez a vektorrendszer generátorrendszer, akkor a 2.22. Tétel szerint a vektortér bázisa; ekkor nincs mit bizonyítani. Tegyük fel, hogy nem bázis. Akkor van a V vektortérnek olyan $\underline{b}_{m+1}$ vektora, amely nem fejezhető ki a $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ vektorok lineáris kombinációjaként. A 2.12. Tétel miatt a $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}\}$ vektorok lineárisan függetlenek. Ha ez generátorrendszer, akkor a bizonyítással készen vagyunk. Ellenkező esetben (az előzőekhez hasonlóan igazolható, hogy) van olyan $\underline{b}_{m+2}$ vektora a vektortérnek, hogy a $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \underline{b}_{m+2}\}$ vektorrendszer lineárisan független. A gondolatmenetet folytatva, egyszer csak kapunk egy olyan $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszert, amely bázisát alkotja a V vektortérnek. □

Néhány példa:

- A térbeli vektorok vektorterének dimenziója 3.
- Tetszőleges $\mathbb{F}$ test feletti $\mathbb{F}^n$ vektortér dimenziója n: ebben a vektortérben az $\underline{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ vektorok a vektortér egy bázisát alkotják, ahol $\underline{e}_i$ az az n-elemű sorozat, amelyben az i-dik elem az $\mathbb{F}$ test egységeleme, azaz 1, a többi elem pedig az $\mathbb{F}$ test nulleleme, azaz 0.
- Egy $\mathbb{F}$ test feletti egyváltozós polinomok $\mathbb{F}[x]$ vektorterében az $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ polinomok a vektortér egy Hamel-bázisát alkotják. Így az $\mathbb{F}[x]$ vektortér végtelen dimenziós.

2.4. Vektortér altere

2.29. Definíció *Egy F test feletti V vektortér valamely $W \neq \emptyset$ részhalmazát a V vektortér egy alterének nevezzük ha W a V beli műveletre és a V elemeinek az F-beli skalárokkal való szorzására nézve vektorteret alkot F felett.*

2.30. Tétel *Egy F test feletti V vektortér valamely $W \neq \emptyset$ részhalmaza akkor és csak akkor altere a V vektortérnek, ha minden $\underline{a}, \underline{b} \in W$ és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárokra*

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W$$

teljesül.

Bizonyítás. Legyen W a V vektortér egy altere. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in W$ tetszőleges vektorok, α, β pedig tetszőleges skalárok. Akkor $\alpha\underline{a}, \beta\underline{b} \in W$ és így

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in W$ vektorokra és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárokra

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W$$

teljesül. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in W$ tetszőleges vektorok. Az $\alpha = 1$ és $\beta = 1$ választás mellett, $\underline{a} + \underline{b} \in W$, így W zárt a V-n értelmezett összeadásra nézve. Legyen $\underline{a} \in W$ tetszőleges vektor, $\alpha \in F$ pedig tetszőleges skalár. Akkor a $\underline{b} = \underline{0}$ és $\beta = 0$ választással:

$$\alpha\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W.$$

Így (felhasználva a 2.3. Tételt is), ha $\underline{a} \in W$, akkor

$$-\underline{a} = (-1)\underline{a} \in W.$$

Tehát W zárt az összeadásra nézve, és emellett minden általa tartalmatott vektorral együtt tartalmazza annak ellentettjét is. Ebből már következik, hogy W csoportot alkot a V-n értelmezett összeadásra nézve. A fentiekből az is adódik, hogy $\alpha\underline{a} \in W$ minden $\alpha \in F$ és minden $\underline{a} \in W$ esetén. Természetesen ezekből már következik az is, hogy tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ és $\underline{a}, \underline{b} \in W$ elemek esetén az alábbi egyenlőségek teljesülnek:

$$\alpha(\underline{a} + \underline{b}) = \alpha\underline{a} + \alpha\underline{b},$$

$$(\alpha + \beta)\underline{a} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{a},$$

$$(\alpha\beta)\underline{a} = \alpha(\beta\underline{a}) = \beta(\alpha\underline{a}),$$

$$1\underline{a} = \underline{a},$$

mivel ezek az egyenlőségek tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ és tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V$ elemekre teljesültek amiatt a feltétel miatt, hogy V vektortér F felett. Következésképpen W is vektortér az F test felett. □

2.5. Vektorrendszer rangja

2.31. Tétel *Egy V vektortér W_i $(i \in I)$ altereinek tetszőleges nem üres rendszere esetén $\cap_{i \in I} W_i$ is altere V-nek.*

Bizonyítás. Legyen W_i $(i \in I)$ egy V vektortér altereinek tetszőleges nem üres rendszere. Mivel a V nullvektora benne van a W_i alterek mindegyikében, ezért $\cap_{i \in I} W_i$ nem üres. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in \cap_{i \in I} W_i$ tetszőleges vektorok, α, β pedig tetszőleges skalárok. Akkor $\underline{a}, \underline{b} \in W_i$ minden $i \in I$ indexre teljesül, és ezért (a 2.30. Tételt is használva)

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in W_i$$

minden $i \in I$ indexre, azaz

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in \cap_{i \in I} W_i.$$

A 2.30. Tétel miatt ebből az adódik, hogy $\cap_{i \in I} W_i$ a V vektortér egy altere. □

2.32. Definíció *Egy V vektortér $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorai által generált alteren az őket tartalmazó összes altér metszetét értjük. Ez megegyezik az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorokat tartalmazó legszűkebb altérrel. Az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorai által generált alteret $< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >$ módon jelöljük.*

2.33. Tétel *Egy F test feletti V vektortér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektoraira*

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >= \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Bizonyítás. A 2.30. Tétel miatt

$$\{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\} \subseteq < \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n > .$$

Mivel $\{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}$ olyan altér, amely tartalmazza az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok mindegyikét, ezért

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n > \subseteq \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

Így

$$< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >= \{\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{a}_n : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F\}.$$

□

2.34. Definíció *Egy F test feletti V vektortér $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektoraiból álló vektorrendszer rangján az általuk generált $< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >$ altér dimenzióját értjük. Egy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer rangját $\rho(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ módon fogjuk jelölni.*

2.35. Megjegyzés Az világos, hogy egy vektorrendszer rangja nem függ a benne szereplő vektorok sorrendjétől.

2.36. Tétel *Egy vektorrendszer rangja megegyezik a közöttük levő lineárisan függetlenek számának maximumával.*

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F test feletti V vektortér tetszőleges vektorai. Legyen az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer rangja m, azaz m az általuk kifeszített

$$W =< \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n >$$

altér dimenziója. Legyen r az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok között levő lineárisan független vektorok számának maximuma. A 2.35. Megjegyzés szerint feltehetjük, hogy $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ lineárisan függetlenek (így páronként különböző) vektorok V-ben. Világos, hogy az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r\}$ vektorrendszer lineárisan független W-ben is, így $r \leq m$. Az is nyílvánvaló, hogy az $\underline{a}_{r+1}, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok mindegyike kifejezhető az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r$ vektorok lineáris kombinációjaként, és így az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_r\}$ vektorrendszer a W altér egy generátorrendszere. Ebből $m \leq r$ adódik, ami a fent bizonyított $r \leq m$ egyenlőtlenséggel együtt az $r = m$ egyenlőséget eredményezi. □

2.37. Tétel *Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha a benne szereplő vektorok valamelyikét megszorozzuk egy nem nulla skalárral.*

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ egy F test feletti V vektortér tetszőleges vektorai. Legyen $0 \neq \alpha \in F$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy

$$\rho(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \rho(\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n).$$

Ebből már következik a tétel állítása.

Mivel $\alpha\underline{a}_1 \in \langle\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle$, ezért

$$\langle\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle \subseteq \langle\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle.$$

Legyen

$$\underline{a} = \xi_1\underline{a}_1 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n \in \langle\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle$$

tetszőleges elem. Akkor

$$\underline{a} = (\frac{1}{\alpha}\xi_1)(\alpha\underline{a}_1) + \cdots + \xi_n\underline{a}_n$$

miatt

$$\underline{a} \in \langle\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle,$$

és ezért

$$\langle\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle \subseteq \langle\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle.$$

Tehát teljesül az

$$\langle\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle = \langle\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle$$

egyenlőség. Ebből már következik a

$$\rho(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \rho(\alpha\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$$

egyenlőség (lásd a 2.36. Tételt). $\square$

2.38. Tétel *Egy vektorrendszer rangja nem változik, ha a benne szereplő vektor valamelyikéhez hozzáadjuk egy tőle különböző, a vektorrendszerben szereplő vektor konstansszorosát.*

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ $(n \geq 2)$ egy F test feletti V vektortér tetszőleges vektorai. Legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Megmutatjuk, hogy

$$\rho(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n) = \rho((\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n).$$

Ebből már következik a tétel állítása.

Mivel $\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2 \in \langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle$, ezért

$$\langle (\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2 \ldots, \underline{a}_n \rangle.$$

Legyen

$$a = \xi_1\underline{a}_1 + \xi_2\underline{a}_2 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n \in \langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \rangle$$

tetszőleges elem. Akkor

$$\underline{a} = \xi_1\underline{a}_1 + (\alpha\xi_1 + \xi_2 - \alpha\xi_1)\underline{a}_2 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n =$$

$$\xi_1(\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2) + (\xi_2 - \alpha\xi_1)\underline{a}_2 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n$$

miatt

$$\underline{a} \in \langle (\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \rangle,$$

és ezért

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle \subseteq \langle (\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \rangle.$$

Tehát teljesül az

$$\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \rangle = \langle (\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n \rangle$$

egyenlőség. Ebből már következik a

$$\rho(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n) = \rho((\underline{a}_1 + \alpha\underline{a}_2), \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n)$$

egyenlőség (lásd a 2.36. Tételt). $\square$

2.6. A lineáris leképezések, vektorterek izomorfizmusa

2.39. Definíció *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való φ leképezését a V_1 vektortérnek a V_2-vektortérbe való lineáris leképezésének nevezzük, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ és tetszőleges $\alpha \in F$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}),$$

$$\varphi(\alpha \underline{a}) = \alpha \varphi(\underline{a}).$$

A V_1-ből V_2-be történő összes lineáris leképezés halmazát $Hom(V_1, V_2)$-vel fogjuk jelölni.

2.40. Tétel *Tetszőleges F test feletti V_1 és V_2 vektorterek esetén φ akkor és csak akkor lineáris leképezése V_1-nek V_2-be, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén*

$$\varphi(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \alpha \varphi(\underline{a}) + \beta \varphi(\underline{b})$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. Akkor tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén

$$\varphi(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \varphi(\alpha \underline{a}) + \varphi(\beta \underline{b}) = \alpha \varphi(\underline{a}) + \beta \varphi(\underline{b}).$$

Fordítva, tegyük fel, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való olyan leképezése, hogy tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ vektorok és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ skalárok esetén teljesül az

$$\varphi(\alpha \underline{a} + \beta \underline{b}) = \alpha \varphi(\underline{a}) + \beta \varphi(\underline{b})$$

egyenlőség. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok, és legyen $\alpha \in F$ tetszőleges skalár. Akkor

$$\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(1\underline{a} + 1\underline{b}) = 1\varphi(\underline{a}) + 1\varphi(\underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b}),$$

és

$$\varphi(\alpha \underline{a}) = \varphi(\alpha \underline{a} + 0\underline{b}) = \alpha \varphi(\underline{a}) + 0\varphi(\underline{b}) = \alpha \varphi(\underline{a}).$$

□

2.41. Megjegyzés *A 2.40. Tétel alapján, ha $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ egy F test feletti V vektortér bázisa, akkor tetszőleges*

$$a = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n \in V$$

vektor és V-nek valamely vektortérbe való φ lineáris leképezése esetén

$$\varphi(\underline{a}) = \alpha_1(\varphi(\underline{b}_1)) + \ldots \alpha_n(\varphi(\underline{b}_n)).$$

Ez és a következő tétel azt mutatja, hogy egy lineáris leképezés egyértelműen meg van határozva a vektortér egy bázisára való leszűkítése által.

2.42. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. A V_1 vektortér tetszőleges $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ bázisához és a V_2 vektortér tetszőleges $\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n$ vektorsorozatához megadható V_1-nek V_2-be való egy és csak egy olyan φ lineáris leképezése, amelyre*

$$\varphi(\underline{b}_i) = \underline{c}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

teljesül.

Bizonyítás. Tetszőleges

$$a = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n \in V_1$$

vektorra definiáljuk $\varphi(\underline{a})$-t a következőképpen:

$$\varphi(\underline{a}) = \alpha_1 \underline{c}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{c}_n.$$

Könnyen ellenőzízhető, hogy φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való olyan lineáris leképezése, amelyre teljesül a tételben szereplő $\varphi(\underline{b}_i) = \underline{c}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ feltétel. A 2.41. Megjegyzés szerint világos, hogy a feltételeket teljesítő lineáris leképezés egyértelműen meg van határozva. □

2.43. Tétel *Ha φ egy V_1 vektortérnek egy V_2 vektortérbe való lineáris leképezése, akkor φ a V_1 nullvektorához a V_2 nullvektorát rendeli.*

Bizonyítás. Jelölje $\underline{0}_1$, illetve $\underline{0}_2$ a V_1, illetve a V_2 nullvektorát. Akkor

$$\varphi(\underline{0}_1) = \varphi(\underline{0}_1 + \underline{0}_1) = \varphi(\underline{0}_1) + \varphi(\underline{0}_1).$$

Hozzáadva az egyenlőség mindkét oldalához a $\varphi(\underline{0}_1)$ vektor ellentettjét, a

$$\underline{0}_2 = \varphi(\underline{0}_1)$$

adódik. □

2.44. Definíció *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti tetszőleges vektorterek, és legyen φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való tetszőleges lineáris leképezése. A φ lineáris leképezés képterén a V_2 vektortér*

$$Im\varphi = \{\underline{b} \in V_2 : \ (\exists \underline{a} \in V_1) \ \varphi(\underline{a}) = \underline{b}\}$$

módon definiált részhalmazát, magterén pedig a V_1 vektortér

$$Ker\varphi = \{\underline{a} \in V_1 : \ \varphi(\underline{a}) = \underline{0}_2\}$$

módon definiált részhalmazát értjük, ahol $\underline{0}_2$ jelöli a V_2 vektortér nullvektorát.

2.45. Tétel *Ugyanazon F test feletti tetszőleges V_1 és V_2 vektorterek és tetszőleges $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés esetén $Im\varphi$ a V_2 vektortérnek, $Ker\varphi$ pedig a V_1 vektortérnek egy-egy altere.*

Bizonyítás. Az világos, hogy $Im\varphi \neq \emptyset$. Legyenek $\underline{b}_1$ és $\underline{b}_2$ az $Im\varphi$ tetszőleges vektorai. Akkor megadhatók olyan $\underline{a}_1, \underline{a}_2 \in V_1$ vektorok, amelyekre

$$\varphi(\underline{a}_1) = \underline{b}_1, \quad \text{és} \quad \varphi(\underline{a}_2) = \underline{b}_2$$

teljesül. Legyenek $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$\varphi(\alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2) = \alpha\varphi(\underline{a}_1) + \beta\varphi(\underline{a}_2) = \alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2,$$

amiből következik, hogy $\alpha\underline{b}_1 + \beta\underline{b}_2$ is benne van az $Im\varphi$-ben. Következésképpen $Im\varphi$ a V_1 vektortér egy altere.

Az előző tétel miatt $\underline{0}_2 \in Ker\varphi$. Igy $Ker\varphi \neq \emptyset$. Legyenek $\underline{a}_1$ és $\underline{a}_2$ a $Ker\varphi$ tetszőleges vektorai. Legyenek $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$\varphi(\alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2) = \alpha\varphi(\underline{a}_1) + \beta\varphi(\underline{a}_2) = \alpha\underline{0}_2 + \beta\underline{0}_2 = \underline{0}_2.$$

Tehát $\alpha\underline{a}_1 + \beta\underline{a}_2 \in Ker\varphi$. Így $Ker\varphi$ a V_1 vektortérnek egy altere. □

2.46. Tétel *(Dimenziótétel) Tetszőleges F test feletti tetszőleges V_1 és V_2 vektorterek és V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ lineáris leképezése esetén*

$$dim(V_1) = dim(Im\varphi) + dim(Ker\varphi).$$

Bizonyítás Legyen $dim(V_1) = n$ és $dim(Ker\varphi) = m$. Ha $m = n$, akkor $Ker\varphi = V_1$ és $Im\varphi = \{\underline{0}_2\}$ (itt $\underline{0}_2$ pedig a V_2 vektortér nullvektorát), és így $dim(V_1) = n = 0 + n = dim(Im\varphi) + dim(Ker\varphi)$. Tegyük fel, hogy $m < n$. Legyen $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ a $Ker\varphi$ egy bázisa. Ez kiegészíthető a V_1 egy $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m, \underline{a}_{m+1}, \ldots, \underline{a}_n\}$ bázisává. Megmutatható (az olvasóra bízzuk), hogy $\{\varphi(\underline{a}_{m+1}), \ldots, \varphi(\underline{a}_n)\}$ egy bázisa az $Im\varphi$ altérnek, ami bizonyítja állításunkat. □

2.47. Definíció *Egy $\varphi \in Hom(V_1, V_2)$ lineáris leképezést izomorfizmusnak nevezünk, ha φ szürjektív és injektív. Azt mondjuk, hogy egy V_1 vektortér izomorf egy V_2 vektortérrel, ha megadható V_1-nek V_2-re való izomorfizmusa (ekkor persze V_2 is izomorf V_1-gyel, s ezért azt is szoktuk mondani, hogy V_1 és V_2 egymással izomorfak).*

2.48. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek, és legyen φ V_1-nek V_2-be való izomorfizmusa. Akkor a V_1 tér tetszőleges $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m$ vektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a V_2 tér $\varphi(\underline{a}_1), \ldots, \varphi(\underline{a}_m)$ vektorai lineárisan függetlenek.*

Bizonyítás. Valamely $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in V_1$ vektorokra és $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ skalárokra

$$\alpha_1\underline{a}_1 + \cdots + \alpha_m\underline{a}_m = \underline{0}_1$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\alpha_1\varphi(\underline{a}_1) + \cdots + \alpha_m\varphi(\underline{a}_m) = \underline{0}_2.$$

Ebből már egyszerűen következik a tétel állítása. □

2.49. Tétel *Ugyanazon test feletti véges dimenziós vektorterek akkor és csak akkor izomorf egymással, ha azonos dimenziójúak.*

Bizonyítás. Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon test feletti véges dimenziós vektorterek. Tegyük fel, hogy $dim(V_1) = dim(V_2)$. Legyen $\{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ a V_1 vektortér, $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n\}$ pedig a V_2 vektortér egy-egy bázisa. Akkor van V_1-nek V_2-be olyan φ lineáris leképezése (2.42. Tétel), amely a $\underline{b}_i$ bázisvektorhoz a $\underline{c}_i$ bázisvektort rendeli ($i = 1, \ldots, n$). Mivel a $\{\underline{c}_1, \ldots, \underline{c}_n\}$ vektorrendszer bázisa V_2-nek, ezért φ szürjektív.

Legyenek

$$\underline{a} = \alpha_1\underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n\underline{b}_n$$

és

$$\underline{b} = \beta_1 \underline{b}_1 + \cdots + \beta_n \underline{b}_n$$

tetszőleges V_1-beli vektorok. Ha $\varphi(\underline{a}) = \varphi(\underline{b})$, akkor

$$\alpha_1 \varphi(\underline{b}_1) + \cdots + \alpha_n \varphi(\underline{b}_n) = \beta_1 \varphi(\underline{b}_1) + \ldots \beta_n \varphi(\underline{b}_n),$$

és így

$$\alpha_1 \underline{c}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{c}_n = \beta_1 \underline{c}_1 + \ldots \beta_n \underline{c}_n,$$

amiből

$$\alpha_i = \beta_i, \quad i = 1, \ldots n$$

adódik, azaz $\underline{a} = \underline{b}$. Tehát φ injective. Következésképpen φ V_1-nek V_2-re való izomorfizmusa.

Fordítva, tegyük fel, hogy V_1 és V_2 egymással izomorfak. A 2.48. Tétel alapján igen egyszerűen adódik, hogy $dim(V_1) = dim(V_2)$, ha figyelembe vesszük, hogy a bázis nem más mint egy maximális lineárisan független vektorrendszer. $\square$

Legyen V egy F test feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n\}$ a V egy bázisa. Tetszőleges

$$\underline{a} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n$$

vektor esetén jelölje $[\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ a következő n-elemű sorozatot:

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in F^n$$

elem n-est rendeli, a V vektortérnek az F^n vektorérre való izomorfizmusa.

2.50. Definíció *A ?? Tételben definiált Az $[\underline{a}]_{\mathcal{B}} \in F^n$ n-elemű sorozatot az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázis szerinti koordinátás alakjának, az $[\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ sorozat elemeit pedig az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}$ bázis szerinti koordinátáinak nevezzük.*

2.51. Tétel *Legyen V egy F test feletti vektortér és $\mathcal{B}$ a V egy bázisa. Akkor tetszőleges $a, b \in V$ vektorok és tetszőleges $\alpha \in F$ skalár esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:*

$$[\underline{a} + \underline{b}]_{\mathcal{B}} = [\underline{xa}]_{\mathcal{B}} + [\underline{b}]_{\mathcal{B}},$$

$$[\alpha \underline{a}]_{\mathcal{B}} = \alpha [\underline{a}]_{\mathcal{B}}.$$

Bizonyítás. A **??** Tétel szerint $\underline{a} \mapsto [\underline{a}]_{\mathcal{B}}$ lineáris leképezés. A tétel állítása ennek nyílvánvaló következménye. □

2.52. Tétel *Egy F test feletti n-dimenziós V vektortér bármely $\mathcal{B}$ bázisa esetén a V tetszőleges $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m\}$ vektorrendszere akkor és csak akkor lineárisan független, ha az F^n vektortér $\{[\underline{a}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\underline{a}_m]_{\mathcal{B}}\}$ vektorrendszere lineárisan független.*

Bizonyítás. A **??** Tételből és a 2.48. Tételből igen egyszerűen következik a tétel állítása. □

3. fejezet

Mátrixok

3.1. A mátrix fogalma

3.1. Definíció *Egy R gyűrű elemeiből képezett, m sorba és n oszlopba elrendezett mn elemű sorozatokat az R gyűrű feletti $m\times n$-típusú mátrixoknak nevezzük. Egy $n\times n$-típusú mátrixot négyzetes mátrixnak is nevezünk.*

Egy R gyűrű elemeiből képezett $m\times n$-típusú mátrix tehát egy m sorból és n oszlopból álló olyan

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

táblázatnak felel meg, amelyben szereplő elemek az R gyűrű elemei.

3.2. Megjegyzés Tetszőleges n pozitív egész szám esetén jelölje I_n az n-nél nem nagyobb pozitív egész számok halmazát. Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú mátrix úgy is tekinthető, mint az $I_m \times I_n$ Descartes-szorzatnak az R-be való egyértelmű leképezése. Egy R gyűrű feletti $m\times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix álta az $I_m \times I_n$ halmaz (i, j) eleméhez hozzárendelt R beli elemet a_{ij}-vel fogjuk jelölni (de alkalmazni fogjuk az ${}_i[\mathbf{A}]_j$ jelölést is). Az a_{ij} elemeket az $\mathbf{A}$ mátrix elemeinek nevezzük. Az a_{ij} elemre az "i-dik sor j-dik eleme" (vagy a "j-dik oszlop i-dik eleme") kifejezést szoktuk használni.

Az

$$a_{i1}, \dots, a_{in}$$

elemsorozatot ($i \in I_m$) az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának, az

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{matrix}$$

elemsorozatot ($j \in I_n$) az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopának nevezzük.

Ha $\mathbf{A}$ egy F test feletti $m \times n$-típusú mátrix, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik ($i \in I_n$) sorát alkotó $[a_{i1}, \dots, a_{i,n}]$ elemsorozat az F^n vektortér (mint sorvektorok tere) egy elemének tekinthető, ezért az $[a_{i1}, \dots, a_{in}]$ elemsorozatot az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorvektorának is szoktuk nevezni. Hasonlóan, az

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in F^m$$

elemsorozatot ($j \in I_n$) az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopvektorának is szoktuk nevezni.

Jelölések mátrixokra:

$$\mathbf{A}, \quad [a_{ij}], \quad \mathbf{A}_{m\times n}, \quad [a_{ij}]_{m\times n}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tekintsünk néhány példát mátrixokra:

1. Az egész számok gyűrűje feletti, azaz egész számokból képezett 3×3-típusú mátrix például a

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 35 \\ 2 & 3 & -9 \end{bmatrix}$$

mátrix.

2. A komplex számok teste feletti, azaz komplex számokból képezett 2×3-típusú mátrix páldául a

$$\begin{bmatrix} -i & 3-i & 1+i \\ 2-3i & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

mátrix.

3. A valós együtthatós polinomok $R[x]$ gyűrűje feletti 2×2-típusú mátrix például a

$$\begin{bmatrix} 2-x & 3x^5-2x+1 \\ 2 & 3-x \end{bmatrix}$$

mátrix.

3.3. Definíció *Két mátrixot akkor tekintünk egyenlőnek, ha azonos típusúak, és elemeik rendre megegyeznek.*

Ha $k = min\{m, n\}$, akkor az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix azonos indexű elemeiből álló

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$$

elemsorozatot az $\mathbf{A}$ mátrix főátlójának nevezzük. Az $\mathbf{A}$ mátrix elemiből álló

$$a_{1n}, a_{2\ n-1}, \dots, a_{k\ n-(k-1)}$$

elemsorozatot az $\mathbf{A}$ mátrix mellékátlójának nevezzük. Figyeljük meg, hogy a mellékátlóban álló elemeknél az indexek összege $n + 1$.

3.4. Definíció *Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltján azt az $\mathbf{A}^T$ módon jelölt $n \times m$-típusú (R feletti) mátrixot értjük, amelyben az i-dik sor ($i = 1, \dots n$) megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik oszlopával.*

3.5. Megjegyzés A definíció alapján tehát : ${}_i[\mathbf{A}^T]_j = {}_j[\mathbf{A}]_i$ tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixra. Világos, hogy egy mátrix transzponáltját úgy is megkaphatjuk, hogy tükrözzük a főátlójára.

3.2. Műveletek mátrixok között

3.6. Definíció *Azonos, $m \times n$-típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixok összegén az ugyancsak $m \times n$-típusú

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixot értjük.

3.7. Megjegyzés *Az összeadást tehát csak azonos típusú mátrixok között értelmezzük.*

3.8. Tétel *Tetszőleges R gyűrű feletti $m \times n$-típusú mátrixok $M_{m \times n}(R)$ halmaza a mátrixok (előzőekben definiált) összeadására nézve kommutatív csoportot alkot. Ebben a csoportban a*

$$\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix (az un. $m \times n$-típusú nullmátrix) a nullelem. Egy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$$

mátrix ellentettje a

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \dots & -a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$$

mátrix.

Bizonyítás. A definíciók alapján nyílvánvaló. □

3.9. Tétel *Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú mátrixok esetén*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $i \in \{1, \dots, m\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$ indexek esetén

$$_i[(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T]_j = \ _j[(\mathbf{A}+\mathbf{B})]_i = \ _j[\mathbf{A}]_i +_j [\mathbf{B}]_i = \ _i[\mathbf{A}^T]_j +_i [\mathbf{B}^T]_j = \ _i[\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T]_j.$$

Így

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T.$$

□

3.10. Definíció *Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

és egy $n \times k$-típusú

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

mátrix **AB** *szorzatán azt az $m \times k$-típusú mátrixot értjük, amelyben az i-dik sor j-dik eleme a következőképpen van definiálva:*

$${}_i[\mathbf{AB}]_j = \sum_{k=1}^{n} ({}_i[\mathbf{A}]_k \ {}_k[\mathbf{B}]_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Figyeljük meg, hogy az **AB** szorzat akkor és csak akkor van értelmezve, ha **A** oszlopainak száma megegyezik **B** sorainak számával.

Tetszőleges gyűrű feletti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixra vezessük be a következő jelölést: tetszőleges $j = 1, 2, \dots, n$ esetén legyen

$$[\underline{a}_j] = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Az $[\underline{a}_j]$ mátrix tehát egy olyan R feletti $m \times 1$-típusú mátrix, amely az A matrix j-dik oszlopából áll (megtartva az oszlopbeli sorrendet). Ezen jelölés szerint az **A** mátrix úgy is tekinthető mint egy n-elemű sorozat, azaz :

$$\mathbf{A} = [[\underline{a}_1], \dots, [\underline{a}_n]].$$

Test feletti mátrixok esetén azt is mondhatjuk, hogy az **A** mátrix az $[\underline{a}_1], \dots, [\underline{a}_n]$ oszlopvektorok sorozata.

Legyen R egységelemes gyűrű, n pedig egy tetszőleges pozitív egész szám. Jelölje $[\underline{e}_i]$ $(i = 1, \dots, n)$ azt az R feletti $n \times 1$-típusú mátrixot, amelyben az i-dik elem az R

egységeleme, az összes többi pedig az R nulleleme. Akkor tetszőleges R feletti $m \times n$-típusú $\mathbf{A} = [[\underline{a}_1], \ldots, [\underline{a}_n]]$ mátrix esetén az $\mathbf{A}$ mátrix és az $[\underline{e}_i]$ mátrix szorzatára

$$\mathbf{A}[\underline{e}_i] = [\underline{a}_i]$$

teljesül. Világos, hogy azonos, $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok akkor és csak akkor egyenlőek, ha $\mathbf{A}[\underline{e}_i] = \mathbf{B}[\underline{e}_i]$ teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ indexre.

3.11. Tétel *Tetszőleges gyűrű feletti* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *mátrixok esetén az* $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ *szorzat akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van az* $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ *szorzat. Ha a szorzatok értelmezve vannak, akkor* $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Valamely $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén az $(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ szorzat akkor és csak akkor létezik, ha $\mathbf{B}$ egy $n \times k$-típusú, $\mathbf{C}$ pedig egy $k \times t$-típusú mátrix, amely akkor és csak akkor teljesül, ha létezik az $\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ szorzat. A fenti jelöléseket használva,

$$ {}_i[(\mathbf{AB})\mathbf{C}]_j = \sum_{u=1}^{k}\left({}_i[(\mathbf{AB})]_u \; {}_u[\mathbf{C}]_j\right) = \sum_{u=1}^{k}\left(\left(\sum_{v=1}^{n} {}_i[\mathbf{A}]_v \; {}_v[\mathbf{B}]_u\right) {}_u[\mathbf{C}]_j\right) = $$

$$ = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}\left(\left({}_i[\mathbf{A}]_v \; {}_v[\mathbf{B}]_u\right) {}_u[\mathbf{C}]_j\right) = \sum_{u=1}^{k}\sum_{v=1}^{n}\left({}_i[\mathbf{A}]_v\left({}_v[\mathbf{B}]_u \; {}_u[\mathbf{C}]_j\right)\right) = $$

$$ \sum_{v=1}^{n}\sum_{u=1}^{k}\left({}_i[\mathbf{A}]_v\left({}_v[\mathbf{B}]_u \; {}_u[\mathbf{C}]_j\right)\right) = \sum_{v=1}^{n}\left({}_i[\mathbf{A}]_v \sum_{u=1}^{k}\left({}_v[\mathbf{B}]_u \; {}_u[\mathbf{C}]_j\right)\right) = $$

$$ \sum_{v=1}^{n}\left({}_i[\mathbf{A}]_v \; {}_v[\mathbf{BC}]_j\right) = {}_i[\mathbf{A}(\mathbf{BC})]_j $$

minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ és $j \in \{1, \ldots, n\}$ indexre. Tehát $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$. □

3.12. Tétel *Tetszőleges gyűrű feletti* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *mátrixok esetén az* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ *mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van az* $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ *szorzatösszeg. Ha a szóban forgó mátrixok értelmezve vannak, akkor* $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Valamely $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén az $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha a $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok $n\times k$-típusúak, amely akkor és csak akkor igaz, ha létezik az $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$ szorzatösszeg. Ebben az esetben

$$_i[\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_j = \sum_{u=1}^{n} {}_i[\mathbf{A}]_u\ {}_u[\mathbf{B}+\mathbf{C}]_j =$$

$$= \sum_{u=1}^{n} {}_i[\mathbf{A}]_u\ {}_u[\mathbf{B}]_j + \sum_{u=1}^{n} {}_i[\mathbf{A}]_u\ {}_u[\mathbf{C}]_j =_i [\mathbf{AB}]_j +_i [\mathbf{AC}]_j =_i [\mathbf{AB}+\mathbf{AC}]_j.$$

□

Az előző tételhez hasonlóan igazolható, ezért a bizonyítását nem részletezzük a következő tételnek.

3.13. Tétel *Tetszőleges gyűrű feletti $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ mátrixok esetén a $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}$ mátrix akkor és csak akkor van értelmezve, ha értelmezve van a $\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$ szorzatösszeg. Ha a szóban forgó mátrixok értelmezve vannak, akkor $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{BA}+\mathbf{CA}$.*

3.14. Tétel *Tetszőleges R gyűrű feletti $n\times n$-típusú mátrixok $M_n(R)$ halmaza a mátrixok összeadására és szorzására nézve gyűrűt alkot. Ez a gyűrű általában nem kommutatív, még akkor sem, ha R kommutatív. Ha R egységelemes gyűrű, akkor az $M_n(R)$ mátrixgyűrű is az; benne az*

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix (az un. egységmátrix) az egységelem.

Bizonyítás. A 3.8. Tétel szerint $M_n(R)$ kommutatív csoportot alkot az összeadásra nézve. A 3.11. Tétel szerint a szorzás asszociatív az $M_n(R)$ halmazon. A 3.12. Tétel és a 3.13. Tétel szerint az $M_n(R)$ halmazon a szorzás mindkét oldalról disztributív az összeadásra nézve. Tehát $M_n(R)$ gyűrűt alkot a mátrixok öszeadására és szorzására nézve. □

Egységelemes R gyűrű feletti $n \times n$-típusú mátrixok egységelemes $M_n(R)$ gyűrűjében beszélhetünk egy mátrix inverzéről, ha létezik.

3.15. Definíció *Egy egységelemes R gyűrű feletti $\mathbf{A} \in M_n(R)$ négyzetes mátrix inverzén azt az $\mathbf{A}^{-1} \in M_n(R)$ mátrixot értjük, amelyre $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ teljesül. Ekkor azt is mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ invertálható mátrix.*

3.16. Megjegyzés Ha egy (négyzetes) $\mathbf{A}$ mátrix invertálható, akkor az $\mathbf{A}$ inverze is invertálható (ugyanis az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix inverze az $\mathbf{A}$ mátrix).

3.17. Tétel *Ha az $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n(R)$ mátrixoknak van inverze, akkor az $\mathbf{AB}$ szorzatnak és a $\mathbf{BA}$ szorzatnak is van inverze, mégpedig $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ és $(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$.*

Bizonyítás. Mivel

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{E}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E},$$

és

$$(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{E}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{E},$$

ezért

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$(\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}.$$

$\square$

3.18. Tétel *Egy R kommutatív gyűrű feletti azonos típusú négyzetes $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrix esetén*

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-típusú mátrixok. Akkor

$$_i[(\mathbf{AB})^T]_j =_j [(\mathbf{AB})]_i = \sum_{u=1}^{n} {}_j[\mathbf{A}]_{uu}[\mathbf{B}]_i = \sum_{u=1}^{n} {}_u[\mathbf{B}]_{ij}[\mathbf{A}]_u =$$

$$= \sum_{u=1}^{n} {}_i[\mathbf{B}^T]_{uu}[\mathbf{A}^T]_j =_i [\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T]_j.$$

Tehát $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$. $\square$

3.19. Definíció *Egy R gyűrű feletti $m \times n$-típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixnak az R egy α elemével képezett $\alpha\mathbf{A}$ szorzatán az

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

R feletti mátrixot értjük.

3.20. Tétel *Egy F test elemeiből képezett $m \times n$-típusú mátrixok halmaza mn-dimenziós vektorteret alkot az F test felett. Ebben a vektortérben az $E_{i,j}$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ mátrixok egy bázist alkotnak, ahol $E_{i,j}$ jelöli azt az $m \times n$-típusú mátrixot, melynek i-dik sorában a j-dik elem 1, az összes többi elem pedig a nulla.*

4. fejezet

A determináns

Ebben a fejezetben tetszőleges kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrixok determinánsának fogalmát definiáljuk rekurzív módon. Definiáljuk az 1×1-típusú és a 2×2-típusú mátrixok determinánsának fogalmát, majd tetszőleges $n > 2$ egész szám esetén definiáljuk az $n \times n$-típusú mátrixok determinánsának fogalmát az $(n-1) \times (n-1)$-típusú mátrixok determinánsának segítségével.

4.1. Definíció *Legyen*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy R kommutatív gyűrű feletti (négyzetes) mátrix. Az $\mathbf{A}$ mátrix $det(\mathbf{A})$ módon jelölt determinánsán az R gyűrű következő elemét értjük:

1. *Ha $n = 1$, azaz $\mathbf{A} = [a_{11}]$, akkor $det(\mathbf{A}) = a_{11}$.*
2. *Ha $n = 2$, azaz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, akkor $det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \in R$.*
3. *Ha $n > 2$, akkor*

$$det(\mathbf{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

amely képletben $A_{1k} = (-1)^{1+k}D_{1k}$, ahol D_{1k} jelöli az $\mathbf{A}$ mátrixból az első sor és a k-dik oszlop elhagyásával keletkezett $(n-1) \times (n-1)$-típusú mátrix determinánsát.

4.2. Megjegyzés Egy $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix determinánsát $|\mathbf{A}|$ módon is szoktuk jelölni. Ha fel akarjuk tüntetni az $\mathbf{A}$ mátrix elemeit is, akkor egy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát jelölhetjük még a következőképpen is:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Egy $n \times n$-típusú mátrix determinánsát n-edrendű determinánsnak is szoktuk nevezni. Annak ellenére, hogy egy R kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrix determinánsa az R egy eleme, mégis szoktunk beszélni egy determináns oszlopairól, illetve sorairól. Ilyenkor a szóbanforgó mátrix oszlopaira, illetve soraira gondolunk.

4.1. A determináns alaptulajdonságai

Tetszőleges R kommutatív gyűrű feletti

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixra (ahol $n \geq 2$), vezessük be a következő jelöléseket:

Tetszőleges $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ indexekre, jelölje D_{ij} az $\mathbf{A}$ mátrixból az i-dik sor és a j-dik oszlop törlésével keletkezett $(n-1) \times (n-1)$-típusú mátrix determinánsát (amelyet az i-sor j-dik eleméhez tartozó aldeterminánsnak nevezünk). Legyen

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij},$$

amit az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának j-dik eleméhez tartozó előjeles aldeterminánsnak nevezünk.

Az
$$a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
szorzatösszeget az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sora szerinti, az
$$a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$
szorzatösszeget az $\mathbf{A}$ mátrix j-dik oszlopa szerinti kifejtésének nevezzük.

Egy legalább két sort tartalmazó négyzetes mátrix determinánsa tehát nem más, mint az első sora szerinti kifejtése.

Nem nehéz belátni, hogy egy 2×2-típusú mátrix bármely sora, illetve bármely oszlopa szerinti kifejtése megegyezik a mátrix determinánsával. Ennél több is igaz:

4.3. Tétel *(Kifejtési tétel) Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti négyzetes mátrix bármely sora, illetve bármely oszlopa szerinti kifejtése megegyezik a mátrix determinánsával (azaz az első sor szerinti kefejtésével).*

A következő tételt a Kifejtési tétellel együtt a későbbiekben alkalmazni fogjuk.

4.4. Tétel *(Ferde kifejtési tétel) Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti, legalább két sort tartalmazó négyzetes mátrix esetén, egymástól különböző i, j és k indexekre*
$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0,$$
és
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0$$
teljesül.

A 4.3. Tétel és a 4.4. Tétel eredményeit a következő két képletben foglalhatjuk össze:
$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \begin{cases} det(\mathbf{A}) & ha\ i = k \\ 0 & ha\ i \neq k \end{cases}$$
és
$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} det(\mathbf{A}) & ha\ j = k \\ 0 & ha\ j \neq k. \end{cases}$$

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt.

4.5. Tétel *Kommutatív gyűrű feletti tetszőleges négyzetes A mátrix esetén $det(A) = det(A^T)$, azaz egy négyzetes mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával.*

A következő tételek a determinánsok egy sorával, illetve oszlopával kapcsolatos alaptulajdonságokat tartalmazzák.

4.6. Tétel *Ha egy determináns valamely sorában vagy oszlopában minden elem 0, akkor a determináns értéke egyenlő 0-val.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ olyan $n \times n$-típusú mátrix, amelynek i-dik sorában (vagy oszlopában) minden elem nulla. Akkor a mátrix i-dik sora (vagy i-dik oszlopa) szerinti kifejtése egyenlő 0-val. Így a Ferde kifejtési tétel miatt $det(\mathbf{A}) = 0$. □

4.7. Tétel *Ha egy R kommutatív gyűrű feletti $\mathbf{A}$ négyzetes mátrix valamely sorában vagy oszlopában álló elemek mindegyikét megszorozzuk az R valamely α elemével, akkor az így keletkezett mátrix determinánsa megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának α-szorosával.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{i,\alpha}$ az a mátrix, amit egy $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrixból úgy kapunk, hogy annak i-dik sorában álló elemek mindegyikét megszorozzuk az R valamely α elemével. Az $\mathbf{A}_{i,\alpha}$ mátrix i-dik sora szerinti kifejtése:

$$det(\mathbf{A}_{i,\alpha}) = \alpha a_{i1}A_{i1} + \alpha a_{i2}A_{i2} + \cdots + \alpha a_{in}A_{in} = \alpha(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) = \alpha det(\mathbf{A}),$$

felhasználva a Kifejtési tételt is. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. □

4.8. Tétel *Ha egy R kommutatív gyűrű feletti $n \times n$-típusú A mátrix valamely sorában (vagy oszlopában) álló elemek mindegyike csupa kéttagú összeg: $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix deteminánsa megegyezik azon $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok determinánsának összegével, ahol a $\mathbf{B}$, illetve $\mathbf{C}$ mátrix szóban forgó sorában (vagy oszlopában) lévő elemek az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemek, illetve ($\mathbf{C}$-nél) az $y_1, y_2, \ldots, y_n$ elemek, a többi helyen levő elemek pedig rendre megegyeznek (mind a $\mathbf{B}$, mind a $\mathbf{C}$ mátrixnál) az $\mathbf{A}$ mátrix ugyanazon helyen álló elemeivel. Képletben (2×2-típusú mátrix 2. sorára):*

$$\begin{vmatrix} a & b \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Proof. Legyenek **A**, **B** és **C** a tételben szereplő mátrixok! A bizonyítást az i-dik sorra végezzük el. Az oszlopokra vonatkozó állítás hasonlóan igazolható. Tegyük fel tehát, hogy az **A** mátrix i-dik sora $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n$. Alkalmazva a Kifejtési tételt az **A** mátrix i-dik sorára:

$$det(\mathbf{A}) = (x_1 + y_1)A_{i1} + (x_2 + y_2)A_{i2} + \cdots + (x_n + y_n)A_{in} =$$

$$= (x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \cdots + x_n A_{in}) + (y_1 A_{i1} + y_2 A_{i2} + \cdots + y_n A_{in}) = det(\mathbf{B}) + det(\mathbf{C}).$$

□

A következő tételek a determinánsok két sorával, illetve oszlopával kapcsolatos alaptulajdonságokat tartalmazzák.

4.9. Tétel *Ha egy determináns két különböző sora (vagy két különböző oszlopa) rendre ugyanazon elemeket tartalmazza, akkor a determináns értéke a* 0.

Bizonyítás. Ha egy $n \times n$-típusú **A** mátrix i-dik és k-dik $(i \neq k)$ sorában levő elemek rendre megegyeznek, akkor az $i \neq k$ indexekre alkalmazva a ferde kifejtési tételt, valamint a kifejtési tételt:

$$0 = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = det(\mathbf{A}).$$

Hasonlóan igazolható az oszlopokra vonatkozó állítás. □

4.10. Tétel *Ha egy* R *kommutatív gyűrű elemeiből képezett determináns valamelyik sorához (vagy oszlopához) hozzáadjuk egy tőle különböző sor (vagy oszlop) valamely* R*-beli elemmel való szorzatát, akkor a determináns értéke nem változik.*

Bizonyítás. Adjuk az $n \times n$-típusú **A** mátrix i-dik sorhoz a j-dik $j \neq i$ sor $\alpha \in R$ szorosát. Az így keletkezett mátrix i-dik sorában álló elemek

$$a_{i1} + a_{j1}, a_{i2} + a_{j2}, \ldots, a_{in} + a_{jn}.$$

A 4.8. Tétel és a 4.7. Tétel szerint ennek a mátrixnak a determinánsa egyenlő $det(\mathbf{A}) + \alpha det(\mathbf{B}$-vel, ahol **B** olyan mátrix, amelyben az i-dik és j-dik sorok megegyeznek. Mivel $i \neq j$, ezért a 4.9. Tétel szerint $det(\mathbf{B}) = 0$. Így a vizsgált mátrix determinánsa valóban egyenlő az **A** mátrix determinánsával. □

4.11. Tétel *Ha egy determinánsban két különböző sort (vagy oszlopot) egymással felcserélünk, akkor a determináns előjelet vált.*

Bizonyítás. A sorokra vonatkozó állítást bizonyítjuk. Legyenek $i < j$ tetszőleges sorindexek. Cseréljük fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixban az i-dik és a j-dik sort. Az

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot kapjuk (amelynek az elemei az i-dik és j-dik sor kivételével rendre megegyeznek az $\mathbf{A}$ mátrix ugyanazon helyen álló elemivel). Olyan átalakításokat hajtunk végre az $\mathbf{A}'$ mátrixnak csak az i-dik és j-dik során (a j-dik sort kivonjuk az i-dik sorból, majd az így keletkezett i-dik sort hozzáadjuk a j-dik sorhoz, végül pedig az így adódó j-dik sort kivonjuk az i-dik sorból) amely átalakításokkal a determinánsa nem változik (lásd a 4.10. Tételt és a 4.7. Tételt):

$$det(\mathbf{A}') = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} - a_{i1} & a_{j2} - a_{i2} & \dots & a_{jn} - a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} - a_{i1} & a_{j2} - a_{i2} & \dots & a_{jn} - a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \dots & -a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = -det(\mathbf{A}).$$

□

Példa. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát.

Megoldás. Vonjuk ki a második sorból az első sor 5-szörösét, a harmadik sorból az első sor 9-szeresét, és a negyedik sorból az első sor 13-szorosát, majd vonjuk ki a harmadik sorból a második sor 2-szeresét. Akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -36 \end{vmatrix}.$$

Mivel a harmadik sor minden eleme 0, ezért a determináns értéke 0.

4.2. A determinánsok szorzástétele

Ebben a fejezetben a determinánsok szorzástételével foglalkozunk. Ennek bizonyításához felhasználjuk a Laplace-féle kifejtési tételt, amelyhez definiálni fogjuk tetszőleges típusú, kommutatív gyűrű elemeiből alkotott mátrix aldeterminánsának fogalmát.

Legyenek $m, n \geq 1$ tetszőleges egész számok. Legyenek továbbá

$$1 \leq i_1 < i_1 < \cdots < i_k \leq min\{m, n\}$$

és

$$1 \leq j_1 < j_1 < \cdots < j_k \leq min\{m, n\}$$

tetszőleges egész számok! Egy $m \times n$ típusú **A** mátrixból képezett

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

k-adrendű determinánst az **A** mátrix egy k-adrendű aldeterminánsának nevezzük.

Ezt a determinánst tehát úgy képezzük, hogy az **A** mátrixból az i_1-dik, i_2-dik, ... i_k-dik sorban, illetve azon belül a j_1-dik, j_2-dik ... j_k-dik oszlopban álló elemeket megtartjuk az eredeti elrendezésük szerint, a többi elemet elhagyjuk, és az így visszamaradt $k \times k$-típusú (négyzetes) mátrix determinánsát képezzük.

Legyen **A** egy $n \times n$-típusú mátrix. Ha

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

az **A** egy olyan aldeterminánsa, ahol $k < n$, akkor az **A** mátrixból az i_1-dik i_2-dik ... i_k-dik sorok, illetve a j_1-dik, j_2-dik ... j_k-dik oszlopok elhagyásával keletkezett $(n-k) \times (n-k)$-típusú mátrix determinánsa az **A** mátrixnak szintén egy ($(n-k)$-adrendű) aldeterminánsa. Ezt az aldeterminánst az

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

aldetermináns komplementer aldeterminánsának nevezzük. Ha ezt a komplementer aldetermináns még megszorozzuk

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \text{-val,}$$

akkor az így keletkezett determinánst az

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

aldeterminánshoz tartozó előjeles aldeterminánsnak nevezzük.

A determinánsok szorzástételének bizonyításához szükségünk lesz a Laplace-féle kifejtési tétel néven ismert következő tételre, amely a már korábban kimondott Kifejtési tétel általánosítása.

4.12. Tétel *Ha egy kommutatív gyűrű elemeiből képezett $n \times n$-típusú* **A** *négyzetes mátrixban kijelölünk $k < n$ sort (vagy k oszlopot) és képezzük az ezek által meghatározott összes k-adrendű aldeterminánst, és ezeket megszorozzuk a hozzájuk tartozó előjeles aldeterminánsaikkal, végül ezeket a szorzatokat összegezzük, akkor eredményként az* **A** *mátrix determinánsát kapjuk.*

Ezek után megfogalmazzuk és bizonyítjuk a determinánsok szorzástételét.

4.13. Tétel *Azonos típusú, négyztes mátrixok szorzatának determinánsa egyenlő a tényezők determinánsainak szorzatával.*

Bizonyítás. Legyenek

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

és

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

tetszőleges kommutatív gyűrű feletti mátrixok. Képezzük a $2n \times 2n$-típusú

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} & \end{bmatrix}$$

mátrixot. Alkalmazuk a Laplace-féle kifejtési tételt az első n sorra. Akkor

$$\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{vmatrix} = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}).$$

Ha az

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & \\ -1 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} & \end{bmatrix}$$

mátrix $(n+i)$-dik oszlopából $(i = 1, \dots, n)$ kivonjuk a j-dik oszlop $(j = 1, \dots, n)$ b_{ji}-szeresét, akkor a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{AB} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ennek determinánsa egyrészt megegyezik az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsával, másrészt viszont (alkalmazva a Laplace-féle kifejtési tételt az utolsó n oszlopára) egyenlő $det(\mathbf{AB})$-vel. Tehát $det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}) = det(\mathbf{AB})$. □

4.3. Márixok invertálhatóságának feltétele

A következőkben test elemiből képezett (négyzetes) mátrixok invertálhatóságára adunk szükséges és elégséges feltételt a determinánsuk segítségével.

4.14. Definíció *Egy kommutatív gyűrű elemeiből képezett* $\mathbf{A}$ *négyzetes mátrixot reguláris mátrixnak nevezünk, ha* $det(\mathbf{A}) \neq 0$. *Viszont azt mondjuk, hogy* $\mathbf{A}$ *szinguláris mátrix, ha* $det(\mathbf{A}) = 0$.

4.15. Tétel *Egy* F *test elemeiből képezett reguláris mátrixnak van egy és csak egy inverze. Szinguláris mátrixnak nincs inverze.*

Bizonyítás. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

egy F test elemeiből képezett reguláris mátrix. Képezzük az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixot, ahol A_{ij} jelöli az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik sorának és j-dik oszlopának metszetében álló a_{ij} elemhez tartozó előjeles aldeterminánst. Figyeljük meg, hogy az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrixot úgy képezzük, hogy minden eleme helyére beírjuk a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst, az így keletkezett mátrixot transzponáljuk, majd ezt a mátrixot megszorozzuk az $\mathbf{A}$ mátrix determinánsának reciprokával. Mivel $\mathbf{A}$ reguláris, ezért a determinánsa az F test egy nem 0 eleme, és ezért van F-ben reciproka (másképpen: inverze). Tehát az $\mathbf{A}^{-1}$ mátrix jól definiált.

A mátrixok szorzásának definíciója alapján az

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix i-dik sorának j-dik eleme (a Kifejtési tétel és a Ferde kifejtési tétel szerint) egyenlő a következővel:

$$\frac{1}{det(\mathbf{A})}(a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}) = \begin{cases} 1 & ha\ i = j \\ 0 & ha\ i \neq j. \end{cases}$$

Tehát $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$. Hasonlóan igazolható, hogy $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Így az

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$

mátrix az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix inverze.

Annak bizonyításához, hogy $\mathbf{A}$-nak pontosan egy inverze van, tegyük fel, hogy egy $\mathbf{B}$ mátrix is inverze az $\mathbf{A}$ mátrixnak. Akkor

$$\mathbf{B} = \mathbf{BE} = \mathbf{B}(\mathbf{AA}^{-1}) = (\mathbf{BA})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{EA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Már csak annak igazolása van hátra, hogy szinguláris mátrixnak nincs inverze. Legyen $\mathbf{A}$ egy szinguláris mátrix. Tegyük fel, indirekt módon, hogy A-nak van inverze. Legyen $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ egy inverze. Akkor (használva a determinánsok szorzástételét is)

$$1 = det(\mathbf{E}) = det(\mathbf{AB}) = det(\mathbf{A})det(\mathbf{B}) = 0det(\mathbf{B}) = 0,$$

ami ellentmondás. Tehát egy szinguláris mátrixnak nem létezik inverze. □

4.16. Megjegyzés *Ha egy egységelemes R gyűrű feletti $\mathbf{A}$ négyzetes mátrixhoz van olyan R feletti $\mathbf{X}$ négyzetes mátrix, amelyre $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$ teljesül, akkor azt is szoktuk mondani, hogy $\mathbf{X}$ az $\mathbf{A}$ mátrix jobb oldali inverze. Ha $\mathbf{XA} = \mathbf{E}$ teljesül, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{X}$ az $\mathbf{A}$ bal oldali inverze. Ha egy test feletti négyzetes mátrixnak van bal oldali vagy jobb oldali inverze, akkor a determinánsok szorzástétele miatt $\mathbf{A}$ reguláris mátrix, és így $\mathbf{A}$-nak van inverze.*

4.4. Mátrix rangja

4.17. Definíció *Egy F test elemeiből képezett $m \times n$-típusú*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangját az $\mathbf{A}$ mátrix rangjának nevezzük.

4.18. Tétel *Test elemeiből képezett mátrix rangja megegyezik a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű aldeterminánsok rendszámának maximumával.*

4.19. Tétel *Egy F test feletti $n \times n$-típusú* **A** *mátrix oszlopvektorai (az F^n vektortérben) akkor és csak akkor lineárisan függetlenek ha az* **A** *mátrix reguláris (azaz determinánsa nem egyenlő az F nullelemével).*

Bizonyítás. A 4.18. Tétel miatt egy test feletti $n \times n$-típusú mátrix oszlopvektorai akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a mátrix rangja n. A rang definíciója szerint ez azt jelenti, hogy a mátrix determinánsa nem a nulla, azaz a mátrix reguláris. □

4.20. Tétel *Test elemeiből képezett mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangja megegyezik a sorvektoraiból álló vektorrendszer rangjával.*

Bizonyítás. Az állítás annak következménye, hogy egy négyzetes mátrix determinánsa megegyezik transzponáltjának determinánsával. □

4.21. Definíció *Egy $\mathbb{F}$ test elemeiből képezett* **A** *mátrix elemi átalakításain a következő átalakítások valamelyikét értjük:*

- *A mátrix két (különböző) sorának, illetve két (különböző) oszlopának felcserélése.*
- *A mátrix valamelyik sorának, illetve oszlopának az $\mathbb{F}$ test egy nem nulla elemével való szorzása.*
- *A mátrix valamelyik sora (illetve oszlopa) $\mathbb{F}$ egy elemével való szorzatának egy másik sorhoz (illetve oszlophoz) való hozzáadása.*

4.22. Tétel *(Rangszámtétel) Test elemeiből képezett mátrix rangja elemi átalakítások során nem változik.*

Bizonyítás. A 4.20. Tétel, a 4.18. Tétel, a 2.35. Megjegyzés, a 2.36. Tétel, a 2.37. Tétel, és a 2.38. Tétel alapján nyílvánvaló. $\square$

Feladat. Határozzuk meg a valós számok feletti

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját.

Megoldás. Adjuk a második sorhoz az első sor (-2)-szeresét, a harmadik sorhoz pedig az első sor (-3)-szorosát. A keletkezett mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 0 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & -22 \end{bmatrix}.$$

Szorozzuk meg a második sort $-1/5$-del. A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -22 \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a második sor kétszeresét az első sorból, majd adjuk a második sor ötszörösét a harmadik sorhoz! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

Ennek a mátrixnak

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

egy nem nulla aldeterminánsa, így az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}.$$

mátrix rangja 3. Mivel közben elemi átalakításokat alkalmaztunk, ezért az eredeti mátrix rangja egyenlő 3-mal.

Egy

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrix a_{ij} elemét főelemnek nevezzük, ha az a_{ij} elem az i-dik sor első nem nulla eleme, azaz $a_{ij} \neq 0$ és $a_{ik} = 0$ minden j-nél kisebb pozitív egész k indexre. Ha egy sorban minden elem nulla, akkor annak a sornak nincs főeleme.

Egy mátrixot lépcsős alakúnak nevezünk, ha teljesíti a következő feltételeket:

(1) a mátrix csupa nullákat tartalmazó sorai (ha vannak ilyenek), a mátrix utolsó sorai;

(1) a nem nulla sorok főelemei alatt csak 0-ák állnak;

(2) bármely két egymás után következő nem nulla sor esetén a lentebbi sor főeleme későbbi oszlopban jelenik meg, mint a felette levő sor főeleme, azaz a lentebbi sor főeleme előtt több nulla áll, mint a felette levő sor főeleme előtt.

4.23. Tétel *A sorokra vonatkozó elemi átalakításokkal minden mátrix lépcsős alakra hozható.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ egy tetszőleges $m \times n$-típusú mátrix. Feltehetjük, hogy $\mathbf{A}$ nem nulla, és sorainak száma legalább kettő. Sorok esetleges cseréjével elérjük, hogy a mátrix csupa nullákat tartalmazó sorai (ha vannak ilyenek) a mátrix utolsó soraiba kerüljenek. Az $\mathbf{A}$ oszlopvektorai közül jelölje j annak a nem nulla oszlopvektornak az indexét, amely előtt álló oszlopvektorok (ha vannak ilyenek) mindegyike nullvektor. Feltehetjük, hogy a sorok megfelelő cseréje után mátrixunk olyan alakú, amelyben az első sor j-dik eleme (azaz a_{1j}) nem nulla. Ez lesz az első sor főeleme. Az i-dik ($i \geq 2$) sorból vonjuk ki az első sor a_{ij}/a_{1j}-szeresét. Ezzel olyan mátrixot kaptunk, amelyben az a_{1j} főelem alatti elemek mindegyike nulla. Takarjuk le az első sort. Ha az így kelekezett mátrix minden eleme nulla, vagy egyetlen sora van, akkor a vizsgált mátrixot lépcsős alakra hoztuk. Ellenkező esetben a fenti eljárást alkalmazzuk az első sor letakarásával keletkezett mátrixra. Az eljárást véges lépésben befejezzük, melynek eredményeként olyan lépcsős mátrix keletkezik, amelyet az eredetiből elemi sorműveletek alkalmazásával nyertünk. $\square$

5. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

5.1. Definíció *Lineáris egyenletrendszeren olyan egyenletrendszert fogunk érteni, amely véges sok elsőfokú egyenletből áll és véges sok ismeretlent tartalmaz.*

Az m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó lineáris egyenletrendszer általános alakja

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

amelyben szereplő a_{ij} $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$ un. együtthatók és a b_i $(1 \leq j \leq m)$ un. konstansok valamely $\mathbb{F}$ test elemei. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy egy $\mathbb{F}$ test feletti egyenletrendszerről van szó.

5.2. Definíció *Egy*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer együtthatóiból képezett

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mátrixot a lineáris egyenletrendszer mátrixának, az

$$(\mathbf{A}, \underline{b}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

mátrixot pedig a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixának nevezzük. Ezeket, valamint az

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

jelöléseket használva, a lineáris egyenletredszer

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$$

alakban is felírható; ezt az alakot a lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakjának nevezzük.

5.1. Lineáris egyenletrendszer megoldása

5.3. Definíció *Egy F test feletti m egyenletből álló, n-ismeretlent tartalmazó*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer megoldásain olyan $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in F^n$ *rendezett elem n-eseket értünk, amelyek esetén* F*-ben teljesül az*

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = b_i$$

egyenlőség minden $i = 1, 2, \cdots, m$ *indexre.*

Egy $\mathbb{F}$ test feletti

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer a következőképpen is felírható

$$x_1\underline{a}_1 + \cdots + x_n\underline{a}_n = \underline{b}$$

ahol

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

az $\mathbb{F}^m$ vektortér vektorai.

Egy $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ vektor akkor és csak akkor megoldása a fenti egyenletrendszernek, ha a $\underline{b} \in F^m$ vektor előáll az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in F^m$ vektoroknak a $c_1, \ldots c_n$ skalárokkal képezett lineáris kombinációjaként.

5.2. Lineáris egyenletrendszer megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele

5.4. Tétel *Egy $\mathbb{F}$ test feletti*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array},$$

lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az ($\mathbb{F}^m$ vektortérbeli) $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer rangja megegyezik az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer rangjával, azaz $\varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle = \varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle$. Az egyenletrendszernek akkor és csak akkor van egyértelmű megoldása, ha az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer rangja is és az $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}$ vektorrendszer rangja is megegyezik az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek számával, azaz $\varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle = n = \varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle$.

Bizonyítás. Az, hogy az

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

egyenletrendszer megoldható, azzal ekvivalens, hogy megadhatók olan $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$ skalárok, amelyekre teljesül a $c_1\underline{a}_1 + \dots + c_n\underline{a}_n = \underline{b}$ egyenlőség, amely viszont azzal ekvivalens, hogy a $\underline{b}$ vektor benne van az $\mathbb{F}^m$ vektortér $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ vektorrendszere által kifeszített altérben. Így $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle \subseteq \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle$. Mivel $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle \subseteq \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle$ mindig teljesül, ezért $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle = \langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle$. Ez azzal ekvivalens, hogy $\varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\rangle = \varrho\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle$.

Vizsgáljuk az egyértelmű megoldhatósággal kapcsolatos állítást. Tegyük fel, hogy a lineáris egyenletrendszer egyértelműen oldható meg, azaz van egy és csak egy olyan $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ vektor, amelyre teljesül az $c_1\underline{a}_1 + \dots + c_n\underline{a}_n = \underline{b}$ egyenlőség. Megmutatjuk, hogy ekkor az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek. Tegyük fel, hogy $\xi_1\underline{a}_1 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n = \underline{0}$ teljesül úgy is valamely $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{F}$ skalárokkal, hogy azok közül valamelyik nem egyenlő a nullával. Akkor a $\begin{bmatrix} \xi_1 + c_1 \\ \xi_2 + c_2 \\ \vdots \\ \xi_n + c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$ vektorra

$$(\xi_1 + c_1)\underline{a}_1 + \cdots + (\xi_n + c_n)\underline{a}_n =$$

$$= (\xi_1\underline{a}_1 + \cdots + \xi_n\underline{a}_n) + (c_1\underline{a}_1 + \cdots + c_n\underline{a}_n) = \underline{0} + \underline{b} = \underline{b}$$

teljesül, és így a $\begin{bmatrix} \xi_1 + c_1 \\ \xi_2 + c_2 \\ \vdots \\ \xi_n + c_n \end{bmatrix}$ vektor az egyenletrendszer $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$-től különböző megoldása, ami ellentmondás. Tehát az $\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$ vektorrendszer lineárisan független. Így $n = \varrho\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle = \varrho\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $n = \varrho\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle = \varrho\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n, \underline{b}\rangle$. Akkor az egyenletrendszernek van megoldása a tétel első állítása szerint. Az $n = \varrho\langle \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\rangle$ feltételből következik, hogy az $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vektorok lineárisan függetlenek, és ezért belőlük minden vektor, így a $\underline{b}$ vektor is egyféleképpen állítható elő. Tehát a lineáris egyenletrendszernek egy megoldása létezik. $\square$

5.5. Tétel *Egy $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletrendszer $\mathbf{A}$ mátrixának rangja megegyezik az $(\mathbf{A}, \underline{b})$ kibővített mátrix rangjával. Az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az $\mathbf{A}$ és $(\mathbf{A}, \underline{b})$ mátrixok rangja megegyezik az egyenletrendszerben szereplő ismeretlenek számával.*

Bizonyítás. Egy mátrix rangján az oszlopvektorokból álló vektorrendszer rangját értjük. A tétel tehát úgy is megfoglmazható, hogy egy lineáris egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg, ha az egyenletrendszer mátrixának

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

oszlopvektoraiból álló vektorrendszer rangja megegyezik az

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \underline{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

vektorrendszer rangjával. Így állításunk a 5.4. Tétel következménye. □

A fejezet következő részében lineáris egyenletrendszerek megoldási módszereivel foglalkozunk.

5.3. A Gauss-, illetve a Gauss-Jordan-módszer

Lineáris egyenletrendszer elemi átalakításain a következő átalakításokat értjük:

(1) valamelyik egyenletnek egy nullától különböző skalárral való szorzása,

(2) az egyik egyenlethez egy tőle különböző egyenlet skalárszorosának hozzáadása,

(3) két egyenlet felcserélése.

Az elemi átalakítások mindegyike az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert eredményez.

A lineáris egyenletrendszer elemi átalakításai a bővített mátrixban a sorokra vonatkozó következő elemi átalakításokat (un. elemi sorműveleteket) eredményezik:

(1) a mátrix egy sorának egy nullától különböző skalárral való szorzása,

(2) a mátrix egyik sorához egy tőle különböző sor skalárszorosának hozzáadása,

(3) a mátrix két sorának felcserélése.

A 4.23.Tétel miatt minden mátrix lépcsős alakra hozható, így minden lineáris egyenletrendszer elemi átalakításokkal olyan alakra hozható, melynek mátrixa lépcsős alakú.

A Gauss-módszer. A Gauss-módszer első szakaszában a lineáris egyenletrendszeren olyan elemi átalakításokat hajtunk végre, amelyek a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát lépcsős alakra hozza. Ha ez az alak tartalmaz $[0, 0, \ldots, 0|c]$ alakú sort úgy, hogy

$c \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása, mert ez arra utal, hogy az ezen sornak megfelelő egyenlet $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = c$ alakú, amely $c \neq 0$ esetén nem teljesülhet. Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a kibővített mátrix lépcsős alakja nem tartalmaz ilyen sort. Mielőtt ezt megtennénk, vezessük be a következő elnevezéseket. Egy lineáris egyenletrendszer x_j változóját kötött változónak nevezzük, ha a j-dik oszlopban van főelem. Ellenkező esetben azt mondjuk, hogy x_j szabad változó. Ha nincsenek szabad változók, akkor az esetleg előforduló $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ alakú egyenletek elhagyása után olyan egyenletrendszert kapunk, melyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával, és ennek az egyenletrendszernek a mátrixa olyan diagonális mátrix, melynek főátlójában minden elem nullától különböző. Ekkor az egyértelmű megoldást megkaphatjuk, ha az utolsó egyenletből meghatározzuk az x_n ismeretlen értékét, majd ezt behelyettesítve az utolsó előtti egyenletbe, abból kifejezzük az x_{n-1} értékét. Folytatva ezt az eljárást, megkapjuk a lineáris egyenletrendszer egyetlen megoldását. Ha vannak szabad változók, akkor azoknak tetszőleges értéket adva, átrendezés után az előző esetnek megfelelő alakot kapunk, amelyből a kötött változók egyértelműen kifelyezhetők. Mivel a szabad változók helyére az alaptest tetszőleges elemét beírhatjuk, ezért az eredeti egyenletrendszernek ebben az esetben több megoldása, végtelen sok elemet tartalmazó test esetén végtelen sok megoldása van.

Feladat Gauss-módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$\begin{array}{cccll} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 6 \\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert!

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 2 & -1 & 2 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor kétszeresét, a harmadik sorból pedig az első sor háromszorosát. Eredményként a következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & -5 & 0 & | & -10 \\ 0 & -5 & -4 & | & -22 \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a harmadik sorból a második sort! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 8 \\ 0 & -5 & 0 & | & -10 \\ 0 & 0 & -4 & | & -12 \end{bmatrix}.$$

Az ezen mátrixhoz tartozó, az eredetivel ekvivalens lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 8 \\ & -5x_2 & & = & -10 \\ & & -4x_3 & = & -12 \end{array}$$

melynek megoldása: $x_3 = 3, x_2 = 2, x_1 = 1$.

A Gauss-Jordan-módszer. A Gauss-Jordan-módszer annyiban különbözik a Gauss-módszertől, hogy a lineáris egyenletrendszeren olyan elemi átalakításokat hajtunk végre, amelyek az egyenletrendszer mátrixát úgy hozza lépcsős alakra, hogy nem csak a főelemek alatt, hanem a főelemek feletti elemeket is kinullázuk (ha van a főelem felett elem).

Példa A Gauss-Jordan módszerrel oldjuk meg a valós számok teste feletti

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert!

A lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & | & 5 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Cseréljük fel a két sort (ez annak felel meg, hogy az egyenletrendszerben felcseréljük a két egyenletet)! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor kétszeresét! A keletkezett mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 5 & -1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Adjuk az első sorhoz a második sor 1/5-ét! A keletkezett mátrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/5 & 8/5 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Az ehhez tartozó, az eredetivel ekvivalens egyenletrendszer:

$$\begin{array}{lllll} x_1 & & +4/5x_3 & = & 8/5 \\ & +5x_2 & -x_3 & = & 3. \end{array}$$

Az x_1 és x_2 kötött változók, az x_3 pedig szabad változó. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van: $x_1 = -4/5x_3 + 8/5$, $x_2 = 1/5x_3 + 3/5$. A lineáris egyenletrendszer x_1, x_2, x_3 megoldásait úgy is tekinthetjük, mint egy térbeli vektor három koordinátája, azaz azt is mondhatjuk, hogy a lineáris egyenletrendszer megoldásai az

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 8/5 \\ 3/5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

térbeli vektorok.

A következő szakaszban bebizonyítjuk a Cramer szabály néven ismert tételt, amely egy módszert ad egy n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó olyan egyenletrendszerek egyértelmű megoldásának meghatározására, amelyek mátrixának determinánsa nem egyenlő a nullával.

5.4. A Cramer-szabály

Ebben a fejezetben egy speciális egyenletrendszerre adunk megoldást.

5.6. Tétel *(A Cramer-szabály) Ha az n egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó*

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

lineáris egyenletrendszer

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrixa reguláris, akkor az egyenletrendszer megoldható, mégpedig egyértelműen, és a megoldást a következő képlet szolgáltatja:

$$x_k = \frac{det\mathbf{A}_k}{det\mathbf{A}} \; (k = 1, \dots, n),$$

ahol

$$det\mathbf{A}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(az $\mathbf{A}_k$ mátrixot (az un. k-dik módosított mátrixot) az $\mathbf{A}$ mátrixból úgy származtatjuk, hogy annak k-dik oszlopa helyére beírjuk az egyenletrendszer konstansainak oszlopvektorát).

Bizonyítás. A vizsgált egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja

$$\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b},$$

ahol $\underline{x}$ jelöli az $x_1, \dots, x_n$ ismeretlenekből (mint szimbólumokból) álló oszlopvektort, $\underline{b}$ pedig jelöli az egyenletrendszer $b_1, \dots, b_n$ konstansainak oszlopvektorát.

Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix a feltétel szerint reguláris, ezért létezik inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Megszorozva ezzel az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenlőséget balról, azt kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underline{x} = \mathbf{A}^{-1}\underline{b} = \frac{1}{det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy

$$x_k = \frac{1}{det(\mathbf{A})}(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}),$$

amelyben a

$$b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \cdots + b_n A_{nk}$$

szorzatösszeg megegyezik az

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

mátrix k-dik oszlopa szerinti kifejtésével, ami viszont (a Kifejtési tétel szerint) egyenlő $det(\mathbf{A}_k)$-val. Így

$$x_k = \frac{det\mathbf{A}_k}{det\mathbf{A}} \; (k = 1, \ldots, n).$$

□

5.7. Tétel *Egy olyan lineáris egyenletrendszer, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixa reguláris.*

Bizonyítás. A Tétel **??** miatt az egyenletrendszer akkor és csak akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának rangja és kiegészített mátrixának rangja egyenlő, és ez a közös rang megegyezik az ismeretlenek számával. Ez a mi esetünkben akkor és csak akkor teljesül, ha az egyenletrendszer mátrixa reguláris. □

5.5. Homogén lineáris egyenletrendszerek

5.8. Definíció *Egy lineáris egyenletrendszert homogén lineáris egyenletrendszernek nevezünk ha az egyenletrendszer konstansainak mindegyike az F test nulleleme; ellenkező esetben inhomogén lineáris egyenletrendszerről beszélünk.*

Egy homogén lineáris egyenletrendszernek az

$$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$$

elem n-es mindig megoldása; ezt az egyenletrendszer triviális megoldásának nevezzük. Ezért a homogén lineáris egyenletrendszereknél igazából az a probléma, hogy mikor van a triviálistól különböző megoldása. A **??** Tétel alapján egyszerűen adódik a következő eredmény.

5.9. Tétel *Egy homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletrendszer mátrixának rangja kisebb az ismeretlenek számánál.*

A következő tétel egy homogén lineáris egyenletrendszer összes megoldásainak halmazával kapcsolatos.

5.10. Tétel *Egy m egyenletből álló, n ismeretlent tartalmazó $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmaza az F^n vektortér egy altere.*

Bizonítás. Jelölje $H \subseteq F^n$ az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát. $H \neq \emptyset$, mert a nullvektor (azaz a triviális megoldás) eleme H-nak. Legyenek

$$\underline{a}, \underline{b} \in H$$

tetszőleges vektorok. Akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ esetén

$$\mathbf{A}(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \alpha(\mathbf{A}\underline{a}) + \beta(\mathbf{A}\underline{b}) = \underline{0}.$$

Tehát

$$\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} \in H.$$

A 2.30. Tétel miatt H az F^n vektortér egy altere. $\square$

5.11. Definíció *Egy $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszeren (más szavakkal: a lineáris egyenletrendszer homogén részén) az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszert értjük.*

A következő tétel azt mutatja meg, hogy hogyan kaphatjuk meg egy lineáris egyenletrendszer összes megoldását (azaz az un általános megoldását) a homogén rész általános megoldása és az egyenletrendszer egy (u. partikuláris) megoldásának segítségével.

5.12. Tétel *Jelölje I az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszer megoldásainak, H pedig a lineáris egyenletrendszerhez tartozó homogén lineáris egyenletrendszer megoldásainak halmazát. Akkor $I = H + \underline{c}$, ahol $\underline{c}$ az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer egy (un. partikuláris) megoldása.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{a} \in H$ tetszőleges. Akkor

$$\mathbf{A}(\underline{a} + \underline{c}) = (\mathbf{A}\underline{a}) + (\mathbf{A}\underline{c}) = \underline{0} + \underline{b} = \underline{b},$$

amiből

$$H + \underline{c} \subseteq I$$

következik.

Legyen $\underline{d} \in I$ tetszőleges. Akkor

$$\underline{d} = (\underline{d} - \underline{c}) + \underline{c}.$$

Mivel

$$\mathbf{A}(\underline{d} - \underline{c}) = (\mathbf{A}\underline{d}) - (\mathbf{A}\underline{c}) = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0},$$

ezért $\underline{d} \in H + \underline{c}$, amiből

$$I \subseteq H + \underline{c}$$

következik. □

5.13. Tétel *Egy olyan homogén lineáris egyenletrendszernek, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlenek számával akkor és csak akkor van a triviálistól különböző megoldása, ha az egyenletredszer mátrixa szinguláris.*

Bizonyítás. A Tétel 5.7. felhasználásával az állítás nyílvánvaló. □

Példa Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ vektortérnek az $\mathbb{R}^2$ vektortérbe való

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + y - z \\ 3x - y + 5z \end{bmatrix}$$

lineáris leképezés képterének és magterének egy-egy bázisát!

Megoldás. Jelölje $\mathbf{A}$ a lineáris leképezésnek azt a mátrixát, amely a vektorterek standard bázisaihoz tartoznak. Akkor

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

A lineáris leképezés képtere az összes $\mathbb{R}^3$-beli

$$\begin{bmatrix} x+y-z \\ 3x-y+5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} z$$

vektorok altere, amely altér megegyezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorai által kifeszített altérrel, aminek egy bázisa az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektoraiból álló vektorrendszer egy maximálisan lineárisan független részrendszere. Vizsgáljuk az $\mathbf{A}$ mátrix rangját. Az $\mathbf{A}$ soraira alkalmazott elemi átalakításokkal az $\mathbf{A}$ mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

alakra hozható. Ebből látszik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix rangja 2. Mivel például az első két oszlop által meghatározott másodrendű aldetermináns nem nulla, ezért az első két oszlopvektorból álló vektorrendszer maximálisan lineárisan független. Így az $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektorok a képtér egy bázisát alkotják.

A dimenziótétel miatt a magtér dimenziója 1. A magtér vektorai pontosan azok az $\mathbb{R}^3$-beli

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vektorok, amelyekre $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ teljesül, azaz az $\mathbf{A}$ mátrixú homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai. A Gauss-módszer alkalmazásával az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer

$$\begin{array}{rrrcl} x & +y & -z & = & 0 \\ & -4y & +8z & = & 0 \end{array}$$

alakra hozható. Ebből $y = 2z$ és $x = -z$ adódik, azaz a magtér összes vektora kifejezhető $\begin{bmatrix} -z \\ 2z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ módon. Tehát a $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektor a magtér egy bázisa.

6. fejezet

Mátrixok sajátértékei, sajátvektorai

Ebben a fejezetben a mátrixok sajátértékeivel és sajátvektoraival foglalkozunk, előkészítve a hetedik fejezetnek a vektorterek lineáris transzformációihoz tartozó sajátértékekkel és sajátvektorokkal kapcsolatos vizsgálatokat.

6.1. A mátrix sajátértékeinek és sajátvektorainak fogalma

6.1. Definíció *Egy F test valamely λ elemét az F test feletti $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékének nevezzük, ha megadható olyan $\underline{x} \in F^n$ vektor, amelyre teljesül az*

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$$

egyenlőség. A feltételnek eleget tevő $\underline{x}$ vektorokat az A mátrix sajátvektorainak (pontosabban, a λ sajátértékhez tartozó sajátvektoroknak) nevezzük.

6.2. Megjegyzés *Adott $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix esetén F^n minden vektora legfeljebb egy sajátértékhez tartozó sajátvektor lehet. Ugyanis, ha $\underline{x}$ egy $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix $\alpha, \beta \in F$ sajátértékekhez tartozó sajátvektor, akkor*

$$\alpha\underline{x} = \mathbf{A}\underline{x} = \beta\underline{x},$$

amiből $\underline{x} \neq \underline{0}$ miatt $\alpha = \beta$ következik.

6.3. Tétel *Tetszőleges $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrix tetszőleges sajátértékéhez tartozó sajátvektorok a $\underline{0}$ vektorral együtt az F^n vektortér egy alterét alkotják.*

Bizonyítás. Jelölje W az F^n vektortér azon részhalmazát, amely a $\underline{0}$ vektorból és az $\mathbf{A}$ mátrix valamely λ sajátértékéhez tartozó összes sajátvektoraiból áll. Tetszőleges $\underline{x}, \underline{y} \in W$ és tetszőleges $\xi, \eta \in F$ skalárok esetén

$$\mathbf{A}(\xi\underline{x} + \eta\underline{y}) = \xi(\mathbf{A}\underline{x}) + \eta(\mathbf{A}\underline{y}) = \xi(\lambda\underline{x}) + \eta(\lambda\underline{y}) = \lambda(\xi\underline{x} + \eta\underline{y}).$$

Tehát

$$\xi\underline{x} + \eta\underline{y} \in W.$$

A 2.30. Tétel miatt W az F^n vektortér egy altere. □

6.4. Definíció *Egy $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékeiből, illetve a nullvektorból álló alteret az $\mathbf{A}$ mátrix λ sajátértékhez tartozó un. sajátaltérnek nevezzük. Ennek dimenzióját a λ sajátérték geometriai multiplicitásának nevezzük.*

6.2. Mátrix karakterisztikus egyenlete

6.5. Definíció *Legyen $\mathbf{A}$ egy F test feletti $n \times n$-típusú (négyzetes) mátrix. A*

$$k_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n|\mathbf{A} - x\mathbf{E}|$$

polinomot az A mátrix karakterisztikus polinomjának, az

$$|\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = 0$$

egyenletet pedig az A mátrix karakterisztikus egyenletének nevezzük.

Az előző definícióban $|\mathbf{A} - x\mathbf{E}|$ az $[\mathbf{A} - x\mathbf{E}]$ mátrix determinánsát jelöli. Tehát egy $n \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, illetve karakterisztikus egyenlete

$$k_{\mathbf{A}}(x) = (-1)^n det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}),$$

illetve

$$det(\mathbf{A} - x\mathbf{E}) = 0$$

módon is felírható.

6.6. Tétel *Egy F test valamely λ eleme akkor és csak akkor sajátértéke egy F test feletti A mátrixnak, ha λ gyöke az A mátrix karakterisztikus egyenletének, azaz teljesül rá az $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0$ egyenlőség.*

Bizonyítás. $\lambda \in F$ akkor és csak akkor sajátértéke egy $\mathbf{A} \in M_n(F)$ mátrixnak, ha van olyan $\underline{0} \neq \underline{x} \in F^n$ vektor, hogy

$$\mathbf{A}\underline{x} = \lambda\underline{x} = \lambda\mathbf{E}\underline{x},$$

azaz

$$[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]\underline{x} = \underline{0}.$$

Ezen utóbbi kifejezés egy homogén lineáris egyenletrendszer mátrixszorzatos alakja. λ tehát akkor és csak akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha ennek az egyenletrendszernek van nem-triviális megoldása, ami az 5.7. Tétel miatt azzal ekvivalens, hogy az $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]$ mátrix szinguláris, azaz

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = 0.$$

□

6.7. Megjegyzés *Egy $\mathbf{A} \in \mathbf{M_n}(\mathbf{F})$ mátrix sajátértékeinek, illetve sajátvektorainak meghatározását tehát azzal kezdjük, hogy meghatározzuk a mátrix karakterisztikus egyenletének F testbeli gyökeit. Ha vannak ilyenek (jelöljön egy sajátértéket λ), akkor a λ-hoz tartozó sajátvektorok az $[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}]\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer nem-triviális megoldásvektorai lesznek. A megoldásvektorok halmaza (a sajátvektorok halmaza hozzávéve a nullvektort) a 6.3. Tétel miatt az F^n vektortér egy altere, ennek dimenziója, azaz a λ sajátérték geometriai multiplicitása megegyezik a fenti homogén lineáris egyenletrendszer megoldása során szabadon választható ismeretlenek számával (lásd a Gauss-módszert).*

6.8. Megjegyzés *Egy mátrixnak nincs mindig sajátértéke. Például az*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

mátrix karakterisztikus egyenlete

$$x^2 + 1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek nincs gyöke a valós számok $\mathbb{R}$ halmazában (testében), ezért az $\mathbf{A}$ mátrixnak nincs sajátértéke $\mathbb{R}$-ben.

Ha az $\mathbf{A}$ mátrixot, mint a komplex számok $\mathbb{C}$ teste feletti mátrixot tekintjük, akkor karakterisztikus egyenletének megoldásai $\mathbb{C}$-ben $\pm i$, és így az $\mathbf{A}$ mátrix sajátértékei $\pm i$.

6.9. Definíció *Egy* $\mathbf{A}$ *mátrix valamely* λ *sajátértékének algebrai multiplicitásán azt a pozitív egász számot értjük, amely megegyezik* λ*-nak, mint a* $|\mathbf{A} - x\mathbf{E}| = 0$ *karakterisztikus egyenlet gyökének multiplicitásával. Egy mátrix spektrumán a sajátértékeiből álló rendszert értjük, mindegyiket annyiszor véve, amennyi annak algebrai multiplicitása.*

6.10. Megjegyzés *Bizonyítás nélkül közöljük, hogy egy* $\mathbf{A}$ *mátrix valamely* λ *sajátértékének geometriai multiplicitása kisebb vagy egyenlő mint az algebrai multiplicitása.*

Példa. Az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

felső háromszögmátrix karakterisztikus egyenlete $(1-\lambda)^3 = 0$, így egyetlen sajátértéke van; ez egyenlő 1-gyel. Ennek a sajátértéknek 3 az algebrai multiplicitása. A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ sajátvektorokra

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

teljesül, amiből $z = 0$ adódik (x és y pedig tetszőleges olyan valós számok, amelyek egyike nem nulla). Így a sajátvektorra

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

adódik. Tehát a $\lambda = 1$ sajátérték saját altere az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített altér. Ennek dimenziója 2, így a $\lambda = 1$ sajátérték geometriai multiplicitása 2. Tehát a geometriai multiplicitás kisebb az algebrai multiplicitásnál.

6.3. Mátrixok hasonlósága

6.11. Definíció *Legyenek* $\mathbf{A}$ *és* $\mathbf{B}$ *egy* F *test elemiből képezett, azonos típusú négyzetes mátrixok! Akkor mondjuk, hogy* $\mathbf{A}$ *hasonló* $\mathbf{B}$*-hez, ha megadható olyan* F *elemeiből képezett reguláris* $\mathbf{C}$ *mátrix, hogy* $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ *teljesül.*

(1) Mivel tetszőleges négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixra $\mathbf{A} = \mathbf{EAE}$ teljesül, és mert $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1}$, ezért minden mátrix hasonló önmagához. Más szavakkal: a mátrixok hasonlósága reflexív reláció.

(2) Az $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$ egyenlőség ekvivalens a $\mathbf{CAC}^{-1} = \mathbf{B}$ egyenlőséggel, ami $\mathbf{B} = (\mathbf{C}^{-1})^{-1}\mathbf{AC}^{-1}$ alakban is írható, és ami annyit jelent, hogy $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Így tetszőleges $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok esetén $\mathbf{A}$ akkor és csak akkor hasonló $\mathbf{B}$-hez, ha $\mathbf{B}$ hasonló $\mathbf{A}$-hoz. Azért a hasonlóság definíciójában a sorrendnek nincs jelentősége. Más szavakkal: a mátrixok hasonlósága szimmetrikus reláció.

(3) Ha az $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ mátrixok esetén $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ hasonló mátrixok, továbbá $\mathbf{B}$ és $\mathbf{C}$ is hasonló mátrixok, akkor megadhatók olyan reguláris $\mathbf{X}$ és $\mathbf{Y}$ mátrixok, amelyekre $\mathbf{A} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{BX} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{CYX}$ teljesül. A determinánsok szorzástétele miatt $\mathbf{YX}$ reguláris mátrix. Továbbá $(\mathbf{YX})^{-1} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}$. Így $\mathbf{A} = (\mathbf{YX})^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{YX})$, ami annyit jelent, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{C}$ hasonló mátrixok. Tehát a mátrixok hasonlósága tranzitív reláció.

6.12. Tétel *Hasonló mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek, így hasonló mátrixok spektruma közös.*

Bizonyítás. Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ egy F test elemeiből képezett hasonló mátrixok. Akkor van olyan F feletti reguláris $\mathbf{C}$ mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC}$. Ezért az F tetszőleges λ elemére

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{BC} - \mathbf{C}^{-1}(\lambda\mathbf{E})\mathbf{C}| =$$
$$= |\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{C}| = |\mathbf{C}^{-1}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}||\mathbf{C}| = |\mathbf{C}^{-1}||\mathbf{C}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| =$$
$$= |\mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{E}||\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}| = |\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}|.$$

Így

$$k_{\mathbf{A}}(x) = k_{\mathbf{B}}(x),$$

azaz az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok karakterisztikus polinomjai megegyeznek. Ebből már következik, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixok spektruma közös. □

6.13. Megjegyzés *A 6.12. Tétel állításának megfordítása nem igaz. Például a valós elemű*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrixok esetén mindkét mátrix karakterisztikus polinomja x^2-2x+1, a mátrixok mégsem hasonlóak, hiszen az $\mathbf{E}$ egységmátrix csak önmagával hasonló.

7. fejezet

Lineáris leképezések

7.1. Műveletek lineáris leképezések között

7.1. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ_1, φ_2 lineáris leképezései esetén $\varphi_1 + \varphi_2$ is V_1-nek V_2-be való lineáris leképezése, ahol a $\varphi_1 + \varphi_2$ leképezés a következőképpen van értelmezve:*

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \ : \ \underline{a} \ \mapsto \ \varphi_1(\underline{a}) + \varphi_2(\underline{a}), \quad \underline{a} \in V_1.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ és tetszőleges $\alpha, \beta \in F$ esetén

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) + \varphi_2(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) =$$

$$\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b}) + \alpha\varphi_2(\underline{a}) + \beta\varphi_2(\underline{b}) =$$
$$\alpha(\varphi_1(\underline{a}) + \varphi_2(\underline{a})) + \beta(\varphi_1(\underline{b}) + \varphi_2(\underline{b})) =$$
$$\alpha(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{a}) + \beta(\varphi_1 + \varphi_2)(\underline{b}).$$

Tehát, a 2.40. Tétel miatt, $\varphi_1 + \varphi_2$ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. □

7.2. Definíció *A 7.1. Tételben definiált $\varphi_1 + \varphi_2$ lineáris leképezést a φ_1 és φ_2 lineáris leképezések összegének nevezzük.*

7.3. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektortererk. Ha φ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineári leképezése, akkor*

$$-\varphi : \underline{a} \mapsto (-1)(\varphi(\underline{a}))\ \underline{a} \in V_1$$

is lineáris leképezése V_1-nek V_2-be.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok, $\alpha, \beta \in F$ pedig tetszőleges skalárok. Akkor

$$(-\varphi)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = (-1)(\varphi(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})) = (-1)(\alpha\varphi(\underline{a}) + \beta\varphi(\underline{b})) =$$

$$= (-1)(\alpha\varphi(\underline{a})) + (-1)(\beta\varphi(\underline{b})) = \alpha((-1)\varphi(\underline{a})) + \beta((-1)(\varphi(\underline{b})) =$$

$$= \alpha(-\varphi(\underline{a})) + \beta(-(\varphi(\underline{b})).$$

Tehát $-\varphi$ a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése. □

7.4. Definíció *A 7.3. Tételben definiált $-\varphi$ lineáris leképezést a $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés ellentettjének nevezzük.*

Bizonyítás nélkül közöljük az alábbi tételt.

7.5. Tétel *Tetszőleges F test feletti tetszőleges V_1 és V_2 vektorterek esetén, V_1-nek V_2-be való összes lineáris leképezéseinek $Hom(V_1, V_2)$ halmaza kommutatív csoportot alkot a lineáris leképezések (előzőekben definiált) összeadására nézve. Ennek a csoportnak a nulleleme az a leképezés, amely V_1 minden eleméhez a V_2 nullelemét rendeli. Egy $\varphi : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezés ezen csoportbeli ellentettje megegyezik φ-nek az előző tételben definiált $-\varphi$ ellentettjével.*

7.6. Tétel *Legyenek V_1 és V_2 ugyanazon F test feletti vektorterek. V_1-nek V_2-be való tetszőleges φ lineáris leképezése és tetszőleges $\alpha \in F$ skalár esetén az*

$$(\alpha\varphi) : \underline{a} \mapsto \alpha(\varphi(\underline{a})), \quad a \in V_1$$

módon definiált leképezés a V_1 vektortérnek a V_2 vektortérbe való lineáris leképezése.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok és $\xi, \eta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$(\alpha\varphi)(\xi\underline{a} + \eta\underline{b}) = \alpha(\varphi(\xi\underline{a} + \eta\underline{b})) =$$
$$= \alpha(\xi\varphi(\underline{a}) + \eta\varphi(\underline{b})) = (\alpha\xi)\varphi(\underline{a}) + (\alpha\eta)\varphi(\underline{b}) =$$
$$= \xi(\alpha(\varphi(\underline{a})) + \eta(\alpha\varphi(\underline{b}) = \xi(\alpha\varphi)(\underline{a})) + \eta(\alpha\varphi)(\underline{b})$$

□

7.7. Definíció *A 7.6. Tételben szereplő $\alpha\varphi$ lineáris leképezést a φ lineáris leképezés α skalárral képezett szorzatának nevezzük.*

7.8. Tétel *Tetszőleges F test feletti V_1 és V_2 vektorterek esetén $Hom(V_1, V_2)$ vektorteret alkot F felett (a lineáris leképezések összeadására, illetve a lineáris leképezések skalárral képezett szorzására nézve).*

Bizonyítás. A 7.5. Tétel és a lineáris leképezések skalárral képezett szorzatának definíciója alapján egyszerű. □

7.9. Tétel *Legyenek V_1, V_2, V_3 ugyanazon F test feletti vektorterek. Ha φ_1 a V_1-nek V_2-be, φ_2 pedig V_2-nek V_3-ba való lineáris leképezései, akkor a*

$$(\varphi_2\varphi_1)(\underline{a}) = \varphi_2(\varphi_1(\underline{a})), \quad a \in V_1$$

módon definiált leképezés a V_1 vektortérnek a V_3 vektortérbe való lineáris leképezése.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}, \underline{b} \in V_1$ tetszőleges vektorok és $\alpha, \beta \in F$ tetszőleges skalárok. Akkor

$$(\varphi_2\varphi_1)(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}) = \varphi_2(\varphi_1(\alpha\underline{a} + \beta\underline{b})) = \varphi_2(\alpha\varphi_1(\underline{a}) + \beta\varphi_1(\underline{b})) =$$
$$= \alpha\varphi_2(\varphi_1(\underline{a})) + \beta\varphi_2(\varphi_1(\underline{b})) = \alpha(\varphi_2\varphi_1)(\underline{a}) + \beta(\varphi_2\varphi_1)(\underline{b}).$$

□

7.10. Definíció *A 7.9. Tételben definiált $\varphi_2\varphi_1 \in Hom(V_1, V_3)$ lineáris leképezést a szóban forgó lineáris leképezések szorzatának nevezzük.*

7.11. Tétel *Tetszőleges F test feletti V vektortér esetén $Hom(V, V)$ gyűrűt alkot a lineáris transzformációk összeadására és szorzására nézve.*

Bizonyítás. A 7.5. Tétel miatt $(Hom(V, V); +)$ egy kommutatív csoport. Igen egyszerűen igazolható, hogy $(Hom(V, V)$ félcsoport a lineáris leképezések szorzására nézve. Annak igazolása, hogy a lineáris leképezések szorzása disztributív mindkét oldalról a lineáris leképezések összeadására nézve, technikai jellegű, azt az olvasóra bízzuk. □

7.2. Lineáris leképezések mátrixa

7.12. Tétel *Legyenek V_1, illetve V_2 ugyanazon F test feletti n, illetve m dimenziós vektorterek. Akkor V_1-nek V_2-be való tetszőlege φ lineáris leképezéséhez és V_1, illetve V_2 egy-egy rgzített $\mathcal{B}_1$, illetve $\mathcal{B}_2$ bázisához van egy és csak egy olyan $m \times n$-típusú, F feletti $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix, hogy V_1 tetszőleges $\underline{a}$ vektora esetén*

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1}$$

teljesül. Más szavakkal, a $\varphi(\underline{a}) \in V_2$ vektor $\mathcal{B}_2$ bázis szerinti koordinátás alakját (mint egy $m \times 1$ típusú mátrixot) úgy is megkaphatjuk, hogy képezzük az $m \times n$-típusú $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrixnak az $\underline{a}$ vektor $\mathcal{B}_1$ bázis szerinti koordinátás alakjával (mint egy $n \times 1$-típusú mátrixszal) való szorzatát.

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}_1 = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$. Jelölje $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ azt az $m \times n$-típusú mátrixot, melynek j-dik osztolvektora egyenlő a $\varphi(\underline{b}_j) \in V_2$ vektor $\mathcal{B}_2$ bázis szerinti koordinátás alakjával. Legyen $\underline{a} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{b}_j$ a V_1 vektortér tetszőleges vektora. Akkor

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = \left[\varphi(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underline{b}_j)\right]_{\mathcal{B}_2} = \left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(\underline{b}_j)\right]_{\mathcal{B}_2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j [\varphi(\underline{b}_j]_{\mathcal{B}_2}) = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1}.$$

Ha egy $m \times n$-típusú $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ mátrixra is teljesül, hogy V_1 tetszőleges $\underline{a}$ vektora esetén

$$[\varphi(\underline{a})]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{C}[\underline{a}]_{\mathcal{B}_1},$$

akkor minden $\underline{b}_j \in \mathcal{B}_1$ vektorra is teljesül, és ezért minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre

$$[\varphi(\underline{b}_j)]_{\mathcal{B}_2} = \mathbf{C}[\underline{b}_j]_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix},$$

azaz a $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix j-dik oszlopa minden j indexre megegyezik a $\mathbf{C}$ mátrix j-dik oszlopával, amiből következik, hogy

$$\mathbf{C} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}.$$

Tehát egy és csak egy olyan mátrix létezik, amely teljesíti a tételbeli feltételeket; ez a mátrix a $[\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}$ mátrix. $\square$

7.13. Tétel *Legyenek V_1, V_2 és V_3 ugyanazon F test feletti vektorterek rendre a $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ és $\mathcal{B}_3$ bázisokkal. Akkor tetszőleges $\varphi, \eta : V_1 \mapsto V_2$ és tetszőleges $\xi : V_2 \mapsto V_3$ lineáris leképezések esetén*

$$[\varphi + \eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} = [\varphi]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1} + [\eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1},$$
$$[\xi\eta]_{\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_1} = [\xi]_{\mathcal{B}_3/\mathcal{B}_2}[\eta]_{\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1}.$$

Más szavakkal: lineáris leképezések összegének és szorzatának mátrixa megegyezik a lineáris leképezésekhez tartozó mátrixok összegével és (megfelelő sorrendben vett) szorzatával.

7.3. Bázistranszformáció

7.14. Definíció *Egy V vektortér önmagába való φ lineáris leképezéseit lineáris transzformációknak nevezzük. Ha $\mathcal{B}$ a V egy bázisa, akkor φ ezen bázis szerinti mátrixát $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ módon fogjuk jelölni.*

7.15. Tétel *Egy F test feletti n-dimenziós V vektortér tetszőleges τ lineáris transzformációja és tetszőleges $\mathcal{B}$ bázisa esetén a következő feltételek egymással ekvivalensek.*

1. *A $\mathcal{B}$ bázis τ-szerinti képe is bázisa V-nek.*

2. $[\tau]_{\mathcal{B}}$ reguláris mátrix.

Bizonyítás. Mivel egy négyzetes mátrix akkor és csak akkor reguláris, ha oszlopvektorai lineárisan függetlenek, ezért az állítás a 2.52. Tétel következménye. □

7.16. Definíció *Egy V vektortér valamely τ lineáris transzformációját bázistranszformációnak nevezzük, ha V-nek van olyan bázisa, melynek τ szerinti képe bázisa V-nek.*

7.17. Tétel *Legyen V egy F test feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, illetve $\mathcal{B}' = \{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ a V két bázisa. Legyen τ a V vektortér azon bázistranszformációja, amelyre*

$$e'_i = \tau(e_i), \quad i = 1, \dots, n$$

teljesül. Akkor tetszőleges $\underline{a} \in V$ vektor esetén

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}}.$$

Bizonyítás. Legyen $\underline{a} \in V$ tetszőleges vektor. Az $\underline{a}$ alakja a $\mathcal{B}'$ bázisban (valamely $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n \in F$ skalárokkal):

$$\underline{a} = \alpha'_1\underline{e}'_1 + \dots + \alpha'_n\underline{e}'_n = \alpha'_1\tau(\underline{e}_1) + \dots + \alpha'_n\tau(\underline{e}_n).$$

Ezért (használva a 7.12. Tételt és a 2.51. Tételt is)

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}} = \alpha'_1[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_1]_{\mathcal{B}} + \dots + \alpha'_n[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_n]_{\mathcal{B}} =$$

$$= [\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{a}]_{\mathcal{B}'}.$$

Ebből már adódik az

$$[\underline{a}]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\underline{a}]_{\mathcal{B}}$$

egyenlőség, mivel $[\tau]_{\mathcal{B}}$ reguláris (7.15. Tétel), így van inverze. □

7.18. Tétel *Legyen V egy F test feletti n-dimenziós vektortér, és legyen $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$, illetve $\mathcal{B}' = \{\underline{e}'_1, \dots, \underline{e}'_n\}$ a V két bázisa. Legyen τ a V vektortér azon bázistranszformációja, amelyre*

$$\underline{e}'_i = \tau(\underline{e}_i), \quad i = 1, \dots, n$$

teljesül. Akkor a V vektortér tetszőleges φ lineáris transzformációja esetén

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}.$$

Bizonyítás. Legyen φ a V vektortér egy lineáris transzformációja. A 7.12. Tétel szerint φ mátrixa a $\mathcal{B}'$ bázisban a következő alakú:

$$[\varphi]_{\mathcal{B}'} = [[\varphi(\underline{e}'_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [\varphi(\underline{e}'_n)]_{\mathcal{B}'}] =$$

$$[[\varphi\tau(\underline{e}_1)]_{\mathcal{B}'}, \ldots, [\varphi\tau(\underline{e}_n)]_{\mathcal{B}'}] =$$

$$[[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi\tau(\underline{e}_1)]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi\tau(\underline{e}_n)]_{\mathcal{B}}] =$$

$$[[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_1]_{\mathcal{B}}, \ldots, [\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_n]_{\mathcal{B}} =$$

$$[\tau]_{\mathcal{B}}^{-1}[\varphi]_{\mathcal{B}}[\tau]_{\mathcal{B}}.$$

Közben felhasználtuk a következő két tételeket is: 7.17. Tétel, 7.13. Tétel. □

A 7.18. Tétel szerint egy lineáris tarnszformáció különböző bázisok szerinti mátrixai egymáshoz hasonló mátrixok.

Megfogalmazunk még egy következményt.

7.19. Tétel *Egy F test feletti véges dimenziós V vektortér valamely τ lineáris transzformációja akkor és csak akkor bázistranszformáció, ha V bármely bázisának τ szerinti képe bázisa V-nek.*

Bizonyítás. A 7.15. Tétel, a 7.18. Tétel és a 4.13. Tétel alapján nyílvánvaló. □

7.4. Lineáris transzformációk sajátértékei, sajátvektorai

7.20. Definíció *Legyen V egy F egy test feletti vektortér, és φ a V egy lineáris transzformációja. Az F valamely λ elemét a φ egy sajátértékének nevezzük, ha megadható olyan $\underline{0} \neq \underline{x} \in V$ vektor, hogy*

$$\varphi(\underline{x}) = \lambda \underline{x}.$$

A fenti egyenlőségben szereplő $\underline{x} \neq \underline{0}$ vektorokat a φ lineáris transzformáció λ sajátértékéhez tartozó sajátvektorának nevezzük.

7.21. Tétel *Egy F test feletti V vektortér valamely φ lineáris transzformációjának sajátértékei megegyeznek φ tetszőleges V-beli $\mathcal{B}$ bázisához tartozó mátrixának sajátértékeivel.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{B}$ a V vektortér egy bázisa. Mivel φ-nek a V különböző bázisai szerinti mátrixai hasonlók egymáshoz, és mivel hasonló mátrixok spektruma közös, ezért elég azt megmutatni, hogy φ sajátértékei megegyeznek a $\mathcal{B}$ bázis szerinti mátrixának sajátértékeivel. Az F valamely λ eleme akkor és csak akkor sajátértéke φ-nek, ha

$$\varphi(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$$

teljesül valamely $\underline{0} \neq \underline{x} \in V$ vektorra. Ezen utóbbi egyenlőség azzal ekvivalens, hogy

$$[\varphi(\underline{x})]_{\mathcal{B}} = [\lambda \underline{x}]_{\mathcal{B}},$$

azaz

$$[\varphi]_{\mathcal{B}}[\underline{x}]_{\mathcal{B}} = \lambda [\underline{x}]_{\mathcal{B}},$$

ami annyit jelent, hogy λ sajátértéke a $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ mátrixnak. □

7.22. Tétel *Egy V vektortér tetszőleges φ lineáris transzformációjának V valamely $\mathcal{B}$ bázisához tartozó mátrixa akkor és csak akkor diagonális, ha $\mathcal{B}$ minden vektora a φ egy-egy sajátvektora. Ha ez a helyzet, akkor a diagonális mátrix főátlójában álló elemek a φ sajátértékei (mindegyik annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása).*

Bizonyítás. Legyen $[\varphi]_{\mathcal{B}}$ diagonális a V egy

$$\mathcal{B}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$$

bázisában. Ha a főátlóban álló elemek rendre $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, azaz

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

akkor

$$[\varphi(\underline{e}_i)]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}}[\underline{e}_i]_{\mathcal{B}} = [\lambda_i \underline{e}_i]_{\mathcal{B}},$$

azaz

$$\varphi(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i$$

teljesül minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. Tehát a $\mathcal{B}$ bázis elemei a φ lineáris transzformáció sajátvektorai.

Fordítva, tegyük fel, hogy egy F test feletti V vektortér valamely

$$\mathcal{B}\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$$

bázisának elemei a V egy φ lineáris transzformációjának sajátvektorai. Akkor minden $i = 1, \ldots, n$ indexre

$$\varphi(\underline{e}_i) = \lambda_i \underline{e}_i$$

teljesül valamely $\lambda_i \in F$ skalárral. Ebből már világos, hogy

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

azaz φ $\mathcal{B}$ bázisbeli mátrixa diagonális. Mivel ezen diagonális mátrix karakterisztikus egyenlete

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i),$$

ezért egy-egy sajátérték annyiszor szerepel a főátlóban, amennyi az algebrai multiplicitása. $\square$

8. fejezet

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér

8.1. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér*

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

vektorainak skaláris szorzatán az

$$\underline{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

szorzatösszeget értjük.

Könnyen ellenőrízhető, hogy igaz a következő tétel:

8.2. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektoraira és tetszőleges α valós számokra az alábbiak teljesülnek:*

1. $\underline{ab} = \underline{ba}$,
2. $\underline{a}(\underline{b} + \underline{c}) = \underline{ab} + \underline{ac}$,
3. $(\alpha\underline{a})\underline{b} = \underline{a}(\alpha\underline{b}) = \alpha(\underline{ab})$.

8.3. Megjegyzés Az $\mathbb{R}^n$ vektortér vektorait oszlopvektorokként tekintettük, ezért $\mathbb{R}^n$ egy

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

vektora úgy is tekinthető, mint egy $\mathbb{R}$ feletti $n \times 1$-típusú mátrix. Ekkor ennek transzponáltja:

$$\underline{a}^T = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

egy sorvektor, azaz egy $1 \times n$-típusú mátrix. Így az $\mathbb{R}^n$ vektortér valamely

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

vektorainak skaláris szorzata

$$\underline{a}^T \underline{b} = \underline{b}^T \underline{a}$$

formában is felírható.

8.4. Definíció *Két $\mathbb{R}^n$-beli vektorról akkor mondjuk, hogy merőlegesek (ortogonálisak), ha skaláris szorzatuk 0. Egy vektorrendszert ortogonálisnak nevezzük, ha vektorai páronként ortogonálisak.*

8.5. Definíció *Egy $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektor abszolút értékén az $|\underline{a}| = \sqrt{\underline{a}^T \underline{a}}$ nemnegatív valós számot értjük. Egy $\mathbb{R}^n$-beli vektort egységvektornak nevezünk, ha abszolút értéke egyenlő 1-gyel.*

Tetszőleges $\underline{0} \neq \underline{a} \in \mathbb{R}^n$ vektorból mindig készíthetünk egy egységvektort, mégpedig úgy, hogy elosztjuk az abszolút értékével. Ezt az eljárást a vektor normálásának is szoktuk nevezni.

8.6. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden olyan ortogonális vektorrendszere, amely nem tartalmazza a nullvektort lineárisan független.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy olyan ortogonális vektorrendszere, amely nem tartalmazza a nullvektort. Tegyük fel, hogy valamely $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ valós számokkal

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n = \underline{0}.$$

Beszorozva az egyenlőséget skalárisan a $\underline{b}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ vektorral, a következő egyenlőséget kapjuk:

$$\alpha_j (\underline{b}_j^T \underline{b}_j) = 0.$$

Mivel a $\underline{b}_j$ vektor nem a nullvektor, ezért $\underline{b}_j^T \underline{b}_j = |\underline{b}_j| \neq 0$, amiből $\alpha_j = 0$ következik minden $j = 1, 2, \ldots, n$ indexre. Tehát a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ vektorrendszer lineárisan független. $\square$

8.7. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér ortonormált bázisán páronként ortogonális egységvektorokból álló bázist értünk.*

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérben azok az $\underline{e}_i$ vektorok, amelyek i-dik eleme 1, a többi elem pedig 0, ar $\mathbb{R}^n$ vektortér egy ortonormált bázisát alkotják. Ezt a bázist az $\mathbb{R}^n$ vektortér standard bázisának nevezzük. Ha külön nem említjük, akkor az $\mathbb{R}^n$ vektortér bázisán a standard bázist értjük.

8.8. Definíció *Akkor mondjuk, hogy egy V vektortér előáll a W_1 és W_2 alterek direkt összegeként, ha $W_1 \cap W_2 = \underline{0}$ és $W_1 + W_2 = V$ (ez utóbbi feltétel annyit jelent, hogy V minden vektora előáll egy W_1-beli és egy W_2-beli vektor összegeként). Ha egy V vektortér előáll valamely W_1 és W_2 alterek direkt összegeként, akkor ezt $V = W_1 \bigoplus W_2$ módon jelöljük.*

8.9. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy W alterének ortogonális kiegészítő alterén az $\mathbb{R}^n$ vektortér mindazon $\underline{a}$ vektoraiból álló $W^\perp$ alteret értjük, amely $\underline{a}$ vektorok merőlegesek a W altér minden vektorára.*

8.10. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges W altere esetén $\mathbb{R}^n = W \bigoplus W^\perp$.*

Bizonyítás. Ha $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ benne van a W és $W^\perp$ alterek metszetében, akkor $|\underline{x}|^2 = \underline{x}^T \underline{x} = 0$, azaz $\underline{x} = \underline{0}$.

Jelölje m a W altér dimenzióját. Ekkor W-nek van m elemű bázisa. Ezekből a bázisvektorokból, mint sorvektorokból készítsünk egy $m \times n$-típusú mátrixot. Ennek sortere a W altér. A mátrix nulltere a $W^\perp$ altér. A dimenziótétel miatt $dim(W^\perp) = n - m$. Legyen $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m$ a W altér egy bázisa, $\underline{b}_{m+1}, \ldots, \underline{b}_n$ a $W^\perp$ egy bázisa. Tegyük fel, hogy

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m + \alpha_{m+1} \underline{b}_{m+1} + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n = \underline{0}.$$

Akkor

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m = -\alpha_{m+1} \underline{b}_{m+1} - \cdots - \alpha_n \underline{b}_n.$$

A bal oldali vektor eleme W-nek, a jobb oldali eleme $W^\perp$-nek, így a $W \cap W^\perp = \emptyset$ miatt

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \cdots + \alpha_m \underline{b}_m = \underline{0}$$

és

$$\alpha_{m+1} \underline{b}_{m+1} + \cdots + \alpha_n \underline{b}_n = \underline{0},$$

amiből az két vektorrendszer függetlensége miatt $\alpha_i = 0$ következik minden $i = 1, \ldots, n$ indexre. Tehát $\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_m, \underline{b}_{m+1}, \ldots, \underline{b}_n$ az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ vektortér lineárisan független vektorrendszere. Így ez a vektorrendszer egy bázisa az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek. Ebből már következik, hogy $\mathbb{R}^n$ minden vektora előáll egy W-beli és egy $W^\perp$-beli vektor összegeként, azaz $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$.

8.11. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges W altere esetén $(W^\perp)^\perp = W$.*

Bizonyítás. Az világos a definícióból, hogy $W \subseteq (W^\perp)^\perp$. A fordított állítás bizonyításához tegyük fel, hogy $\underline{x} \in (W^\perp)^\perp$. Mivel $\mathbb{R}^n = W \bigoplus W^\perp$, ezért megadhatók olyan $\underline{a} \in W$ és $\underline{b} \in W^\perp$ vektorok, amelyekre $\underline{x} = \underline{a} + \underline{b}$ teljesül. Ha megszorozzuk ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát $\underline{b}$-vel, akkor $0 = \underline{b}^T \underline{x} = \underline{b}^T \underline{a} + \underline{b}^T \underline{b} = 0 + |\underline{b}|^2$, amiből $\underline{b} = \underline{0}$ következik. Így $\underline{x} = \underline{a} \in W$ Tehát $(W^\perp)^\perp \subseteq W$. A két tartalmazási relációból $(W^\perp)^\perp = W$ adódik. □

8.1. $\mathbb{R}$ feletti lineáris egyenletrendszerek

Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

egy $\mathbb{F}$ test elemeiből képezett $m \times n$-típusú mátrix. Ez a mátrix meghatározza az $\mathbb{F}^n$ vektortérnek az $\mathbb{F}^m$ vektortérbe való

$$\varphi_{\mathbf{A}} : \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \mathbf{A}\underline{x}$$

lineáris leképezését. Ennek nullterét, azaz az $\mathbb{F}^n$ vektortér $Ker\varphi_{\mathbf{A}}$ alterét az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének is nevezzük és $\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ módon jelöljük.

Jelölje az $\mathbf{A}$ mátrix i-dik $(i = 1, \ldots, m)$ sorából képezett $\underline{a}_i^* = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ vektorok által generált $\mathbb{F}^n$ vektortérbeli alteret $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ módon. Ezt az alteret a lineáris egyenletrendszer sorterének nevezzük.

8.12. Tétel *Tetszőleges $\mathbb{F}$ test elemeiből képezett $m \times n$-típusú $\mathbf{A}$ mátrix esetén $n = dim(\mathcal{N}_{\mathbf{A}}) + dim(\mathcal{S}_{\mathbf{A}})$.*

Bizonyítás. A dimenziótétel miatt $n = dim(Ker\varphi_{\mathbf{A}}) + dim(Im\varphi_{\mathbf{A}})$. Mivel $Ker\varphi_{\mathbf{A}} = \mathcal{N}_{\mathbf{A}}$, ezért $dim(Ker\varphi_{\mathbf{A}}) = dim(\mathcal{N}_{\mathbf{A}})$. Az világos, hogy a $\varphi_{\mathbf{A}}$ lineáris leképezés képtere, azaz az $\mathbb{R}^m$ vektortér $Im\varphi_{\mathbf{A}}$ altere megegyezik, az $\mathbf{A}$ matrix oszlopvektorai által kifeszített altérrel. A 4.20. Tétel szerint ennek dimenziója megegyezik a sorvektorok által kifeszített altér dimenziójával, azaz $dim(Im\varphi_{\mathbf{A}}) = dim(\mathcal{S}_{\mathbf{A}})$. Ebből már következik a tétel állítása.

8.13. Tétel *Valós számokból képezett tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix nulltere és sortere egymás ortogonális kiegészítői.*

Bizonyítás. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy $\underline{c}$ vektora akkor és csak akkor van benne az $\mathbf{A}$ mátrix nullterében, ha megoldása az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek. Így az $\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ nulltér az $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ sortér ortogonális kiegészítő altere. A 8.11. Tétel alapján viszont az $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ sortér az $\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ altér ortogonális kiegészítő altere. □

8.14. Tétel *Ha a valós számok teste feletti $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek van megoldása, akkor az $\mathbf{A}$ mátrix sortere mindig tartalmaz ezen megoldások közül egyet és csak egyet, az összes megoldás pedig úgy adódik, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének (azaz az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmazának) összes elemét.*

Bizonyítás. Legyen $\underline{v}$ az egyenletrendszer tetszőleges megoldása. Mivel $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_{\mathbf{A}} \bigoplus \mathcal{N}_{\mathbf{A}}$, ezért megadhatók olyan $\underline{a} \in \mathcal{S}_{\mathbf{A}}$ és $\underline{b} \in \mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ vektorok, amelyekre $\underline{v} = \underline{a} + \underline{b}$ teljesül. Tetszőleges $i = 1, 2, \ldots, m$ index esetén

$$b_i = \underline{a}_i^* \underline{v} = \underline{a}_i^* (\underline{a} + \underline{b}) = \underline{a}_i^* \underline{a} + 0$$

mivel $\underline{b} \in \mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ és így $\underline{a}_i^* \underline{b} = 0$. Ebből viszont az adódik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix sorterében lévő $\underline{a}$ vektor az $\mathbf{A}\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrenszer egy megoldása.

Ha $\underline{v}$ és $\underline{w}$ is olyan vektorok a sortérben, amelyek megoldásai az egyenletrendszernek, akkor különbségük megolása az egyenletrendszer homogén részének, azaz a különbségük benne van az $\mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ altérben. Mivel a sortér altér, ezért a két vektor különbsége benne van $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}$-ban. Mivel $\mathcal{S}_{\mathbf{A}} \cap \mathcal{N}_{\mathbf{A}} = \underline{0}$, ezért $\underline{v} - \underline{w} = \underline{0}$ vagyis $\underline{v} = \underline{w}$.

Az, hogy az összes megoldás pedig úgy adódik, hogy a sortérbe eső megoldáshoz hozzáadjuk az $\mathbf{A}$ mátrix nullterének összes elemét már következik a bizonyítás előző részeiből és az $\mathbb{R}^n = \mathcal{S}_{\mathbf{A}} \bigoplus \mathcal{N}_{\mathbf{A}}$ tényből. □

8.2. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációi

Az $\mathbb{R}^n$ vektortér lineáris transzformációit (azaz önmagába való lineáris leképezéseit) n-dimenziós tenzoroknak is szokták nevezni. Mi is ezt a kifejezést használjuk. A tenzorokat latin nagy betűkkel jelöljük. Egy A tenzor (standard bázisbeli) mátrixát $\mathbf{A}$ módon jelöljük.

8.15. Definíció *Egy n-dimenziós A tenzor által meghatározott $\underline{a}_i = A(\underline{e}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ vektorokat az A tenzor vektorkoordinátáinak nevezzük.*

8.16. Megjegyzés *Egy tenzor vektorkoordinátái az A tenzor standard bázis szerinti mátrixának oszlopvektorai.*

A 3-dimenziós tenzorokat osztályozhatjuk a képhalmazuk (az értékkészletük) szerint. Egy 3-dimenziós A tenzorról azt mondjuk, hogy

1. nulltenzor, ha képhalmaza csak a nullvektort tartalmazza,
2. lineáris tenzor, ha képhalmaza egy dimenziós,
3. planáris tenzor, ha képhalmaza 2-dimenziós,

4. teljes tenzor, ha képhalmaza az egész $\mathbb{R}^3$ tér.

8.17. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorainak $\underline{a} \circ \underline{b}$ diadikus szorzatán azt az n-dimenziós tenzort értjük, amely az $\mathbb{R}^n$ vektortér tetszőleges $\underline{r}$ vektorához az $\underline{a}(\underline{b}^T\underline{r})$ vektort rendeli (itt a $\underline{b}^T\underline{r}$ kifejezés a $\underline{b}$ és az $\underline{r}$ vektorok skaláris szorzatát jelöli).*

Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ az $\mathbb{R}^3$ vektortér vektorai, akkor az $\underline{a} \circ \underline{b}$ diadikus szorzat nulltenzor, ha $\underline{a} = \underline{0}$, és lineáris tenzor, ha $\underline{a} \neq \underline{0}$.

A következő tétel a diadikus szorzat mátrixával kapcsolatos.

8.18. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ és $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vektorok diadikus szorzatának mátrixa*

$$\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \dots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \dots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Legyenek $\underline{a}_i$ $(1 = 1, 2, \dots, n)$ egy A tenzor vektorkoordinátái! Ha $\underline{r} = \xi_1\underline{e}_1 + \dots + \xi_n\underline{e}_n$, akkor minden $i = 1, 2, \dots, n$ indexre $\xi_i = \underline{e}_i^T\underline{r}$. Ezért

$$A(\underline{r}) = \underline{a}_1\xi_1 + \dots + \underline{a}_n\xi_n =$$

$$= \underline{a}_1(\underline{e}_1^T\underline{r}) + \dots + \underline{a}_n(\underline{e}_n^T\underline{r}) = (\underline{a}_1 \circ \underline{e}_1 + \dots + \underline{a}_n \circ \underline{e}_n)(\underline{r}).$$

Tehát

$$A = \sum_{i=1}^{n} (\underline{a}_i \circ \underline{e}_i).$$

Az $\underline{a}_i \circ \underline{e}_i$ diadikus szorzatokat az A tenzor tenzorkomponenseinek nevezzük.

8.19. Definíció *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy A' tenzorát az A tenzor adjungáltjának nevezzük, ha tetszőleges $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorokra $[A(\underline{a})]^T\underline{b} = \underline{a}^T A'(\underline{b})$ teljesül (a képletben a vektorok közötti skaláris szorzás szerepel).*

8.20. Tétel *Minden A tenzornak pontosan egy adjungáltja van, és annak valamely $\mathcal{B}$ ortonormált bázis szerinti mátrixa megegyezik az A tenzor $\mathcal{B}$ bázis szerinti mátrixának transzponáltjával.*

8.21. Definíció *Egy A tenzort szimmetrikus tenzornak nevezünk, ha $A = A'$. Ha egy A tenzor esetén $A = -A'$ teljesül, akkor az A tenzort ferdén szimmetrikus tenzornak nevezzük.*

Mivel tetszőleges A tenzor esetén $\frac{1}{2}(A+A')$ egy szimmetrikus, $\frac{1}{2}(A-A')$ pedig ferdén szimmetrikus tenzor, az $A = \frac{1}{2}(A+A') + \frac{1}{2}(A-A')$ egyenlőség alapján kimondható a következő tétel.

8.22. Tétel *Minden tenzor előállítható egy szimmetrikus és egy ferdén szimmetrikus tenzor összegeként.*

8.23. Definíció *Egy valós számokból álló négyzetes $\mathbf{A}$ mátrixot szimmetrikus mátrixnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Az $\mathbf{A}$ mátrixot ferdén szimmetrikusnak nevezzük, ha $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.*

A szimmetrikus és ferdén szimmetrikus mátrixokra (mint a valós számok teste feletti mátrixokra) úgy is tekinthetünk, mint a komplex számok feletti olyan mátrixokra, amelyek elemei valós számok. Ezért beszélhetünk valós, illetve komplex sajátértékeikről is. A következő tétel arra ad választ, hogy mik lehetnek a szimmetrikus, illetve a ferdén szimmetrikus mátrixok komplex sajátértékei.

8.24. Tétel *Szimmetrikus mátrix minden sajátértéke valós szám. Ferdén szimmetrikus mátrix minden sajátértéke képzetes szám.*

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}$ egy n-edrendű valós elemű négyzetes mátrix. Legyen $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$ az $\mathbf{A}$ egy sajátértéke. Akkor van olyan $\underline{0} \neq \underline{v} = \underline{x} + i\underline{y} \in \mathbb{C}^n$ vektor, hogy

$$\mathbf{A}\underline{v} = \lambda\underline{v}.$$

Szorozzuk be ezt az egyenlőséget balról a $\underline{v}$ vektor konjugáltjának transzponáltjával. Ekkor az

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}\underline{v} = \lambda(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

egyenlőséget kapjuk. Vegyük mindkét oldal konjugáltjának transzponáltját. Ekkor

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}^T \underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

adódik, felhasználva azt is, hogy valós szám megegyezik a konjugáltjával. Ha A szimmetrikus, akkor ezen utóbbi egyenlőség

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

alakú. A második és az utolsó egyenlőségből azt kapjuk, hogy

$$\lambda(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2) = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2),$$

azaz

$$\lambda = \overline{\lambda}.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy λ valós szám.

A ferdén szimmetrikus eset bizonyítása a szimmetrikus esettől csak annyiban különbözik, hogy az

$$\overline{(\underline{v})}^T \mathbf{A}^T \underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

egyenlőségből

$$\overline{(\underline{v})}^T (-\mathbf{A})\underline{v} = \overline{\lambda}(|\underline{x}|^2 + |\underline{y}|^2)$$

következik, s ezért $\lambda = -\overline{\lambda}$ miatt $b = 0$, azaz $\lambda = ib$ adódik; tehát ferdén szimmetrikus esetben a λ sajátérték képzetes szám. □

8.25. Tétel *Szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok egymásra merőlegesek, azaz skaláris szorzatuk* 0.

Bizonyítás. Legyenek $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egy $\mathbf{A}$ szimmetrikus mátrix valamely λ és μ sajátértékeihez tartozó sajátvektorok, azaz

$$\mathbf{A}\underline{a} = \lambda\underline{a} \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\underline{b} = \mu\underline{b}.$$

Ekkor

$$\underline{b}^T \mathbf{A}\underline{a} = \lambda\underline{b}^T\underline{a},$$

amiből (mindkét oldal transzponáltját véve)

$$\underline{a}^T \mathbf{A}^T \underline{b} = \lambda \underline{b}^T \underline{a}$$

adódik. Mivel az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus, ezért

$$\lambda \underline{b}^T \underline{a} = \underline{a}^T \mathbf{A} \underline{b} = \underline{a}^T \mu \underline{b},$$

amiből

$$\underline{b}^T \underline{a} = \underline{a}^T \underline{b}$$

miatt

$$(\lambda - \mu) \underline{a}^T \underline{b} = 0$$

adódik. Ha $\lambda \neq \mu$, akkor $\underline{a}^T \underline{b} = 0$, azaz $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egymásra merőleges vektorok. □

8.26. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tenzora akkor és csak akkor szimmetrikus, ha A mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában szimmetrikus. Az A tenzor akkor és csak akkor ferdén szimmetrikus, ha mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában ferdén szimmetrikus.*

Bizonyítás. Legyen A az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy szimmetrikus tenzora. Tetszőleges $i, j = 1, 2, \ldots, n$ indexek esetén

$$\begin{aligned} {}_i[\mathbf{A}]_j = \underline{e}_i^T \mathbf{A} \underline{e}_j = \underline{e}_i^T \mathbf{A}(\underline{e}_j) = \\ = [A(\underline{e}_i)]^T \underline{e}_j = \underline{e}_j^T \mathbf{A}(\underline{e}_i) = \underline{e}_j^T \mathbf{A} \underline{e}_i =_j [\mathbf{A}]_i. \end{aligned}$$

Tehát az A tenzor $\mathbf{A}$ mátrixában az i-dik sor j-dik eleme megegyezik a j-dik sor i-dik elemével, azaz az A mátrixa szimmetrikus. Megmutatható, hogy ha $\mathcal{B}$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér egy tetszőleges ortonormált bázisa, akkor a standard bázist $\mathcal{B}$-re képező B bázistranszformáció standard bázisbeli $\mathbf{B}$ mátrixára telesül, hogy $\mathbf{B}^{-1} = B^T$. Így az A szimmetrikus tenzor $\mathcal{B}$ bázisbeli $[A]_\mathcal{B}$ mátrixára

$$[A]_\mathcal{B} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B}$$

adódik; ez a mátrix szimmetrikus.

Hasonlóan igazolható, hogy ferdén szimmetrikus tenzor mátrixa az $\mathbb{R}^n$ tér tetszőleges ortonormált bázisában ferdén szimmetrikus. □

8.27. Tétel *Szimmetrikus tenzor sajátértékei valós számok, ferdén szimmetrikus tenzornak csak 0 lehet a sajátértéke.*

Bizonyítás. Ha A egy szimmetrikus tenzor, akkor mátrixa szimmetrikus, melynek sajátértékei valós számok. Ha A ferdén szimmetrikus tenzor, akkor mátrixa ferdén szimmetrikus, így annak sajátértékei képzetes számok, tehát ezen sajátértékekből csak a 0 lehet eleme a valós számok $\mathbb{R}$ testének. $\square$

Bizonyítás nélkül közöljük a következő tételt, amit a szimmetrikus tenzorok "Főtengely-tételének" is szoktak nevezni.

8.28. Tétel *Az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden szimmetrikus A tenzora esetén létezik az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek az A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban az A mátrixa diagonális (a főátlóban az A sajátértékei szerepelnek, mindegyik annyiszor, amennyi annak algebrai multiplicitása).*

Legyen A egy n-dimenziós szimmetrikus tenzor. Az előző tétel miatt van az $\mathbb{R}^n$ vektortérnek az A sajátértékeiből álló $\mathcal{B} = \{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \ldots, \underline{s}_n\}$ bázisa. Jelölje λ_i az A tenzor $\underline{s}_i$ sajátvektorához tartozó sajátvektorát. Tetszőleges $\underline{r} = \sum_{i_1}^n \xi_i \underline{s}_i$ vektorra

$$A(\underline{r}) = \sum_{i=1}^n \xi_i A(\underline{s}_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i \lambda_i \underline{s}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i \underline{s}_i) \xi_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n (\lambda_i \underline{s}_i)(\underline{s}_i^T \underline{r}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{s}_i \circ \underline{s}_i)(\underline{r}) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{s}_i \circ \underline{s}_i))(\underline{r} \right).$$

Tehát

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{s}_i \circ \underline{s}_i),$$

azaz az A tenzor előáll az $\underline{s}_i \circ \underline{s}_i$ diadikus szorzatok összegeként.

8.29. Definíció *Az $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\underline{s}_i \circ \underline{s}_i)$ előállítást az A szimmetrikus tenzor spektrál-előállításának nevezzük.*