Calculations for Two Nested Limit Cycles in Two-Species Reactions with Wolfram Mathematica

Created by Ilona Nagy, Valery Romanovski and János Tóth
Last modified: 24 August, 2020

Model 1 with a stable outer and an unstable inner limit cycle

Preparations

System (3)

$x' = x^2\, y + x\, y - c1\, x^2 - d1\, x + e1\, y + f1$
$y' = -x^2\, y - x\, y + c1\, x^2 + d2\, x - e2\, y + f2$

c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2 ≥ 0

The ReactionKinetics program package

The ReactionKinetics program package is available at http://extras.springer.com (ISBN: 978-1-4939-8643-9).
It can be used if either ReactionKinetics.m is put in the same folder as this notebook or ReactionKinetics.wl is added in the packages in the applications.

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
  {ContourPlot, DateListPlot, Plot, ListLinePlot, ListPlot, ListLogPlot,
   LogLinearPlot, LogPlot, ParametricPlot, Plot3D, RegionPlot};
LaunchKernels[];
Needs["ReactionKinetics`"];
```

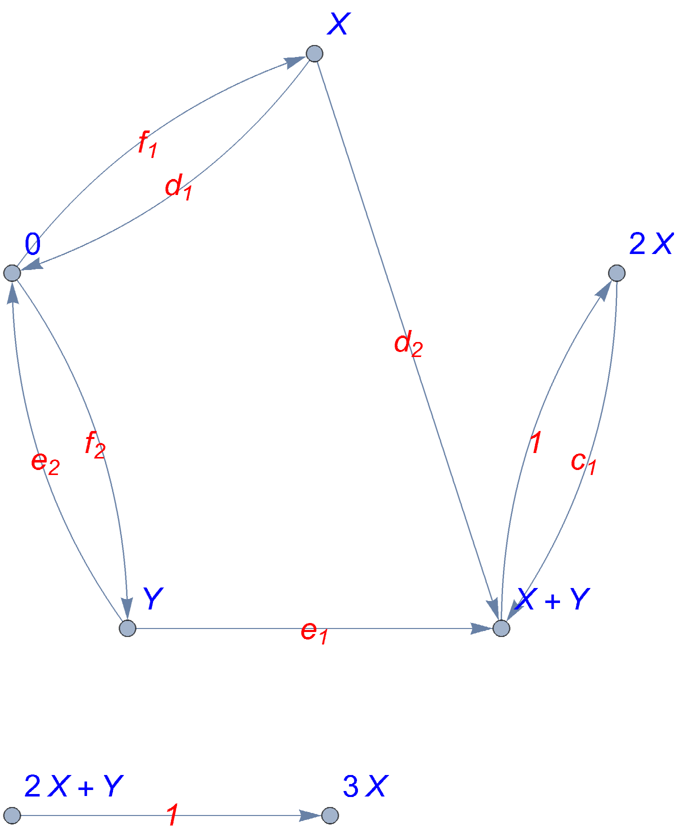
LaunchKernels: Some subkernels are already running. Not launching default kernels again.

Figure 1: Creating the reaction graph with the help of the ReactionKinetics package

In[ ]:=
```
ClearAll[model1];
model1 = {2 X + Y → 3 X, X → 0, 2 X → X + Y → 2 X, 0 → X → X + Y, 0 → Y → X + Y, Y → 0};
RightHandSide[{model1}, {1, d1, c1, 1, f1, d2, f2, e1, e2}, {x, y}]
model1fig = ShowFHJGraph[model1, {1, d₁, c₁, 1, f₁, d₂, f₂, e₁, e₂}, DirectedEdges → True,
   VertexLabels -> Automatic, EdgeLabelStyle → Directive[Red, Italic, 16],
  VertexLabelStyle → Directive[Blue, 16], GraphLayout -> "TutteEmbedding"]
```

Out[ ]= $\{f1 - d1\,x - c1\,x^2 + e1\,y + x\,y + x^2\,y,\ f2 + d2\,x + c1\,x^2 - e2\,y - x\,y - x^2\,y\}$

Out[ ]=



In[ ]:=
```
Export["Fig-1-Model1.pdf", model1fig]
```

Out[ ]= Fig-1-Model1.pdf

The singular point is shifted into the origin

Equations (4)-(5): Singular points if x0 = 1

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
xd = x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
Solve[{xd == 0, yd == 0} /. x → 1, {d1, y}] // FullSimplify
```

Out[ ]=
$$\left\{\left\{d1 \to \frac{d2\,(2+e1)+c1\,(e1-e2)+(2+e2)\,f1+(2+e1)\,f2}{2+e2},\ y \to \frac{c1+d2+f2}{2+e2}\right\}\right\}$$

Equation (6): The singular point (if x0 = 1) is shifted into (0, 0)

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, x0, y0, x1d, y1d, xx1, yy1];
xd = x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
x0 = 1;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2); y0 = (c1 + d2 + f2)/(2 + e2);
xx1 = x - x0; yy1 = y - y0;
x1d = D[xx1, x] xd + D[xx1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
y1d = D[yy1, x] xd + D[yy1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
```

Out[ ]=
$$-\frac{1}{2+e2}\left(c1\,x1 - d2\,x1 + c1\,e1\,x1 + d2\,e1\,x1 + c1\,e2\,x1 + 2\,f1\,x1 + e2\,f1\,x1 - f2\,x1 + e1\,f2\,x1 + c1\,x1^2 - d2\,x1^2 + c1\,e2\,x1^2 - f2\,x1^2 - 4\,y1 - 2\,e1\,y1 - 2\,e2\,y1 - e1\,e2\,y1 - 6\,x1\,y1 - 3\,e2\,x1\,y1 - 2\,x1^2\,y1 - e2\,x1^2\,y1\right)$$

Out[ ]=
$$-\frac{1}{2+e2}\left(-c1\,x1 + d2\,x1 - 2\,c1\,e2\,x1 - d2\,e2\,x1 + 3\,f2\,x1 - c1\,x1^2 + d2\,x1^2 - c1\,e2\,x1^2 + f2\,x1^2 + 4\,y1 + 4\,e2\,y1 + e2^2\,y1 + 6\,x1\,y1 + 3\,e2\,x1\,y1 + 2\,x1^2\,y1 + e2\,x1^2\,y1\right)$$

The Jacobian at the origin

Equations (7)-(8)

In[ ]:=
```
Jac = D[{x1d, y1d}, {{x1, y1}}];
JacOrigin = Jac /. {x1 → 0, y1 → 0} // Simplify
```

Out[ ]=
$$\left\{\left\{-\frac{d2\,(-1+e1)+c1\,(1+e1+e2)+2\,f1+e2\,f1-f2+e1\,f2}{2+e2},\ 2+e1\right\},\ \left\{\frac{c1+d2\,(-1+e2)+2\,c1\,e2-3\,f2}{2+e2},\ -2-e2\right\}\right\}$$

In[ ]:=
```
trace = Tr[JacOrigin] // Factor
Solve[trace == 0, c1] // FullSimplify
```

Out[ ]=
$$-\frac{4+c1-d2+c1\,e1+d2\,e1+4\,e2+c1\,e2+e2^2+2\,f1+e2\,f1-f2+e1\,f2}{2+e2}$$

Out[ ]=
$$\left\{\left\{c1 \to \frac{d2-d2\,e1-(2+e2)\,(2+e2+f1)+f2-e1\,f2}{1+e1+e2}\right\}\right\}$$

In[•]:= c1 = $\frac{d2 - d2\,e1 - (2 + e2)\,(2 + e2 + f1) + f2 - e1\,f2}{1 + e1 + e2}$;
evalues = Eigenvalues[JacOrigin] // FullSimplify

Out[•]= $\left\{-\frac{1}{\sqrt{1 + e1 + e2}}\,\mathrm{i}\,\sqrt{\left(-e2\,\left(2\,d2 + e2 + e2^2 - 4\,f1\right) + 2\,(e2 + f1 + f2) + e1^2\,(d2 + 2\,f2) + e1\,\left(-2 - d2\,(-2 + e2) + e2 + e2^2 + f1 + 2\,e2\,f1 + 5\,f2\right)\right)},\ \frac{1}{\sqrt{1 + e1 + e2}}\,\mathrm{i}\,\sqrt{\left(-e2\,\left(2\,d2 + e2 + e2^2 - 4\,f1\right) + 2\,(e2 + f1 + f2) + e1^2\,(d2 + 2\,f2) + e1\,\left(-2 - d2\,(-2 + e2) + e2 + e2^2 + f1 + 2\,e2\,f1 + 5\,f2\right)\right)}\right\}$

Equation (9)

In[•]:= beta = $-$evalues⟦1⟧^{2} // Factor

Out[•]= $\frac{1}{1 + e1 + e2}\left(-2\,e1 + 2\,d2\,e1 + d2\,e1^2 + 2\,e2 - 2\,d2\,e2 + e1\,e2 - d2\,e1\,e2 - e2^2 + e1\,e2^2 - e2^3 + 2\,f1 + e1\,f1 + 4\,e2\,f1 + 2\,e1\,e2\,f1 + 2\,f2 + 5\,e1\,f2 + 2\,e1^2\,f2\right)$

System (10)

In[•]:= pp = x1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor
qq = y1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor

Out[•]= $\frac{1}{1 + e1 + e2}\left(2\,x + 2\,e1\,x + 3\,e2\,x + e1\,e2\,x + e2^2\,x + 2\,x^2 + d2\,e1\,x^2 + 3\,e2\,x^2 + e2^2\,x^2 + f1\,x^2 + e2\,f1\,x^2 + e1\,f2\,x^2 + 2\,y + 3\,e1\,y + e1^2\,y + 2\,e2\,y + e1\,e2\,y + 3\,x\,y + 3\,e1\,x\,y + 3\,e2\,x\,y + x^2\,y + e1\,x^2\,y + e2\,x^2\,y\right)$

Out[•]= $-\frac{1}{1 + e1 + e2}\left(2\,x + d2\,e1\,x + 5\,e2\,x - d2\,e2\,x + 2\,e2^2\,x + f1\,x + 2\,e2\,f1\,x + f2\,x + 2\,e1\,f2\,x + 2\,x^2 + d2\,e1\,x^2 + 3\,e2\,x^2 + e2^2\,x^2 + f1\,x^2 + e2\,f1\,x^2 + e1\,f2\,x^2 + 2\,y + 2\,e1\,y + 3\,e2\,y + e1\,e2\,y + e2^2\,y + 3\,x\,y + 3\,e1\,x\,y + 3\,e2\,x\,y + x^2\,y + e1\,x^2\,y + e2\,x^2\,y\right)$

Lyapunov's theorem

System (10)

In[•]:= Quit

In[•]:= pp = $\frac{1}{1 + e1 + e2}\left(2\,x + 2\,e1\,x + 3\,e2\,x + e1\,e2\,x + e2^2\,x + 2\,x^2 + d2\,e1\,x^2 + 3\,e2\,x^2 + e2^2\,x^2 + f1\,x^2 + e2\,f1\,x^2 + e1\,f2\,x^2 + 2\,y + 3\,e1\,y + e1^2\,y + 2\,e2\,y + e1\,e2\,y + 3\,x\,y + 3\,e1\,x\,y + 3\,e2\,x\,y + x^2\,y + e1\,x^2\,y + e2\,x^2\,y\right)$;
qq = $-\frac{1}{1 + e1 + e2}\left(2\,x + d2\,e1\,x + 5\,e2\,x - d2\,e2\,x + 2\,e2^2\,x + f1\,x + 2\,e2\,f1\,x + f2\,x + 2\,e1\,f2\,x + 2\,x^2 + d2\,e1\,x^2 + 3\,e2\,x^2 + e2^2\,x^2 + f1\,x^2 + e2\,f1\,x^2 + e1\,f2\,x^2 + 2\,y + 2\,e1\,y + 3\,e2\,y + e1\,e2\,y + e2^2\,y + 3\,x\,y + 3\,e1\,x\,y + 3\,e2\,x\,y + x^2\,y + e1\,x^2\,y + e2\,x^2\,y\right)$;

Program

In[ ]:=
```
Ser[s_] := Plus @@ Table[x^i y^(s-i) p[i, s - i], {i, 0, s}];
Hom[s_] := Table[p[s - i, i], {i, 0, s}];
hh = Sum[Ser[i], {i, 2, 6}]; (*9*)
Lie = D[hh, x] pp + D[hh, y] qq // Expand;
RHS = g1 (x^2 + y^2)^2 + g2 (x^2 + y^2)^3 + g3 (x^2 + y^2)^4 // Expand;
vv = Lie - RHS // Expand;
CoefPol[f_, s_] :=
  Module[{m, lis, t}, lis = {}; m = Expand[f]; Do[Do[If[i + j == s, lis = AppendTo[lis,
        Coefficient[m, x^i y^j] /. {x → 0, y → 0, z → 0}]], {i, 0, s}], {j, 0, s}];
   ls[s] = lis];
Do[CoefPol[vv, i], {i, 1, 9}];
```

Degree 1, 2

In[ ]:=
```
ls[1]
ls[2] // Factor;
sol2 = Solve[ls[2] == 0, Hom[2]] // Simplify;
{p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} = {p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} /. sol2[[1]];
ls[2] // Simplify
```

Out[ ]= {0, 0}

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]= {0, 0, 0}

Quadratic form

In[*]:=
```
ClearAll[qv, mat, a11, det, eg];
qv = Ser[2] // FullSimplify
mat = 1 / 2 D[qv, {{x, y}, 2}];
mat // MatrixForm
a11 = mat[[1, 1]]
det = Det[mat] // Factor
eg = Eigenvalues[mat] // Simplify // Factor;
```

Out[*]= $\frac{1}{2}\left(\frac{(d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2)\ x^2}{(2+e2)\ (1+e1+e2)}+2\,x\,y+\frac{(2+e1)\ y^2}{2+e2}\right)\ p[1,1]$

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{(d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2)\ p[1,1]}{2\ (2+e2)\ (1+e1+e2)} & \frac{1}{2}\,p[1,1] \\ \frac{1}{2}\,p[1,1] & \frac{(2+e1)\ p[1,1]}{2\ (2+e2)} \end{pmatrix}$$

Out[*]= $\frac{(d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2)\ p[1,1]}{2\ (2+e2)\ (1+e1+e2)}$

Out[*]= $-\frac{1}{4\ (2+e2)^2\ (1+e1+e2)}\left(2\,e1-2\,d2\,e1-d2\,e1^2-2\,e2+2\,d2\,e2-e1\,e2+d2\,e1\,e2+e2^2-e1\,e2^2+e2^3-2\,f1-e1\,f1-4\,e2\,f1-2\,e1\,e2\,f1-2\,f2-5\,e1\,f2-2\,e1^2\,f2\right)\ p[1,1]^2$

Equation (13)

In[*]:=
```
p[1, 1] = 1;
qv
mat // MatrixForm
a11
det
```

Out[*]= $\frac{1}{2}\left(\frac{(d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2)\ x^2}{(2+e2)\ (1+e1+e2)}+2\,x\,y+\frac{(2+e1)\ y^2}{2+e2}\right)$

Out[*]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2}{2\ (2+e2)\ (1+e1+e2)} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2+e1}{2\ (2+e2)} \end{pmatrix}$$

Out[*]= $\frac{d2\ (e1-e2)+(1+2\,e2)\ (2+e2+f1)+f2+2\,e1\,f2}{2\ (2+e2)\ (1+e1+e2)}$

Out[*]= $-\frac{1}{4\ (2+e2)^2\ (1+e1+e2)}\left(2\,e1-2\,d2\,e1-d2\,e1^2-2\,e2+2\,d2\,e2-e1\,e2+d2\,e1\,e2+e2^2-e1\,e2^2+e2^3-2\,f1-e1\,f1-4\,e2\,f1-2\,e1\,e2\,f1-2\,f2-5\,e1\,f2-2\,e1^2\,f2\right)$

Conditions for a positive definite quadratic form

In[]:=
```
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2); y0 = (c1 + d2 + f2)/(2 + e2);
c1 = (d2 - d2 e1 - (2 + e2) (2 + e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(1 + e1 + e2);
beta = 1/(1 + e1 + e2) (-2 e1 + 2 d2 e1 + d2 e1^2 + 2 e2 - 2 d2 e2 + e1 e2 - d2 e1 e2 -
    e2^2 + e1 e2^2 - e2^3 + 2 f1 + e1 f1 + 4 e2 f1 + 2 e1 e2 f1 + 2 f2 + 5 e1 f2 + 2 e1^2 f2);
```

In[]:=
```
Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 &&
   e1 > 0 && e2 > 0 && f1 > 0 && f2 > 0, {d2, e1, e2, f1, f2} ] // FullSimplify
```

Out[]=
```
$Aborted
```

Setting f1 and f2: Equation (14)

In[]:=
```
ClearAll[f1, f2];
f1 = 1; f2 = 2;
```

In[]:=
```
Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0,
  {d2, e1, e2} ] // FullSimplify
```

Out[]=
```
(e2 > 0 && Sqrt[9 + 4 d2 - 4 (2 + d2) e1] > 5 + 2 e2 &&
   ((e1 > 0 && d2 > 4 && 9 d2 ≤ 26 + 7 Sqrt[34]) || (9 d2 > 26 + 7 Sqrt[34] && Root[110 + 52 d2 - 9 d2^2 +
         (69 + 64 d2 + 9 d2^2) #1 + (-12 - 8 d2) #1^2 + 4 #1^3 &, 1] ≤ e1 < (-4 + d2)/(2 + d2)))) ||
 (0 < e1 < Root[110 + 52 d2 - 9 d2^2 + (69 + 64 d2 + 9 d2^2) #1 + (-12 - 8 d2) #1^2 + 4 #1^3 &, 1] &&
   0 < e2 < Root[-6 - 9 e1 - 2 d2 e1 - 4 e1^2 - d2 e1^2 +
       (-6 + 2 d2 - 3 e1 + d2 e1) #1 + (1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 1] && 9 d2 > 26 + 7 Sqrt[34])
```

Degree 3

In[]:=
```
ls[3] // Factor;
sol3 = Solve[ls[3] == 0, Hom[3]] // Simplify;
{p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} =
   {p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} /. sol3[[1]] // Factor;
ls[3] // Simplify
```

Out[]=
```
{0, 0, 0, 0}
```

Degree 4: Equation (15)

In[*]:=
```
ls[4] // Factor;
sol4 = Solve[ls[4] == 0, AppendTo[Hom[4], g1]];
{g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} =
  {g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} /. sol4[[1]];
g1 //
 Factor
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[*]=

$$\left(-36-105\,e1-30\,d2\,e1-120\,e1^2-50\,d2\,e1^2-6\,d2^2\,e1^2-56\,e1^3-28\,d2\,e1^3-7\,d2^2\,e1^3-6\,e1^4-6\,d2\,e1^4-2\,d2^2\,e1^4-75\,e2+12\,d2\,e2-159\,e1\,e2-8\,d2\,e1\,e2+6\,d2^2\,e1\,e2-113\,e1^2\,e2-9\,d2\,e1^2\,e2+7\,d2^2\,e1^2\,e2-18\,e1^3\,e2-d2\,e1^3\,e2+2\,d2^2\,e1^3\,e2-36\,e2^2+13\,d2\,e2^2-65\,e1\,e2^2+18\,d2\,e1\,e2^2-30\,e1^2\,e2^2-6\,e1^3\,e2^2-4\,d2\,e1^3\,e2^2+9\,e2^3+d2\,e2^3-6\,e1\,e2^3+7\,d2\,e1\,e2^3-e1^2\,e2^3+4\,d2\,e1^2\,e2^3+6\,e2^4+7\,e1\,e2^4-2\,e1^2\,e2^4+2\,e1\,e2^5\right)\Big/\left((2+e2)\left(123+234\,e1+34\,d2\,e1+137\,e1^2+30\,d2\,e1^2+3\,d2^2\,e1^2+26\,e1^3+2\,d2\,e1^3+3\,e1^4+330\,e2-34\,d2\,e2+348\,e1\,e2+16\,d2\,e1\,e2-6\,d2^2\,e1\,e2+68\,e1^2\,e2+6\,e1^3\,e2+307\,e2^2-46\,d2\,e2^2+3\,d2^2\,e2^2+126\,e1\,e2^2+10\,d2\,e1\,e2^2+11\,e1^2\,e2^2+116\,e2^3-12\,d2\,e2^3+12\,e1\,e2^3+16\,e2^4\right)\right)$$

In[*]:=
```
Variables[g1]
```

Out[*]= {e2, e1, d2}

Degree 5

In[*]:=
```
ls[5] // Factor;
sol5 = Solve[ls[5] == 0, Hom[5]];
{p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} =
  {p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} /. sol5[[1]] // Factor;
ls[5] // Factor
```

Out[*]= {0, 0, 0, 0, 0, 0}

Degree 6

In[*]:=
```
ls[6] // Factor;
sol6 = Solve[ls[6] == 0, AppendTo[Hom[6], g2]];
{p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} =
  {p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} /. sol6[[1]] // Factor;
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

In[ ]:=
```
g2
Variables[g2]
```

Out[ ]=
```
(-8 713 008 - 80 227 908 e1 - 18 633 240 d2 e1 -
  337 874 976 e1^2 - 157 906 260 d2 e1^2 + ⋯3685⋯ + 288 d2 e1 e2^19 p[2, 2] +
  864 e1^2 e2^19 p[2, 2] - 384 e1 e2^20 p[2, 2]) / (3 ⋯5⋯
  (173 + 310 e1 + 46 d2 e1 + 159 e1^2 + 34 d2 e1^2 + 5 d2^2 e1^2 + 22 e1^3 - 2 d2 e1^3 + ⋯14⋯ +
   194 e1 e2^2 + 22 d2 e1 e2^2 + 13 e1^2 e2^2 + 204 e2^3 - 20 d2 e2^3 + 20 e1 e2^3 + 32 e2^4))
```

large output | show less | show more | show all | set size limit...

Out[ ]= {e2, e1, d2, p[2, 2]}

In[ ]:=
```
p[2, 2] = 0;
g2
```

Out[ ]=
```
(-8 713 008 - 80 227 908 e1 - 18 633 240 d2 e1 - 337 874 976 e1^2 - 157 906 260 d2 e1^2 +
  10 405 584 d2^2 e1^2 - 858 336 669 e1^3 - 589 383 162 d2 e1^3 + 81 932 364 d2^2 e1^3 +
  35 785 800 d2^3 e1^3 - 1 455 557 742 e1^4 - 1 270 911 195 d2 e1^4 + 338 227 632 d2^2 e1^4 +
  238 457 340 d2^3 e1^4 + 26 009 424 d2^4 e1^4 - 1 714 693 617 e1^5 - 1 717 841 574 d2 e1^5 +
  904 365 423 d2^2 e1^5 + 745 432 494 d2^3 e1^5 + 150 039 924 d2^4 e1^5 + 8 948 856 d2^5 e1^5 -
  1 403 037 225 e1^6 - 1 430 020 437 d2 e1^6 + 1 658 108 088 d2^2 e1^6 + 1 429 256 853 d2^3 e1^6 +
  394 437 648 d2^4 e1^6 + 44 281 668 d2^5 e1^6 + 1 629 936 d2^6 e1^6 - 753 154 923 e1^7 - 571 000 407 d2 e1^7 +
  2 138 076 514 d2^2 e1^7 + 1 847 954 158 d2^3 e1^7 + 619 008 217 d2^4 e1^7 + 97 449 906 d2^5 e1^7 +
  6 784 644 d2^6 e1^7 + 151 896 d2^7 e1^7 - 201 488 607 e1^8 + 176 674 539 d2 e1^8 + 1 964 402 861 d2^2 e1^8 +
  1 675 435 460 d2^3 e1^8 + 637 982 800 d2^4 e1^8 + 124 624 471 d2^5 e1^8 + 12 217 264 d2^6 e1^8 +
  516 884 d2^7 e1^8 + 5664 d2^8 e1^8 + 45 046 070 e1^9 + 410 515 867 d2 e1^9 + 1 291 006 512 d2^2 e1^9 +
  1 078 650 079 d2^3 e1^9 + 448 156 039 d2^4 e1^9 + 101 413 810 d2^5 e1^9 + 12 361 701 d2^6 e1^9 +
  734 362 d2^7 e1^9 + 15 104 d2^8 e1^9 + 73 953 039 e1^10 + 290 416 646 d2 e1^10 + 605 333 406 d2^2 e1^10 +
  491 519 448 d2^3 e1^10 + 216 082 317 d2^4 e1^10 + 54 029 895 d2^5 e1^10 + 7 614 724 d2^6 e1^10 +
  559 151 d2^7 e1^10 + 16 048 d2^8 e1^10 + 39 444 242 e1^11 + 124 911 469 d2 e1^11 + 202 103 664 d2^2 e1^11 +
  156 681 114 d2^3 e1^11 + 70 584 675 d2^4 e1^11 + 18 688 281 d2^5 e1^11 + 2 880 292 d2^6 e1^11 +
  241 766 d2^7 e1^11 + 8496 d2^8 e1^11 + 13 797 268 e1^12 + 37 546 770 d2 e1^12 + 48 855 466 d2^2 e1^12 +
  34 754 854 d2^3 e1^12 + 15 245 395 d2^4 e1^12 + 4 031 419 d2^5 e1^12 + 637 195 d2^6 e1^12 + 56 978 d2^7 e1^12 +
  2242 d2^8 e1^12 + 3 612 332 e1^13 + 8 545 648 d2 e1^13 + 9 068 950 d2^2 e1^13 + 5 576 280 d2^3 e1^13 +
  2 166 702 d2^4 e1^13 + 509 183 d2^5 e1^13 + 72 324 d2^6 e1^13 + 6043 d2^7 e1^13 + 236 d2^8 e1^13 +
  683 128 e1^14 + 1 465 890 d2 e1^14 + 1 361 350 d2^2 e1^14 + 717 156 d2^3 e1^14 + 224 683 d2^4 e1^14 +
  38 432 d2^5 e1^14 + 3266 d2^6 e1^14 + 110 d2^7 e1^14 + 75 592 e1^15 + 159 856 d2 e1^15 + 144 656 d2^2 e1^15 +
  71 084 d2^3 e1^15 + 19 220 d2^4 e1^15 + 2527 d2^5 e1^15 + 120 d2^6 e1^15 + 3360 e1^16 + 7560 d2 e1^16 +
  7000 d2^2 e1^16 + 3290 d2^3 e1^16 + 770 d2^4 e1^16 + 70 d2^5 e1^16 - 88 993 404 e2 + 13 996 800 d2 e2 -
  752 016 960 e1 e2 - 38 543 688 d2 e1 e2 + 27 026 784 d2^2 e1 e2 - 2 879 856 747 e1^2 e2 -
  710 317 836 d2 e1^2 e2 + 294 699 708 d2^2 e1^2 e2 - 9 078 480 d2^3 e1^2 e2 - 6 560 854 011 e1^3 e2 -
  2 690 010 594 d2 e1^3 e2 + 1 362 536 496 d2^2 e1^3 e2 + 170 160 336 d2^3 e1^3 e2 - 32 737 824 d2^4 e1^3 e2 -
  9 773 607 069 e1^4 e2 - 5 096 266 209 d2 e1^4 e2 + 3 886 383 267 d2^2 e1^4 e2 + 1 154 539 896 d2^3 e1^4 e2 -
  54 369 156 d2^4 e1^4 e2 - 19 467 744 d2^5 e1^4 e2 - 9 794 939 382 e1^5 e2 - 5 333 357 403 d2 e1^5 e2 +
  7 619 896 587 d2^2 e1^5 e2 + 3 266 720 088 d2^3 e1^5 e2 + 168 392 016 d2^4 e1^5 e2 - 61 122 504 d2^5 e1^5 e2 -
  5 049 888 d2^6 e1^5 e2 - 6 441 412 836 e1^6 e2 - 2 449 443 015 d2 e1^6 e2 + 10 571 887 718 d2^2 e1^6 e2 +
  5 438 835 483 d2^3 e1^6 e2 + 695 706 763 d2^4 e1^6 e2 - 66 594 060 d2^5 e1^6 e2 - 16 669 884 d2^6 e1^6 e2 -
```

$613584\, d2^{7} e1^{6} e2 - 2414718978\, e1^{7} e2 + 1016061140\, d2\, e1^{7} e2 + 10416164334\, d2^{2} e1^{7} e2 +$

$5901303257\, d2^{3} e1^{7} e2 + 1107789093\, d2^{4} e1^{7} e2 - 9732938\, d2^{5} e1^{7} e2 - 23271568\, d2^{6} e1^{7} e2 -$

$1881280\, d2^{7} e1^{7} e2 - 28320\, d2^{8} e1^{7} e2 - 110539434\, e1^{8} e2 + 2330972212\, d2\, e1^{8} e2 +$

$7229319646\, d2^{2} e1^{8} e2 + 4318013999\, d2^{3} e1^{8} e2 + 1012688955\, d2^{4} e1^{8} e2 +$

$44466269\, d2^{5} e1^{8} e2 - 17803635\, d2^{6} e1^{8} e2 - 2428832\, d2^{7} e1^{8} e2 - 75520\, d2^{8} e1^{8} e2 +$

$405218849\, e1^{9} e2 + 1664150341\, d2\, e1^{9} e2 + 3470424720\, d2^{2} e1^{9} e2 + 2130918642\, d2^{3} e1^{9} e2 +$

$576913058\, d2^{4} e1^{9} e2 + 46399843\, d2^{5} e1^{9} e2 - 8101763\, d2^{6} e1^{9} e2 - 1701260\, d2^{7} e1^{9} e2 -$

$80240\, d2^{8} e1^{9} e2 + 239910826\, e1^{10} e2 + 679422209\, d2\, e1^{10} e2 + 1120948905\, d2^{2} e1^{10} e2 +$

$691162347\, d2^{3} e1^{10} e2 + 205066302\, d2^{4} e1^{10} e2 + 21531455\, d2^{5} e1^{10} e2 - 2268800\, d2^{6} e1^{10} e2 -$

$689151\, d2^{7} e1^{10} e2 - 42480\, d2^{8} e1^{10} e2 + 79358760\, e1^{11} e2 + 181806640\, d2\, e1^{11} e2 +$

$238215342\, d2^{2} e1^{11} e2 + 140305887\, d2^{3} e1^{11} e2 + 42995125\, d2^{4} e1^{11} e2 +$

$4941564\, d2^{5} e1^{11} e2 - 421838\, d2^{6} e1^{11} e2 - 156841\, d2^{7} e1^{11} e2 - 11210\, d2^{8} e1^{11} e2 +$

$20337633\, e1^{12} e2 + 37875499\, d2\, e1^{12} e2 + 35310184\, d2^{2} e1^{12} e2 + 17163580\, d2^{3} e1^{12} e2 +$

$4657433\, d2^{4} e1^{12} e2 + 410185\, d2^{5} e1^{12} e2 - 64852\, d2^{6} e1^{12} e2 - 17227\, d2^{7} e1^{12} e2 -$

$1180\, d2^{8} e1^{12} e2 + 4332374\, e1^{13} e2 + 7037529\, d2\, e1^{13} e2 + 4730223\, d2^{2} e1^{13} e2 +$

$1571858\, d2^{3} e1^{13} e2 + 228117\, d2^{4} e1^{13} e2 - 21692\, d2^{5} e1^{13} e2 - 8259\, d2^{6} e1^{13} e2 -$

$518\, d2^{7} e1^{13} e2 + 576808\, e1^{14} e2 + 922040\, d2\, e1^{14} e2 + 583383\, d2^{2} e1^{14} e2 + 174173\, d2^{3} e1^{14} e2 +$

$17658\, d2^{4} e1^{14} e2 - 2617\, d2^{5} e1^{14} e2 - 400\, d2^{6} e1^{14} e2 + 30360\, e1^{15} e2 + 51680\, d2\, e1^{15} e2 +$

$34130\, d2^{2} e1^{15} e2 + 10095\, d2^{3} e1^{15} e2 + 945\, d2^{4} e1^{15} e2 - 70\, d2^{5} e1^{15} e2 - 412722864\, e2^{2} +$

$123249600\, d2\, e2^{2} - 8785584\, d2^{2} e2^{2} - 3193953444\, e1\, e2^{2} + 362974608\, d2\, e1\, e2^{2} +$

$129544596\, d2^{2} e1\, e2^{2} - 14999256\, d2^{3} e1\, e2^{2} - 11082897738\, e1^{2} e2^{2} - 440355204\, d2\, e1^{2} e2^{2} +$

$1409779944\, d2^{2} e1^{2} e2^{2} - 166705236\, d2^{3} e1^{2} e2^{2} + 3173472\, d2^{4} e1^{2} e2^{2} - 22502444436\, e1^{3} e2^{2} -$

$3175160004\, d2\, e1^{3} e2^{2} + 5737565025\, d2^{2} e1^{3} e2^{2} - 84757098\, d2^{3} e1^{3} e2^{2} -$

$152017464\, d2^{4} e1^{3} e2^{2} + 11645328\, d2^{5} e1^{3} e2^{2} - 29122036605\, e1^{4} e2^{2} - 4682685285\, d2\, e1^{4} e2^{2} +$

$13993017060\, d2^{2} e1^{4} e2^{2} + 1519403265\, d2^{3} e1^{4} e2^{2} - 515540064\, d2^{4} e1^{4} e2^{2} -$

$18695784\, d2^{5} e1^{4} e2^{2} + 5347536\, d2^{6} e1^{4} e2^{2} - 24291178713\, e1^{5} e2^{2} - 639947649\, d2\, e1^{5} e2^{2} +$

$23007150192\, d2^{2} e1^{5} e2^{2} + 5012633502\, d2^{3} e1^{5} e2^{2} - 604978154\, d2^{4} e1^{5} e2^{2} -$

$136057620\, d2^{5} e1^{5} e2^{2} + 8856804\, d2^{6} e1^{5} e2^{2} + 935304\, d2^{7} e1^{5} e2^{2} - 12139457193\, e1^{6} e2^{2} +$

$6406695085\, d2\, e1^{6} e2^{2} + 26349269788\, d2^{2} e1^{6} e2^{2} + 8016293046\, d2^{3} e1^{6} e2^{2} -$

$87975162\, d2^{4} e1^{6} e2^{2} - 221448010\, d2^{5} e1^{6} e2^{2} - 1015576\, d2^{6} e1^{6} e2^{2} + 2352828\, d2^{7} e1^{6} e2^{2} +$

$56640\, d2^{8} e1^{6} e2^{2} - 2370149963\, e1^{7} e2^{2} + 9372684057\, d2\, e1^{7} e2^{2} + 21068515940\, d2^{2} e1^{7} e2^{2} +$

$7814370907\, d2^{3} e1^{7} e2^{2} + 528600834\, d2^{4} e1^{7} e2^{2} - 165858512\, d2^{5} e1^{7} e2^{2} -$

$11708611\, d2^{6} e1^{7} e2^{2} + 2413710\, d2^{7} e1^{7} e2^{2} + 151040\, d2^{8} e1^{7} e2^{2} + 1051299548\, e1^{8} e2^{2} +$

$6721450264\, d2\, e1^{8} e2^{2} + 11599420704\, d2^{2} e1^{8} e2^{2} + 4931946196\, d2^{3} e1^{8} e2^{2} +$

$651850653\, d2^{4} e1^{8} e2^{2} - 50395731\, d2^{5} e1^{8} e2^{2} - 9667904\, d2^{6} e1^{8} e2^{2} + 1351309\, d2^{7} e1^{8} e2^{2} +$

$160480\, d2^{8} e1^{8} e2^{2} + 896150928\, e1^{9} e2^{2} + 2829857255\, d2\, e1^{9} e2^{2} + 4280870807\, d2^{2} e1^{9} e2^{2} +$

$2031202343\, d2^{3} e1^{9} e2^{2} + 387936500\, d2^{4} e1^{9} e2^{2} + 10114987\, d2^{5} e1^{9} e2^{2} - 2516702\, d2^{6} e1^{9} e2^{2} +$

$502730\, d2^{7} e1^{9} e2^{2} + 84960\, d2^{8} e1^{9} e2^{2} + 302293030\, e1^{10} e2^{2} + 736640746\, d2\, e1^{10} e2^{2} +$

$1023719107\, d2^{2} e1^{10} e2^{2} + 534306796\, d2^{3} e1^{10} e2^{2} + 133327559\, d2^{4} e1^{10} e2^{2} +$

$13377761\, d2^{5} e1^{10} e2^{2} + 528804\, d2^{6} e1^{10} e2^{2} + 152286\, d2^{7} e1^{10} e2^{2} + 22420\, d2^{8} e1^{10} e2^{2} +$

$72143105\, e1^{11} e2^{2} + 136252541\, d2\, e1^{11} e2^{2} + 158772321\, d2^{2} e1^{11} e2^{2} + 86875594\, d2^{3} e1^{11} e2^{2} +$

$26532888\, d2^{4} e1^{11} e2^{2} + 4284456\, d2^{5} e1^{11} e2^{2} + 423047\, d2^{6} e1^{11} e2^{2} + 35465\, d2^{7} e1^{11} e2^{2} +$

$2360\, d2^{8} e1^{11} e2^{2} + 17008885\, e1^{12} e2^{2} + 25234466\, d2\, e1^{12} e2^{2} + 19640206\, d2^{2} e1^{12} e2^{2} +$

$9201488\, d2^{3} e1^{12} e2^{2} + 2906217\, d2^{4} e1^{12} e2^{2} + 566276\, d2^{5} e1^{12} e2^{2} + 70578\, d2^{6} e1^{12} e2^{2} +$

$4018\, d2^{7} e1^{12} e2^{2} + 3136806\, e1^{13} e2^{2} + 4466176\, d2\, e1^{13} e2^{2} + 2741463\, d2^{2} e1^{13} e2^{2} +$

$946719\, d2^{3} e1^{13} e2^{2} + 201599\, d2^{4} e1^{13} e2^{2} + 24275\, d2^{5} e1^{13} e2^{2} + 1660\, d2^{6} e1^{13} e2^{2} +$

$298712\, e1^{14} e2^{2} + 468192\, d2\, e1^{14} e2^{2} + 303467\, d2^{2} e1^{14} e2^{2} + 101066\, d2^{3} e1^{14} e2^{2} +$

$16728\, d2^{4} e1^{14} e2^{2} + 1010\, d2^{5} e1^{14} e2^{2} + 10080\, e1^{15} e2^{2} + 19040\, d2\, e1^{15} e2^{2} +$

$13\,860\ d2^2\ e1^{15}\ e2^2 + 4550\ d2^3\ e1^{15}\ e2^2 + 560\ d2^4\ e1^{15}\ e2^2 - 1\,144\,849\,464\ e2^3 + 485\,208\,576\ d2\ e2^3 -$
$65\,642\,940\ d2^2\ e2^3 + 2\,685\,312\ d2^3\ e2^3 - 8\,101\,716\,174\ e1\ e2^3 + 2\,123\,568\,468\ d2\ e1\ e2^3 +$
$168\,190\,416\ d2^2\ e1\ e2^3 - 74\,001\,528\ d2^3\ e1\ e2^3 + 3\,953\,664\ d2^4\ e1\ e2^3 - 25\,367\,896\,629\ e1^2\ e2^3 +$
$3\,886\,286\,364\ d2\ e1^2\ e2^3 + 2\,852\,738\,037\ d2^2\ e1^2\ e2^3 - 690\,025\,740\ d2^3\ e1^2\ e2^3 +$
$40\,845\,432\ d2^4\ e1^2\ e2^3 - 659\,424\ d2^5\ e1^2\ e2^3 - 45\,496\,626\,822\ e1^3\ e2^3 + 5\,540\,735\,145\ d2\ e1^3\ e2^3 +$
$11\,128\,954\,755\ d2^2\ e1^3\ e2^3 - 1\,597\,976\,790\ d2^3\ e1^3\ e2^3 - 209\,276\,256\ d2^4\ e1^3\ e2^3 +$
$42\,032\,160\ d2^5\ e1^3\ e2^3 - 2\,042\,496\ d2^6\ e1^3\ e2^3 - 50\,231\,049\,501\ e1^4\ e2^3 + 11\,170\,622\,970\ d2\ e1^4\ e2^3 +$
$24\,590\,006\,218\ d2^2\ e1^4\ e2^3 - 941\,938\,709\ d2^3\ e1^4\ e2^3 - 961\,778\,338\ d2^4\ e1^4\ e2^3 +$
$66\,614\,592\ d2^5\ e1^4\ e2^3 + 5\,543\,268\ d2^6\ e1^4\ e2^3 - 643\,296\ d2^7\ e1^4\ e2^3 - 33\,413\,543\,811\ e1^5\ e2^3 +$
$21\,148\,376\,595\ d2\ e1^5\ e2^3 + 35\,638\,124\,420\ d2^2\ e1^5\ e2^3 + 2\,205\,631\,443\ d2^3\ e1^5\ e2^3 -$
$1\,503\,271\,576\ d2^4\ e1^5\ e2^3 - 35\,871\,356\ d2^5\ e1^5\ e2^3 + 20\,078\,096\ d2^6\ e1^5\ e2^3 - 936\,264\ d2^7\ e1^5\ e2^3 -$
$56\,640\ d2^8\ e1^5\ e2^3 - 10\,853\,237\,767\ e1^6\ e2^3 + 26\,089\,127\,342\ d2\ e1^6\ e2^3 + 35\,244\,071\,070\ d2^2\ e1^6\ e2^3 +$
$5\,309\,307\,093\ d2^3\ e1^6\ e2^3 - 1\,126\,914\,199\ d2^4\ e1^6\ e2^3 - 160\,511\,646\ d2^5\ e1^6\ e2^3 +$
$18\,379\,341\ d2^6\ e1^6\ e2^3 - 51\,140\ d2^7\ e1^6\ e2^3 - 151\,040\ d2^8\ e1^6\ e2^3 + 1\,086\,089\,395\ e1^7\ e2^3 +$
$20\,029\,778\,950\ d2\ e1^7\ e2^3 + 23\,855\,046\,334\ d2^2\ e1^7\ e2^3 + 5\,452\,022\,105\ d2^3\ e1^7\ e2^3 -$
$310\,744\,390\ d2^4\ e1^7\ e2^3 - 156\,265\,469\ d2^5\ e1^7\ e2^3 + 3\,458\,859\ d2^6\ e1^7\ e2^3 + 423\,366\ d2^7\ e1^7\ e2^3 -$
$160\,480\ d2^8\ e1^7\ e2^3 + 2\,470\,883\,453\ e1^8\ e2^3 + 9\,550\,268\,886\ d2\ e1^8\ e2^3 + 10\,848\,472\,197\ d2^2\ e1^8\ e2^3 +$
$3\,254\,598\,558\ d2^3\ e1^8\ e2^3 + 129\,794\,755\ d2^4\ e1^8\ e2^3 - 71\,969\,042\ d2^5\ e1^8\ e2^3 -$
$4\,662\,926\ d2^6\ e1^8\ e2^3 + 35\,447\ d2^7\ e1^8\ e2^3 - 84\,960\ d2^8\ e1^8\ e2^3 + 971\,252\,899\ e1^9\ e2^3 +$
$2\,770\,207\,966\ d2\ e1^9\ e2^3 + 3\,184\,987\,040\ d2^2\ e1^9\ e2^3 + 1\,176\,631\,613\ d2^3\ e1^9\ e2^3 +$
$133\,147\,188\ d2^4\ e1^9\ e2^3 - 15\,562\,794\ d2^5\ e1^9\ e2^3 - 3\,532\,924\ d2^6\ e1^9\ e2^3 - 190\,219\ d2^7\ e1^9\ e2^3 -$
$22\,420\ d2^8\ e1^9\ e2^3 + 203\,381\,328\ e1^{10}\ e2^3 + 479\,768\,387\ d2\ e1^{10}\ e2^3 + 563\,429\,608\ d2^2\ e1^{10}\ e2^3 +$
$244\,410\,565\ d2^3\ e1^{10}\ e2^3 + 41\,524\,515\ d2^4\ e1^{10}\ e2^3 - 1\,034\,435\ d2^5\ e1^{10}\ e2^3 - 1\,036\,656\ d2^6\ e1^{10}\ e2^3 -$
$94\,329\ d2^7\ e1^{10}\ e2^3 - 2360\ d2^8\ e1^{10}\ e2^3 + 38\,885\,299\ e1^{11}\ e2^3 + 59\,301\,566\ d2\ e1^{11}\ e2^3 +$
$55\,659\,294\ d2^2\ e1^{11}\ e2^3 + 24\,570\,935\ d2^3\ e1^{11}\ e2^3 + 4\,751\,976\ d2^4\ e1^{11}\ e2^3 - 29\,054\ d2^5\ e1^{11}\ e2^3 -$
$130\,974\ d2^6\ e1^{11}\ e2^3 - 13\,634\ d2^7\ e1^{11}\ e2^3 + 8\,765\,501\ e1^{12}\ e2^3 + 9\,485\,440\ d2\ e1^{12}\ e2^3 +$
$4\,296\,459\ d2^2\ e1^{12}\ e2^3 + 840\,936\ d2^3\ e1^{12}\ e2^3 - 35\,046\ d2^4\ e1^{12}\ e2^3 - 41\,844\ d2^5\ e1^{12}\ e2^3 -$
$4376\ d2^6\ e1^{12}\ e2^3 + 1\,254\,424\ e1^{13}\ e2^3 + 1\,458\,845\ d2\ e1^{13}\ e2^3 + 612\,518\ d2^2\ e1^{13}\ e2^3 +$
$83\,017\ d2^3\ e1^{13}\ e2^3 - 11\,902\ d2^4\ e1^{13}\ e2^3 - 2810\ d2^5\ e1^{13}\ e2^3 + 67\,520\ e1^{14}\ e2^3 +$
$90\,460\ d2\ e1^{14}\ e2^3 + 41\,880\ d2^2\ e1^{14}\ e2^3 + 6405\ d2^3\ e1^{14}\ e2^3 - 140\ d2^4\ e1^{14}\ e2^3 -$
$2\,100\,745\,152\ e2^4 + 1\,121\,159\,016\ d2\ e2^4 - 214\,757\,208\ d2^2\ e2^4 + 16\,605\,792\ d2^3\ e2^4 -$
$398\,736\ d2^4\ e2^4 - 13\,589\,760\,366\ e1\ e2^4 + 5\,366\,329\,956\ d2\ e1\ e2^4 - 232\,507\,908\ d2^2\ e1\ e2^4 -$
$138\,893\,856\ d2^3\ e1\ e2^4 + 17\,459\,076\ d2^4\ e1\ e2^4 - 490\,440\ d2^5\ e1\ e2^4 - 38\,180\,767\,320\ e1^2\ e2^4 +$
$12\,730\,356\,918\ d2\ e1^2\ e2^4 + 2\,468\,141\,142\ d2^2\ e1^2\ e2^4 - 1\,290\,054\,768\ d2^3\ e1^2\ e2^4 +$
$135\,656\,640\ d2^4\ e1^2\ e2^4 - 4\,811\,100\ d2^5\ e1^2\ e2^4 + 92\,112\ d2^6\ e1^2\ e2^4 - 59\,584\,719\,675\ e1^3\ e2^4 +$
$23\,006\,383\,233\ d2\ e1^3\ e2^4 + 10\,875\,298\,703\ d2^2\ e1^3\ e2^4 - 3\,562\,135\,500\ d2^3\ e1^3\ e2^4 +$
$26\,508\,365\ d2^4\ e1^3\ e2^4 + 51\,884\,226\ d2^5\ e1^3\ e2^4 - 4\,841\,172\ d2^6\ e1^3\ e2^4 + 175\,464\ d2^7\ e1^3\ e2^4 -$
$54\,118\,574\,043\ e1^4\ e2^4 + 36\,471\,358\,790\ d2\ e1^4\ e2^4 + 23\,337\,857\,097\ d2^2\ e1^4\ e2^4 -$
$4\,744\,620\,090\ d2^3\ e1^4\ e2^4 - 674\,408\,402\ d2^4\ e1^4\ e2^4 + 137\,562\,399\ d2^5\ e1^4\ e2^4 -$
$4\,736\,632\ d2^6\ e1^4\ e2^4 - 248\,564\ d2^7\ e1^4\ e2^4 + 28\,320\ d2^8\ e1^4\ e2^4 - 25\,591\,758\,519\ e1^5\ e2^4 +$
$45\,645\,609\,664\ d2\ e1^5\ e2^4 + 31\,456\,890\,457\ d2^2\ e1^5\ e2^4 - 2\,804\,899\,887\ d2^3\ e1^5\ e2^4 -$
$1\,357\,469\,961\ d2^4\ e1^5\ e2^4 + 105\,520\,098\ d2^5\ e1^5\ e2^4 + 7\,536\,587\ d2^6\ e1^5\ e2^4 - 1\,058\,570\ d2^7\ e1^5\ e2^4 +$
$75\,520\ d2^8\ e1^5\ e2^4 - 1\,386\,397\,268\ e1^6\ e2^4 + 39\,904\,259\,538\ d2\ e1^6\ e2^4 + 28\,208\,550\,416\ d2^2\ e1^6\ e2^4 +$
$436\,395\,134\ d2^3\ e1^6\ e2^4 - 1\,213\,491\,636\ d2^4\ e1^6\ e2^4 - 9\,912\,521\ d2^5\ e1^6\ e2^4 +$
$13\,891\,126\ d2^6\ e1^6\ e2^4 - 751\,639\ d2^7\ e1^6\ e2^4 + 80\,240\ d2^8\ e1^6\ e2^4 + 5\,198\,353\,098\ e1^7\ e2^4 +$
$22\,899\,549\,508\ d2\ e1^7\ e2^4 + 16\,896\,930\,914\ d2^2\ e1^7\ e2^4 + 1\,868\,018\,813\ d2^3\ e1^7\ e2^4 -$
$542\,504\,677\ d2^4\ e1^7\ e2^4 - 58\,712\,367\ d2^5\ e1^7\ e2^4 + 8\,019\,423\ d2^6\ e1^7\ e2^4 + 152\,122\ d2^7\ e1^7\ e2^4 +$
$42\,480\ d2^8\ e1^7\ e2^4 + 2\,786\,160\,565\ e1^8\ e2^4 + 8\,245\,032\,955\ d2\ e1^8\ e2^4 + 6\,586\,948\,619\ d2^2\ e1^8\ e2^4 +$

$1\,317\,318\,936\,d2^3\,e1^8\,e2^4 - 81\,971\,709\,d2^4\,e1^8\,e2^4 - 32\,373\,291\,d2^5\,e1^8\,e2^4 + 2\,011\,999\,d2^6\,e1^8\,e2^4 +$
$380\,606\,d2^7\,e1^8\,e2^4 + 11\,210\,d2^8\,e1^8\,e2^4 + 636\,883\,413\,e1^9\,e2^4 + 1\,747\,413\,368\,d2\,e1^9\,e2^4 +$
$1\,575\,993\,758\,d2^2\,e1^9\,e2^4 + 459\,347\,674\,d2^3\,e1^9\,e2^4 + 27\,429\,781\,d2^4\,e1^9\,e2^4 -$
$5\,362\,718\,d2^5\,e1^9\,e2^4 + 323\,945\,d2^6\,e1^9\,e2^4 + 155\,701\,d2^7\,e1^9\,e2^4 + 1180\,d2^8\,e1^9\,e2^4 +$
$82\,334\,202\,e1^{10}\,e2^4 + 203\,843\,601\,d2\,e1^{10}\,e2^4 + 208\,425\,680\,d2^2\,e1^{10}\,e2^4 + 82\,424\,183\,d2^3\,e1^{10}\,e2^4 +$
$13\,512\,466\,d2^4\,e1^{10}\,e2^4 + 829\,164\,d2^5\,e1^{10}\,e2^4 + 109\,048\,d2^6\,e1^{10}\,e2^4 + 20\,866\,d2^7\,e1^{10}\,e2^4 +$
$15\,071\,967\,e1^{11}\,e2^4 + 18\,355\,269\,d2\,e1^{11}\,e2^4 + 14\,254\,838\,d2^2\,e1^{11}\,e2^4 + 6\,745\,199\,d2^3\,e1^{11}\,e2^4 +$
$1\,831\,588\,d2^4\,e1^{11}\,e2^4 + 297\,741\,d2^5\,e1^{11}\,e2^4 + 22\,248\,d2^6\,e1^{11}\,e2^4 + 3\,384\,107\,e1^{12}\,e2^4 +$
$3\,261\,253\,d2\,e1^{12}\,e2^4 + 1\,314\,285\,d2^2\,e1^{12}\,e2^4 + 337\,986\,d2^3\,e1^{12}\,e2^4 + 61\,602\,d2^4\,e1^{12}\,e2^4 +$
$7510\,d2^5\,e1^{12}\,e2^4 + 353\,806\,e1^{13}\,e2^4 + 413\,122\,d2\,e1^{13}\,e2^4 + 186\,843\,d2^2\,e1^{13}\,e2^4 +$
$39\,332\,d2^3\,e1^{13}\,e2^4 + 3040\,d2^4\,e1^{13}\,e2^4 + 12\,040\,e1^{14}\,e2^4 + 17\,850\,d2\,e1^{14}\,e2^4 + 9030\,d2^2\,e1^{14}\,e2^4 +$
$1540\,d2^3\,e1^{14}\,e2^4 - 2\,648\,886\,462\,e2^5 + 1\,673\,056\,584\,d2\,e2^5 - 401\,483\,124\,d2^2\,e2^5 +$
$43\,717\,152\,d2^3\,e2^5 - 1\,957\,812\,d2^4\,e2^5 + 23\,424\,d2^5\,e2^5 - 15\,696\,931\,212\,e1\,e2^5 +$
$8\,080\,116\,048\,d2\,e1\,e2^5 - 1\,070\,701\,608\,d2^2\,e1\,e2^5 - 99\,679\,608\,d2^3\,e1\,e2^5 + 30\,257\,760\,d2^4\,e1\,e2^5 -$
$1\,768\,632\,d2^5\,e1\,e2^5 + 22\,944\,d2^6\,e1\,e2^5 - 39\,212\,794\,476\,e1^2\,e2^5 + 19\,804\,767\,780\,d2\,e1^2\,e2^5 -$
$474\,337\,263\,d2^2\,e1^2\,e2^5 - 1\,226\,306\,304\,d2^3\,e1^2\,e2^5 + 205\,424\,855\,d2^4\,e1^2\,e2^5 -$
$10\,996\,548\,d2^5\,e1^2\,e2^5 + 266\,604\,d2^6\,e1^2\,e2^5 - 5712\,d2^7\,e1^2\,e2^5 - 51\,687\,930\,204\,e1^3\,e2^5 +$
$34\,876\,374\,655\,d2\,e1^3\,e2^5 + 3\,417\,062\,590\,d2^2\,e1^3\,e2^5 - 3\,778\,491\,386\,d2^3\,e1^3\,e2^5 +$
$356\,347\,243\,d2^4\,e1^3\,e2^5 + 17\,870\,202\,d2^5\,e1^3\,e2^5 - 3\,591\,824\,d2^6\,e1^3\,e2^5 + 199\,632\,d2^7\,e1^3\,e2^5 -$
$5664\,d2^8\,e1^3\,e2^5 - 35\,175\,489\,398\,e1^4\,e2^5 + 48\,375\,718\,752\,d2\,e1^4\,e2^5 + 10\,133\,461\,643\,d2^2\,e1^4\,e2^5 -$
$5\,784\,281\,566\,d2^3\,e1^4\,e2^5 + 41\,909\,977\,d2^4\,e1^4\,e2^5 + 96\,282\,925\,d2^5\,e1^4\,e2^5 - 8\,358\,117\,d2^6\,e1^4\,e2^5 +$
$356\,328\,d2^7\,e1^4\,e2^5 - 15\,104\,d2^8\,e1^4\,e2^5 - 6\,293\,796\,748\,e1^5\,e2^5 + 49\,980\,422\,456\,d2\,e1^5\,e2^5 +$
$14\,977\,002\,639\,d2^2\,e1^5\,e2^5 - 4\,811\,960\,342\,d2^3\,e1^5\,e2^5 - 505\,152\,571\,d2^4\,e1^5\,e2^5 +$
$115\,163\,105\,d2^5\,e1^5\,e2^5 - 4\,189\,529\,d2^6\,e1^5\,e2^5 - 21\,640\,d2^7\,e1^5\,e2^5 - 16\,048\,d2^8\,e1^5\,e2^5 +$
$8\,039\,761\,628\,e1^6\,e2^5 + 35\,633\,107\,158\,d2\,e1^6\,e2^5 + 13\,598\,392\,328\,d2^2\,e1^6\,e2^5 -$
$1\,959\,548\,659\,d2^3\,e1^6\,e2^5 - 618\,561\,935\,d2^4\,e1^6\,e2^5 + 50\,563\,209\,d2^5\,e1^6\,e2^5 +$
$2\,455\,415\,d2^6\,e1^6\,e2^5 - 436\,169\,d2^7\,e1^6\,e2^5 - 8496\,d2^8\,e1^6\,e2^5 + 6\,409\,952\,668\,e1^7\,e2^5 +$
$16\,574\,503\,925\,d2\,e1^7\,e2^5 + 7\,794\,708\,129\,d2^2\,e1^7\,e2^5 - 36\,709\,185\,d2^3\,e1^7\,e2^5 -$
$322\,019\,479\,d2^4\,e1^7\,e2^5 - 2\,204\,660\,d2^5\,e1^7\,e2^5 + 2\,554\,643\,d2^6\,e1^7\,e2^5 - 367\,287\,d2^7\,e1^7\,e2^5 -$
$2242\,d2^8\,e1^7\,e2^5 + 1\,988\,126\,868\,e1^8\,e2^5 + 4\,732\,495\,629\,d2\,e1^8\,e2^5 + 2\,749\,258\,420\,d2^2\,e1^8\,e2^5 +$
$315\,932\,143\,d2^3\,e1^8\,e2^5 - 72\,215\,247\,d2^4\,e1^8\,e2^5 - 9\,538\,885\,d2^5\,e1^8\,e2^5 + 281\,564\,d2^6\,e1^8\,e2^5 -$
$124\,277\,d2^7\,e1^8\,e2^5 - 236\,d2^8\,e1^8\,e2^5 + 280\,814\,011\,e1^9\,e2^5 + 751\,828\,946\,d2\,e1^9\,e2^5 +$
$549\,876\,352\,d2^2\,e1^9\,e2^5 + 124\,642\,574\,d2^3\,e1^9\,e2^5 - 1\,608\,400\,d2^4\,e1^9\,e2^5 - 3\,157\,773\,d2^5\,e1^9\,e2^5 -$
$255\,918\,d2^6\,e1^9\,e2^5 - 15\,514\,d2^7\,e1^9\,e2^5 + 22\,296\,304\,e1^{10}\,e2^5 + 56\,626\,836\,d2\,e1^{10}\,e2^5 +$
$50\,081\,953\,d2^2\,e1^{10}\,e2^5 + 16\,441\,811\,d2^3\,e1^{10}\,e2^5 + 1\,157\,772\,d2^4\,e1^{10}\,e2^5 - 383\,549\,d2^5\,e1^{10}\,e2^5 -$
$61\,868\,d2^6\,e1^{10}\,e2^5 + 4\,529\,898\,e1^{11}\,e2^5 + 3\,158\,698\,d2\,e1^{11}\,e2^5 + 904\,912\,d2^2\,e1^{11}\,e2^5 +$
$48\,989\,d2^3\,e1^{11}\,e2^5 - 70\,573\,d2^4\,e1^{11}\,e2^5 - 13\,558\,d2^5\,e1^{11}\,e2^5 + 885\,497\,e1^{12}\,e2^5 +$
$677\,512\,d2\,e1^{12}\,e2^5 + 122\,358\,d2^2\,e1^{12}\,e2^5 - 26\,058\,d2^3\,e1^{12}\,e2^5 - 8260\,d2^4\,e1^{12}\,e2^5 +$
$56\,330\,e1^{13}\,e2^5 + 53\,475\,d2\,e1^{13}\,e2^5 + 13\,545\,d2^2\,e1^{13}\,e2^5 + 140\,d2^3\,e1^{13}\,e2^5 - 2\,278\,597\,572\,e2^6 +$
$1\,659\,663\,948\,d2\,e2^6 - 467\,208\,624\,d2^2\,e2^6 + 63\,336\,336\,d2^3\,e2^6 - 3\,927\,744\,d2^4\,e2^6 + 84\,192\,d2^5\,e2^6 -$
$144\,d2^6\,e2^6 - 12\,476\,274\,114\,e1\,e2^6 + 7\,856\,388\,600\,d2\,e1\,e2^6 - 1\,639\,442\,432\,d2^2\,e1\,e2^6 +$
$42\,607\,564\,d2^3\,e1\,e2^6 + 24\,210\,756\,d2^4\,e1\,e2^6 - 2\,414\,832\,d2^5\,e1\,e2^6 + 60\,012\,d2^6\,e1\,e2^6 -$
$72\,d2^7\,e1\,e2^6 - 27\,243\,529\,668\,e1^2\,e2^6 + 18\,490\,548\,384\,d2\,e1^2\,e2^6 - 3\,303\,764\,566\,d2^2\,e1^2\,e2^6 -$
$463\,098\,356\,d2^3\,e1^2\,e2^6 + 160\,373\,982\,d2^4\,e1^2\,e2^6 - 11\,603\,564\,d2^5\,e1^2\,e2^6 + 267\,480\,d2^6\,e1^2\,e2^6 -$
$3164\,d2^7\,e1^2\,e2^6 - 28\,179\,973\,729\,e1^3\,e2^6 + 30\,083\,340\,206\,d2\,e1^3\,e2^6 - 4\,083\,412\,569\,d2^2\,e1^3\,e2^6 -$
$2\,016\,112\,895\,d2^3\,e1^3\,e2^6 + 401\,100\,958\,d2^4\,e1^3\,e2^6 - 14\,732\,644\,d2^5\,e1^3\,e2^6 -$
$560\,721\,d2^6\,e1^3\,e2^6 + 31\,522\,d2^7\,e1^3\,e2^6 - 9\,431\,710\,073\,e1^4\,e2^6 + 37\,191\,623\,420\,d2\,e1^4\,e2^6 -$
$2\,173\,030\,250\,d2^2\,e1^4\,e2^6 - 3\,571\,456\,016\,d2^3\,e1^4\,e2^6 + 388\,107\,068\,d2^4\,e1^4\,e2^6 +$

$18\,332\,051\, d2^{5}\, e1^{4}\, e2^{6} - 3\,424\,824\, d2^{6}\, e1^{4}\, e2^{6} + 141\,691\, d2^{7}\, e1^{4}\, e2^{6} + 8\,413\,770\,717\, e1^{5}\, e2^{6} +$
$33\,519\,841\,159\, d2\, e1^{5}\, e2^{6} + 1\,473\,150\,969\, d2^{2}\, e1^{5}\, e2^{6} - 3\,323\,556\,243\, d2^{3}\, e1^{5}\, e2^{6} +$
$66\,044\,008\, d2^{4}\, e1^{5}\, e2^{6} + 47\,103\,901\, d2^{5}\, e1^{5}\, e2^{6} - 4\,118\,408\, d2^{6}\, e1^{5}\, e2^{6} + 203\,078\, d2^{7}\, e1^{5}\, e2^{6} +$
$10\,471\,448\,776\, e1^{6}\, e2^{6} + 20\,601\,744\,266\, d2\, e1^{6}\, e2^{6} + 3\,268\,069\,975\, d2^{2}\, e1^{6}\, e2^{6} -$
$1\,656\,169\,192\, d2^{3}\, e1^{6}\, e2^{6} - 143\,535\,113\, d2^{4}\, e1^{6}\, e2^{6} + 31\,226\,409\, d2^{5}\, e1^{6}\, e2^{6} - 1\,342\,302\, d2^{6}\, e1^{6}\, e2^{6} +$
$134\,402\, d2^{7}\, e1^{6}\, e2^{6} + 4\,669\,860\,531\, e1^{7}\, e2^{6} + 8\,122\,881\,354\, d2\, e1^{7}\, e2^{6} + 2\,309\,177\,758\, d2^{2}\, e1^{7}\, e2^{6} -$
$354\,030\,082\, d2^{3}\, e1^{7}\, e2^{6} - 107\,648\,822\, d2^{4}\, e1^{7}\, e2^{6} + 6\,704\,308\, d2^{5}\, e1^{7}\, e2^{6} + 554\,385\, d2^{6}\, e1^{7}\, e2^{6} +$
$42\,503\, d2^{7}\, e1^{7}\, e2^{6} + 981\,899\,102\, e1^{8}\, e2^{6} + 1\,894\,618\,909\, d2\, e1^{8}\, e2^{6} + 815\,690\,958\, d2^{2}\, e1^{8}\, e2^{6} +$
$28\,633\,879\, d2^{3}\, e1^{8}\, e2^{6} - 26\,511\,367\, d2^{4}\, e1^{8}\, e2^{6} - 307\,316\, d2^{5}\, e1^{8}\, e2^{6} + 441\,530\, d2^{6}\, e1^{8}\, e2^{6} +$
$5214\, d2^{7}\, e1^{8}\, e2^{6} + 87\,800\,511\, e1^{9}\, e2^{6} + 223\,618\,845\, d2\, e1^{9}\, e2^{6} + 138\,978\,980\, d2^{2}\, e1^{9}\, e2^{6} +$
$26\,138\,472\, d2^{3}\, e1^{9}\, e2^{6} - 156\,251\, d2^{4}\, e1^{9}\, e2^{6} - 24\,917\, d2^{5}\, e1^{9}\, e2^{6} + 75\,372\, d2^{6}\, e1^{9}\, e2^{6} +$
$4\,145\,657\, e1^{10}\, e2^{6} + 9\,352\,367\, d2\, e1^{10}\, e2^{6} + 8\,371\,824\, d2^{2}\, e1^{10}\, e2^{6} + 3\,267\,386\, d2^{3}\, e1^{10}\, e2^{6} +$
$654\,354\, d2^{4}\, e1^{10}\, e2^{6} + 61\,746\, d2^{5}\, e1^{10}\, e2^{6} + 1\,226\,221\, e1^{11}\, e2^{6} + 663\,325\, d2\, e1^{11}\, e2^{6} +$
$183\,944\, d2^{2}\, e1^{11}\, e2^{6} + 66\,878\, d2^{3}\, e1^{11}\, e2^{6} + 16\,080\, d2^{4}\, e1^{11}\, e2^{6} + 180\,739\, e1^{12}\, e2^{6} +$
$147\,368\, d2\, e1^{12}\, e2^{6} + 42\,898\, d2^{2}\, e1^{12}\, e2^{6} + 4460\, d2^{3}\, e1^{12}\, e2^{6} + 7280\, e1^{13}\, e2^{6} +$
$7490\, d2\, e1^{13}\, e2^{6} + 1960\, d2^{2}\, e1^{13}\, e2^{6} - 1\,224\,910\,236\, e2^{7} + 1\,063\,808\,904\, d2\, e2^{7} -$
$341\,374\,900\, d2^{2}\, e2^{7} + 54\,047\,328\, d2^{3}\, e2^{7} - 4\,102\,464\, d2^{4}\, e2^{7} + 114\,336\, d2^{5}\, e2^{7} -$
$276\, d2^{6}\, e2^{7} - 6\,413\,400\,546\, e1\, e2^{7} + 4\,918\,401\,098\, d2\, e1\, e2^{7} - 1\,396\,449\,636\, d2^{2}\, e1\, e2^{7} +$
$139\,791\,304\, d2^{3}\, e1\, e2^{7} + 5\,491\,862\, d2^{4}\, e1\, e2^{7} - 1\,473\,436\, d2^{5}\, e1\, e2^{7} + 52\,880\, d2^{6}\, e1\, e2^{7} -$
$72\, d2^{7}\, e1\, e2^{7} - 11\,760\,334\,248\, e1^{2}\, e2^{7} + 10\,442\,159\,698\, d2\, e1^{2}\, e2^{7} - 3\,493\,829\,423\, d2^{2}\, e1^{2}\, e2^{7} +$
$198\,203\,182\, d2^{3}\, e1^{2}\, e2^{7} + 57\,760\,509\, d2^{4}\, e1^{2}\, e2^{7} - 6\,307\,700\, d2^{5}\, e1^{2}\, e2^{7} + 136\,255\, d2^{6}\, e1^{2}\, e2^{7} +$
$2620\, d2^{7}\, e1^{2}\, e2^{7} - 7\,065\,289\,808\, e1^{3}\, e2^{7} + 15\,005\,151\,979\, d2\, e1^{3}\, e2^{7} - 5\,778\,671\,059\, d2^{2}\, e1^{3}\, e2^{7} -$
$225\,776\,643\, d2^{3}\, e1^{3}\, e2^{7} + 202\,849\,939\, d2^{4}\, e1^{3}\, e2^{7} - 15\,757\,271\, d2^{5}\, e1^{3}\, e2^{7} + 362\,785\, d2^{6}\, e1^{3}\, e2^{7} -$
$978\, d2^{7}\, e1^{3}\, e2^{7} + 5\,329\,863\,694\, e1^{4}\, e2^{7} + 16\,759\,354\,355\, d2\, e1^{4}\, e2^{7} - 5\,718\,155\,507\, d2^{2}\, e1^{4}\, e2^{7} -$
$1\,029\,381\,736\, d2^{3}\, e1^{4}\, e2^{7} + 275\,933\,687\, d2^{4}\, e1^{4}\, e2^{7} - 12\,096\,892\, d2^{5}\, e1^{4}\, e2^{7} + 59\,024\, d2^{6}\, e1^{4}\, e2^{7} -$
$9823\, d2^{7}\, e1^{4}\, e2^{7} + 11\,088\,483\,002\, e1^{5}\, e2^{7} + 13\,930\,932\,742\, d2\, e1^{5}\, e2^{7} - 2\,888\,266\,974\, d2^{2}\, e1^{5}\, e2^{7} -$
$1\,249\,475\,247\, d2^{3}\, e1^{5}\, e2^{7} + 150\,041\,040\, d2^{4}\, e1^{5}\, e2^{7} + 4\,089\,182\, d2^{5}\, e1^{5}\, e2^{7} - 659\,522\, d2^{6}\, e1^{5}\, e2^{7} -$
$9925\, d2^{7}\, e1^{5}\, e2^{7} + 7\,224\,251\,507\, e1^{6}\, e2^{7} + 7\,888\,350\,173\, d2\, e1^{6}\, e2^{7} - 306\,922\,740\, d2^{2}\, e1^{6}\, e2^{7} -$
$712\,891\,641\, d2^{3}\, e1^{6}\, e2^{7} + 10\,457\,524\, d2^{4}\, e1^{6}\, e2^{7} + 8\,427\,801\, d2^{5}\, e1^{6}\, e2^{7} - 713\,944\, d2^{6}\, e1^{6}\, e2^{7} -$
$3879\, d2^{7}\, e1^{6}\, e2^{7} + 2\,288\,367\,860\, e1^{7}\, e2^{7} + 2\,785\,148\,940\, d2\, e1^{7}\, e2^{7} + 383\,539\,372\, d2^{2}\, e1^{7}\, e2^{7} -$
$181\,309\,388\, d2^{3}\, e1^{7}\, e2^{7} - 19\,760\,923\, d2^{4}\, e1^{7}\, e2^{7} + 2\,606\,393\, d2^{5}\, e1^{7}\, e2^{7} - 283\,414\, d2^{6}\, e1^{7}\, e2^{7} -$
$542\, d2^{7}\, e1^{7}\, e2^{7} + 346\,911\,826\, e1^{8}\, e2^{7} + 546\,267\,681\, d2\, e1^{8}\, e2^{7} + 179\,602\,966\, d2^{2}\, e1^{8}\, e2^{7} -$
$6\,315\,399\, d2^{3}\, e1^{8}\, e2^{7} - 6\,582\,150\, d2^{4}\, e1^{8}\, e2^{7} - 246\,033\, d2^{5}\, e1^{8}\, e2^{7} - 39\,728\, d2^{6}\, e1^{8}\, e2^{7} +$
$19\,184\,561\, e1^{9}\, e2^{7} + 45\,698\,824\, d2\, e1^{9}\, e2^{7} + 25\,522\,850\, d2^{2}\, e1^{9}\, e2^{7} + 3\,618\,987\, d2^{3}\, e1^{9}\, e2^{7} -$
$579\,206\, d2^{4}\, e1^{9}\, e2^{7} - 151\,834\, d2^{5}\, e1^{9}\, e2^{7} + 457\,962\, e1^{10}\, e2^{7} + 204\,779\, d2\, e1^{10}\, e2^{7} +$
$140\,758\, d2^{2}\, e1^{10}\, e2^{7} - 32\,287\, d2^{3}\, e1^{10}\, e2^{7} - 20\,700\, d2^{4}\, e1^{10}\, e2^{7} + 239\,167\, e1^{11}\, e2^{7} +$
$66\,297\, d2\, e1^{11}\, e2^{7} - 32\,932\, d2^{2}\, e1^{11}\, e2^{7} - 12\,940\, d2^{3}\, e1^{11}\, e2^{7} + 21\,690\, e1^{12}\, e2^{7} +$
$11\,655\, d2\, e1^{12}\, e2^{7} + 560\, d2^{2}\, e1^{12}\, e2^{7} - 235\,793\,970\, e2^{8} + 371\,650\,222\, d2\, e2^{8} - 143\,622\,308\, d2^{2}\, e2^{8} +$
$26\,225\,756\, d2^{3}\, e2^{8} - 2\,329\,840\, d2^{4}\, e2^{8} + 72\,232\, d2^{5}\, e2^{8} - 120\, d2^{6}\, e2^{8} - 1\,567\,306\,334\, e1\, e2^{8} +$
$1\,755\,251\,334\, d2\, e1\, e2^{8} - 682\,438\,114\, d2^{2}\, e1\, e2^{8} + 116\,049\,372\, d2^{3}\, e1\, e2^{8} - 5\,177\,866\, d2^{4}\, e1\, e2^{8} -$
$293\,840\, d2^{5}\, e1\, e2^{8} + 17\,188\, d2^{6}\, e1\, e2^{8} - 2\,004\,978\,970\, e1^{2}\, e2^{8} + 2\,799\,561\,546\, d2\, e1^{2}\, e2^{8} -$
$1\,815\,108\,030\, d2^{2}\, e1^{2}\, e2^{8} + 313\,706\,680\, d2^{3}\, e1^{2}\, e2^{8} - 2\,082\,314\, d2^{4}\, e1^{2}\, e2^{8} - 1\,673\,582\, d2^{5}\, e1^{2}\, e2^{8} +$
$55\,150\, d2^{6}\, e1^{2}\, e2^{8} + 1\,940\,410\,803\, e1^{3}\, e2^{8} + 2\,872\,640\,305\, d2\, e1^{3}\, e2^{8} - 3\,345\,047\,142\, d2^{2}\, e1^{3}\, e2^{8} +$
$398\,309\,651\, d2^{3}\, e1^{3}\, e2^{8} + 37\,000\,702\, d2^{4}\, e1^{3}\, e2^{8} - 5\,208\,314\, d2^{5}\, e1^{3}\, e2^{8} + 140\,643\, d2^{6}\, e1^{3}\, e2^{8} +$
$6\,910\,993\,415\, e1^{4}\, e2^{8} + 3\,038\,104\,617\, d2\, e1^{4}\, e2^{8} - 3\,619\,956\,843\, d2^{2}\, e1^{4}\, e2^{8} + 91\,234\,602\, d2^{3}\, e1^{4}\, e2^{8} +$
$86\,253\,762\, d2^{4}\, e1^{4}\, e2^{8} - 7\,160\,176\, d2^{5}\, e1^{4}\, e2^{8} + 203\,248\, d2^{6}\, e1^{4}\, e2^{8} + 6\,795\,072\,399\, e1^{5}\, e2^{8} +$
$2\,982\,595\,778\, d2\, e1^{5}\, e2^{8} - 2\,123\,897\,730\, d2^{2}\, e1^{5}\, e2^{8} - 212\,108\,330\, d2^{3}\, e1^{5}\, e2^{8} +$
$67\,497\,961\, d2^{4}\, e1^{5}\, e2^{8} - 3\,501\,729\, d2^{5}\, e1^{5}\, e2^{8} + 145\,259\, d2^{6}\, e1^{5}\, e2^{8} + 3\,235\,533\,145\, e1^{6}\, e2^{8} +$

$1 917 464 915 d2 e1^{6} e2^{8} - 562 769 640 d2^{2} e1^{6} e2^{8} - 184 838 711 d2^{3} e1^{6} e2^{8} +$
$17 133 351 d2^{4} e1^{6} e2^{8} + 337 492 d2^{5} e1^{6} e2^{8} + 49 146 d2^{6} e1^{6} e2^{8} + 790 558 372 e1^{7} e2^{8} +$
$685 264 759 d2 e1^{7} e2^{8} + 6 002 977 d2^{2} e1^{7} e2^{8} - 53 041 614 d2^{3} e1^{7} e2^{8} - 1 562 015 d2^{4} e1^{7} e2^{8} +$
$720 084 d2^{5} e1^{7} e2^{8} + 6328 d2^{6} e1^{7} e2^{8} + 88 252 415 e1^{8} e2^{8} + 116 333 753 d2 e1^{8} e2^{8} +$
$30 540 269 d2^{2} e1^{8} e2^{8} - 2 477 624 d2^{3} e1^{8} e2^{8} - 669 074 d2^{4} e1^{8} e2^{8} + 146 276 d2^{5} e1^{8} e2^{8} +$
$2 163 785 e1^{9} e2^{8} + 5 559 764 d2 e1^{9} e2^{8} + 3 393 965 d2^{2} e1^{9} e2^{8} + 844 681 d2^{3} e1^{9} e2^{8} +$
$99 540 d2^{4} e1^{9} e2^{8} + 71 076 e1^{10} e2^{8} - 31 834 d2 e1^{10} e2^{8} + 24 782 d2^{2} e1^{10} e2^{8} +$
$18 570 d2^{3} e1^{10} e2^{8} + 42 371 e1^{11} e2^{8} + 22 077 d2 e1^{11} e2^{8} + 3440 d2^{2} e1^{11} e2^{8} + 2240 e1^{12} e2^{8} +$
$1190 d2 e1^{12} e2^{8} + 213 616 968 e2^{9} - 8 555 114 d2 e2^{9} - 19 634 652 d2^{2} e2^{9} + 5 404 984 d2^{3} e2^{9} -$
$655 246 d2^{4} e2^{9} + 21 240 d2^{5} e2^{9} + 12 d2^{6} e2^{9} + 411 272 812 e1 e2^{9} + 112 771 036 d2 e1 e2^{9} -$
$141 493 118 d2^{2} e1 e2^{9} + 45 270 186 d2^{3} e1 e2^{9} - 4 287 652 d2^{4} e1 e2^{9} + 76 968 d2^{5} e1 e2^{9} +$
$1376 d2^{6} e1 e2^{9} + 820 798 223 e1^{2} e2^{9} - 503 548 190 d2 e1^{2} e2^{9} - 369 172 071 d2^{2} e1^{2} e2^{9} +$
$150 922 308 d2^{3} e1^{2} e2^{9} - 10 166 861 d2^{4} e1^{2} e2^{9} - 52 514 d2^{5} e1^{2} e2^{9} + 12 039 d2^{6} e1^{2} e2^{9} +$
$2 252 837 221 e1^{3} e2^{9} - 1 466 936 279 d2 e1^{3} e2^{9} - 913 566 433 d2^{2} e1^{3} e2^{9} + 272 058 634 d2^{3} e1^{3} e2^{9} -$
$9 696 640 d2^{4} e1^{3} e2^{9} - 457 432 d2^{5} e1^{3} e2^{9} + 20 697 d2^{6} e1^{3} e2^{9} + 3 385 829 685 e1^{4} e2^{9} -$
$1 239 926 680 d2 e1^{4} e2^{9} - 1 197 877 340 d2^{2} e1^{4} e2^{9} + 197 951 905 d2^{3} e1^{4} e2^{9} +$
$6 138 138 d2^{4} e1^{4} e2^{9} - 1 027 732 d2^{5} e1^{4} e2^{9} + 14 928 d2^{6} e1^{4} e2^{9} + 2 532 817 956 e1^{5} e2^{9} -$
$205 031 637 d2 e1^{5} e2^{9} - 781 216 093 d2^{2} e1^{5} e2^{9} + 27 110 078 d2^{3} e1^{5} e2^{9} + 13 742 333 d2^{4} e1^{5} e2^{9} -$
$940 639 d2^{5} e1^{5} e2^{9} + 4997 d2^{6} e1^{5} e2^{9} + 992 722 818 e1^{6} e2^{9} + 234 857 072 d2 e1^{6} e2^{9} -$
$230 917 196 d2^{2} e1^{6} e2^{9} - 27 730 456 d2^{3} e1^{6} e2^{9} + 5 720 848 d2^{4} e1^{6} e2^{9} - 358 178 d2^{5} e1^{6} e2^{9} +$
$644 d2^{6} e1^{6} e2^{9} + 198 306 126 e1^{7} e2^{9} + 125 983 724 d2 e1^{7} e2^{9} - 13 154 823 d2^{2} e1^{7} e2^{9} -$
$9 891 826 d2^{3} e1^{7} e2^{9} + 88 351 d2^{4} e1^{7} e2^{9} - 46 484 d2^{5} e1^{7} e2^{9} + 15 556 623 e1^{8} e2^{9} +$
$18 683 201 d2 e1^{8} e2^{9} + 4 627 144 d2^{2} e1^{8} e2^{9} - 488 629 d2^{3} e1^{8} e2^{9} - 225 320 d2^{4} e1^{8} e2^{9} -$
$87 314 e1^{9} e2^{9} + 102 825 d2 e1^{9} e2^{9} + 32 022 d2^{2} e1^{9} e2^{9} - 16 610 d2^{3} e1^{9} e2^{9} + 9298 e1^{10} e2^{9} -$
$22 213 d2 e1^{10} e2^{9} - 11 360 d2^{2} e1^{10} e2^{9} + 3570 e1^{11} e2^{9} + 490 d2 e1^{11} e2^{9} + 220 395 800 e2^{10} -$
$81 011 786 d2 e2^{10} + 11 474 018 d2^{2} e2^{10} - 950 654 d2^{3} e2^{10} - 44 472 d2^{4} e2^{10} + 2712 d2^{5} e2^{10} +$
$529 213 030 e1 e2^{10} - 204 316 256 d2 e1 e2^{10} + 34 967 616 d2^{2} e1 e2^{10} + 4 870 010 d2^{3} e1 e2^{10} -$
$1 145 392 d2^{4} e1 e2^{10} + 37 160 d2^{5} e1 e2^{10} + 506 580 732 e1^{2} e2^{10} - 709 797 624 d2 e1^{2} e2^{10} +$
$115 557 478 d2^{2} e1^{2} e2^{10} + 29 246 484 d2^{3} e1^{2} e2^{10} - 3 744 382 d2^{4} e1^{2} e2^{10} + 88 870 d2^{5} e1^{2} e2^{10} +$
$589 453 032 e1^{3} e2^{10} - 1 313 119 141 d2 e1^{3} e2^{10} + 33 926 285 d2^{2} e1^{3} e2^{10} + 76 608 600 d2^{3} e1^{3} e2^{10} -$
$6 105 520 d2^{4} e1^{3} e2^{10} + 112 756 d2^{5} e1^{3} e2^{10} + 775 397 460 e1^{4} e2^{10} - 1 096 177 445 d2 e1^{4} e2^{10} -$
$168 660 570 d2^{2} e1^{4} e2^{10} + 76 686 447 d2^{3} e1^{4} e2^{10} - 3 639 264 d2^{4} e1^{4} e2^{10} +$
$52 416 d2^{5} e1^{4} e2^{10} + 567 186 775 e1^{5} e2^{10} - 384 224 285 d2 e1^{5} e2^{10} - 173 161 781 d2^{2} e1^{5} e2^{10} +$
$25 304 403 d2^{3} e1^{5} e2^{10} + 303 876 d2^{4} e1^{5} e2^{10} - 3422 d2^{5} e1^{5} e2^{10} + 214 174 061 e1^{6} e2^{10} -$
$13 523 323 d2 e1^{6} e2^{10} - 56 636 125 d2^{2} e1^{6} e2^{10} - 1 704 380 d2^{3} e1^{6} e2^{10} + 840 698 d2^{4} e1^{6} e2^{10} -$
$5156 d2^{5} e1^{6} e2^{10} + 37 350 372 e1^{7} e2^{10} + 19 138 976 d2 e1^{7} e2^{10} - 3 355 383 d2^{2} e1^{7} e2^{10} -$
$1 362 099 d2^{3} e1^{7} e2^{10} + 166 120 d2^{4} e1^{7} e2^{10} + 1 536 105 e1^{8} e2^{10} + 1 914 688 d2 e1^{8} e2^{10} +$
$653 562 d2^{2} e1^{8} e2^{10} + 98 246 d2^{3} e1^{8} e2^{10} - 40 959 e1^{9} e2^{10} - 6441 d2 e1^{9} e2^{10} +$
$11 740 d2^{2} e1^{9} e2^{10} + 4310 e1^{10} e2^{10} + 1330 d2 e1^{10} e2^{10} + 280 e1^{11} e2^{10} + 98 277 928 e2^{11} -$
$42 938 790 d2 e2^{11} + 6 205 880 d2^{2} e2^{11} - 781 194 d2^{3} e2^{11} + 18 236 d2^{4} e2^{11} + 136 d2^{5} e2^{11} +$
$214 149 656 e1 e2^{11} - 89 673 894 d2 e1 e2^{11} + 29 675 672 d2^{2} e1 e2^{11} - 2 665 606 d2^{3} e1 e2^{11} -$
$46 402 d2^{4} e1 e2^{11} + 3148 d2^{5} e1 e2^{11} - 6 365 735 e1^{2} e2^{11} - 216 149 806 d2 e1^{2} e2^{11} +$
$99 480 656 d2^{2} e1^{2} e2^{11} - 2 701 788 d2^{3} e1^{2} e2^{11} - 460 513 d2^{4} e1^{2} e2^{11} + 16 810 d2^{5} e1^{2} e2^{11} -$
$161 681 450 e1^{3} e2^{11} - 440 836 758 d2 e1^{3} e2^{11} + 121 030 146 d2^{2} e1^{3} e2^{11} + 6 245 289 d2^{3} e1^{3} e2^{11} -$
$1 018 175 d2^{4} e1^{3} e2^{11} + 26 301 d2^{5} e1^{3} e2^{11} - 42 616 305 e1^{4} e2^{11} - 388 888 601 d2 e1^{4} e2^{11} +$
$30 052 773 d2^{2} e1^{4} e2^{11} + 13 461 545 d2^{3} e1^{4} e2^{11} - 921 612 d2^{4} e1^{4} e2^{11} + 15 933 d2^{5} e1^{4} e2^{11} +$
$54 466 581 e1^{5} e2^{11} - 142 699 165 d2 e1^{5} e2^{11} - 22 004 082 d2^{2} e1^{5} e2^{11} + 6 684 134 d2^{3} e1^{5} e2^{11} -$
$297 072 d2^{4} e1^{5} e2^{11} + 3300 d2^{5} e1^{5} e2^{11} + 34 449 276 e1^{6} e2^{11} - 11 222 967 d2 e1^{6} e2^{11} -$

$9539784\, d2^{2} e1^{6} e2^{11} + 367764\, d2^{3} e1^{6} e2^{11} - 14080\, d2^{4} e1^{6} e2^{11} + 5260371\, e1^{7} e2^{11} +$
$2784573\, d2\, e1^{7} e2^{11} - 223298\, d2^{2} e1^{7} e2^{11} - 209190\, d2^{3} e1^{7} e2^{11} + 24410\, e1^{8} e2^{11} +$
$38279\, d2\, e1^{8} e2^{11} - 6448\, d2^{2} e1^{8} e2^{11} - 6054\, e1^{9} e2^{11} - 5290\, d2\, e1^{9} e2^{11} + 140\, e1^{10} e2^{11} +$
$20612180\, e2^{12} - 12096046\, d2\, e2^{12} + 896046\, d2^{2} e2^{12} - 150672\, d2^{3} e2^{12} + 3656\, d2^{4} e2^{12} +$
$43691716\, e1\, e2^{12} - 8107028\, d2\, e1\, e2^{12} + 5980466\, d2^{2} e1\, e2^{12} - 1024840\, d2^{3} e1\, e2^{12} +$
$25010\, d2^{4} e1\, e2^{12} - 94580062\, e1^{2} e2^{12} + 12219450\, d2\, e1^{2} e2^{12} + 27150306\, d2^{2} e1^{2} e2^{12} -$
$2491100\, d2^{3} e1^{2} e2^{12} + 36634\, d2^{4} e1^{2} e2^{12} - 176695759\, e1^{3} e2^{12} - 50470700\, d2\, e1^{3} e2^{12} +$
$44015419\, d2^{2} e1^{3} e2^{12} - 2000997\, d2^{3} e1^{3} e2^{12} - 6097\, d2^{4} e1^{3} e2^{12} - 93323840\, e1^{4} e2^{12} -$
$79009718\, d2\, e1^{4} e2^{12} + 20638510\, d2^{2} e1^{4} e2^{12} + 482924\, d2^{3} e1^{4} e2^{12} - 48278\, d2^{4} e1^{4} e2^{12} -$
$7890913\, e1^{5} e2^{12} - 31902664\, d2\, e1^{5} e2^{12} - 717032\, d2^{2} e1^{5} e2^{12} + 796227\, d2^{3} e1^{5} e2^{12} -$
$21020\, d2^{4} e1^{5} e2^{12} + 4871974\, e1^{6} e2^{12} - 1909282\, d2\, e1^{6} e2^{12} - 1274754\, d2^{2} e1^{6} e2^{12} +$
$111010\, d2^{3} e1^{6} e2^{12} + 450473\, e1^{7} e2^{12} + 282959\, d2\, e1^{7} e2^{12} + 59008\, d2^{2} e1^{7} e2^{12} -$
$4938\, e1^{8} e2^{12} + 3730\, d2\, e1^{8} e2^{12} + 200\, e1^{9} e2^{12} - 1881158\, e2^{13} - 2361130\, d2\, e2^{13} -$
$115988\, d2^{2} e2^{13} - 6236\, d2^{3} e2^{13} + 150\, d2^{4} e2^{13} + 4795958\, e1\, e2^{13} + 4386350\, d2\, e1\, e2^{13} -$
$467310\, d2^{2} e1\, e2^{13} - 101810\, d2^{3} e1\, e2^{13} + 2352\, d2^{4} e1\, e2^{13} - 34298364\, e1^{2} e2^{13} +$
$30187590\, d2\, e1^{2} e2^{13} + 2121758\, d2^{2} e1^{2} e2^{13} - 418432\, d2^{3} e1^{2} e2^{13} + 10610\, d2^{4} e1^{2} e2^{13} -$
$64011254\, e1^{3} e2^{13} + 17050610\, d2\, e1^{3} e2^{13} + 7308215\, d2^{2} e1^{3} e2^{13} - 559210\, d2^{3} e1^{3} e2^{13} +$
$12657\, d2^{4} e1^{3} e2^{13} - 34180034\, e1^{4} e2^{13} - 8476445\, d2\, e1^{4} e2^{13} + 4755710\, d2^{2} e1^{4} e2^{13} -$
$185233\, d2^{3} e1^{4} e2^{13} + 4180\, d2^{4} e1^{4} e2^{13} - 3387740\, e1^{5} e2^{13} - 5065874\, d2\, e1^{5} e2^{13} +$
$284597\, d2^{2} e1^{5} e2^{13} + 24790\, d2^{3} e1^{5} e2^{13} + 654442\, e1^{6} e2^{13} - 45043\, d2\, e1^{6} e2^{13} -$
$119244\, d2^{2} e1^{6} e2^{13} + 10958\, e1^{7} e2^{13} - 706\, d2\, e1^{7} e2^{13} - 1020\, e1^{8} e2^{13} - 3001468\, e2^{14} -$
$503730\, d2\, e2^{14} - 44354\, d2^{2} e2^{14} + 802\, d2^{3} e2^{14} + 1172848\, e1\, e2^{14} + 1062144\, d2\, e1\, e2^{14} -$
$367880\, d2^{2} e1\, e2^{14} + 4622\, d2^{3} e1\, e2^{14} + 193274\, e1^{2} e2^{14} + 10242172\, d2\, e1^{2} e2^{14} -$
$607628\, d2^{2} e1^{2} e2^{14} - 5512\, d2^{3} e1^{2} e2^{14} - 12381179\, e1^{3} e2^{14} + 9062043\, d2\, e1^{3} e2^{14} +$
$301747\, d2^{2} e1^{3} e2^{14} - 34977\, d2^{3} e1^{3} e2^{14} - 7446542\, e1^{4} e2^{14} - 86768\, d2\, e1^{4} e2^{14} +$
$564344\, d2^{2} e1^{4} e2^{14} - 22370\, d2^{3} e1^{4} e2^{14} - 412177\, e1^{5} e2^{14} - 590953\, d2\, e1^{5} e2^{14} +$
$40596\, d2^{2} e1^{5} e2^{14} + 52930\, e1^{6} e2^{14} + 19958\, d2\, e1^{6} e2^{14} + 440\, e1^{7} e2^{14} - 1196996\, e2^{15} -$
$122570\, d2\, e2^{15} - 1968\, d2^{2} e2^{15} + 14\, d2^{3} e2^{15} + 408488\, e1\, e2^{15} - 149824\, d2\, e1\, e2^{15} -$
$45256\, d2^{2} e1\, e2^{15} + 678\, d2^{3} e1\, e2^{15} + 4332412\, e1^{2} e2^{15} + 1529376\, d2\, e1^{2} e2^{15} -$
$155710\, d2^{2} e1^{2} e2^{15} + 3446\, d2^{3} e1^{2} e2^{15} - 1137008\, e1^{3} e2^{15} + 1991522\, d2\, e1^{3} e2^{15} -$
$85894\, d2^{2} e1^{3} e2^{15} + 2354\, d2^{3} e1^{3} e2^{15} - 1113724\, e1^{4} e2^{15} + 84586\, d2\, e1^{4} e2^{15} +$
$30216\, d2^{2} e1^{4} e2^{15} - 970\, e1^{5} e2^{15} - 38238\, d2\, e1^{5} e2^{15} + 132\, e1^{6} e2^{15} - 304354\, e2^{16} -$
$19088\, d2\, e2^{16} + 334\, d2^{2} e2^{16} - 46940\, e1\, e2^{16} - 83862\, d2\, e1\, e2^{16} - 312\, d2^{2} e1\, e2^{16} +$
$1773576\, e1^{2} e2^{16} + 24514\, d2\, e1^{2} e2^{16} - 7990\, d2^{2} e1^{2} e2^{16} + 428\, e1^{3} e2^{16} + 241012\, d2\, e1^{3} e2^{16} -$
$11016\, d2^{2} e1^{3} e2^{16} - 109966\, e1^{4} e2^{16} + 6312\, d2\, e1^{4} e2^{16} + 2936\, e1^{5} e2^{16} - 53048\, e2^{17} -$
$1100\, d2\, e2^{17} + 12\, d2^{2} e2^{17} - 70782\, e1\, e2^{17} - 9378\, d2\, e1\, e2^{17} + 88\, d2^{2} e1\, e2^{17} + 376188\, e1^{2} e2^{17} -$
$23392\, d2\, e1^{2} e2^{17} + 548\, d2^{2} e1^{2} e2^{17} + 6168\, e1^{3} e2^{17} + 13512\, d2\, e1^{3} e2^{17} - 5284\, e1^{4} e2^{17} -$
$5752\, e2^{18} + 24\, d2\, e2^{18} - 19432\, e1\, e2^{18} - 16\, d2\, e1\, e2^{18} + 44032\, e1^{2} e2^{18} - 2312\, d2\, e1^{2} e2^{18} +$
$16\, e1^{3} e2^{18} - 288\, e2^{19} - 2280\, e1\, e2^{19} + 24\, d2\, e1\, e2^{19} + 2256\, e1^{2} e2^{19} - 96\, e1\, e2^{20}) \Big/$

$\Big(3\,(2 + e2)\,(7 + 7\, e1 + d2\, e1 + e1^{2} + 9\, e2 - d2\, e2 + e1\, e2 + 2\, e2^{2})$
$(6 + 9\, e1 + 2\, d2\, e1 + 4\, e1^{2} + d2\, e1^{2} + 6\, e2 - 2\, d2\, e2 + 3\, e1\, e2 - d2\, e1\, e2 - e2^{2} + e1\, e2^{2} - e2^{3})^{2}\ (18 +$
$21\, e1 + 2\, d2\, e1 + 4\, e1^{2} + d2\, e1^{2} + 30\, e2 - 2\, d2\, e2 + 15\, e1\, e2 - d2\, e1\, e2 + 14\, e2^{2} + 4\, e1\, e2^{2} + 2\, e2^{3})$
$(123 + 234\, e1 + 34\, d2\, e1 + 137\, e1^{2} + 30\, d2\, e1^{2} + 3\, d2^{2} e1^{2} + 26\, e1^{3} + 2\, d2\, e1^{3} + 3\, e1^{4} + 330\, e2 -$
$34\, d2\, e2 + 348\, e1\, e2 + 16\, d2\, e1\, e2 - 6\, d2^{2} e1\, e2 + 68\, e1^{2} e2 + 6\, e1^{3} e2 + 307\, e2^{2} - 46\, d2\, e2^{2} +$
$3\, d2^{2} e2^{2} + 126\, e1\, e2^{2} + 10\, d2\, e1\, e2^{2} + 11\, e1^{2} e2^{2} + 116\, e2^{3} - 12\, d2\, e2^{3} + 12\, e1\, e2^{3} + 16\, e2^{4})$
$(173 + 310\, e1 + 46\, d2\, e1 + 159\, e1^{2} + 34\, d2\, e1^{2} + 5\, d2^{2} e1^{2} + 22\, e1^{3} - 2\, d2\, e1^{3} + 5\, e1^{4} + 486\, e2 -$

46 d2 e2 + 484 e1 e2 + 32 d2 e1 e2 − 10 d2^2 e1 e2 + 76 e1^2 e2 + 10 e1^3 e2 + 485 e2^2 − 66 d2 e2^2 +
5 d2^2 e2^2 + 194 e1 e2^2 + 22 d2 e1 e2^2 + 13 e1^2 e2^2 + 204 e2^3 − 20 d2 e2^3 + 20 e1 e2^3 + 32 e2^4))

In[ ]:=
```
Variables[g2]
```

Out[ ]= {e2, e1, d2}

Finding possible values of e1 such that g1 = 0

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 1/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= (8.81… < d2 ≤ 49.3… &&
e2 == Root[−238 783 − 17 643 d2 − 336 d2^2 + (−460 240 + 55 545 d2 + 3360 d2^2) #1 +
(−214 030 + 73 980 d2) #1^2 + (41 950 + 8700 d2) #1^3 + 33 400 #1^4 + 1000 #1^5 &, 3]) ||
(d2 + −49.3… > 0 && e2 == Root[−238 783 − 17 643 d2 − 336 d2^2 +
(−460 240 + 55 545 d2 + 3360 d2^2) #1 + (−214 030 + 73 980 d2) #1^2 +
(41 950 + 8700 d2) #1^3 + 33 400 #1^4 + 1000 #1^5 &, 1])

Out[ ]= False

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 2/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= (10.4… < d2 ≤ 18.7… &&
e2 == Root[−38 911 − 5146 d2 − 187 d2^2 + (−69 665 + 6270 d2 + 935 d2^2) #1 +
(−31 405 + 10 355 d2) #1^2 + (4850 + 1600 d2) #1^3 + 4575 #1^4 + 250 #1^5 &, 3]) ||
(d2 > 18.7… && e2 == Root[−38 911 − 5146 d2 − 187 d2^2 + (−69 665 + 6270 d2 + 935 d2^2) #1 +
(−31 405 + 10 355 d2) #1^2 + (4850 + 1600 d2) #1^3 + 4575 #1^4 + 250 #1^5 &, 1])

Out[ ]= False

```
In[•]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 3/10;
        Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
        Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify

Out[•]= d2 > 12.5… &&
         e2 == Root[-399 303 - 71 523 d2 - 3726 d2^2 + (-666 780 + 43 815 d2 + 12 420 d2^2) #1 +
           (-291 810 + 91 460 d2) #1^2 + (35 550 + 17 300 d2) #1^3 + 39 600 #1^4 + 3000 #1^5 &, 1]

Out[•]= False

In[•]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 4/10;
        Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
        Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify

Out[•]= 165 d2 > 2.51… × 10^3 &&
         e2 == Root[-63 086 - 13 716 d2 - 912 d2^2 + (-98 645 + 4560 d2 + 2280 d2^2) #1 +
           (-41 990 + 12 465 d2) #1^2 + (4025 + 2775 d2) #1^3 + 5300 #1^4 + 500 #1^5 &, 1]

Out[•]= False

In[•]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 5/10;
        Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
        Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify

Out[•]= d2 > 19.1… &&
         e2 == Root[-1007 - 251 d2 - 20 d2^2 + (-1480 + 45 d2 + 40 d2^2) #1 + (-614 + 172 d2) #1^2 +
           (46 + 44 d2) #1^3 + 72 #1^4 + 8 #1^5 &, 1]

Out[•]= False

In[•]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 6/10;
        Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
        Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
          c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify

Out[•]= d2 > 24.9… && e2 == Root[-96 921 - 26 766 d2 - 2457 d2^2 + (-134 355 + 2340 d2 + 4095 d2^2) #1 +
           (-54 435 + 14 335 d2) #1^2 + (3150 + 4150 d2) #1^3 + 5925 #1^4 + 750 #1^5 &, 1]

Out[•]= False
```

In[ ]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = $\frac{7}{10}$;
Reduce[g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify
Reduce[g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify

Out[ ]= d2 > 34.8… &&
e2 == Root[-944 743 - 282 723 d2 - 29 106 d2^2 + (-1 239 220 + 8235 d2 + 41 580 d2^2) #1 +
(-491 290 + 121 140 d2) #1^2 + (21 550 + 39 300 d2) #1^3 + 49 600 #1^4 + 7000 #1^5 &, 1]

Out[ ]= False

In[ ]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = $\frac{8}{10}$;
Reduce[g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify
Reduce[g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify

Out[ ]= d2 + -54.6… > 0 &&
e2 == Root[-142 456 - 45 496 d2 - 5152 d2^2 + (-177 335 - 420 d2 + 6440 d2^2) #1 +
(-68 920 + 15 845 d2) #1^2 + (2225 + 5725 d2) #1^3 + 6450 #1^4 + 1000 #1^5 &, 1]

Out[ ]= False

In[ ]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = $\frac{9}{10}$;
Reduce[g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify
Reduce[g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify

Out[ ]= d2 + -114.… > 0 &&
e2 == Root[-1 362 303 - 459 243 d2 - 56 376 d2^2 + (-1 613 760 - 16 095 d2 + 62 640 d2^2) #1 +
(-615 870 + 131 420 d2) #1^2 + (13 950 + 52 700 d2) #1^3 + 53 400 #1^4 + 9000 #1^5 &, 1]

Out[ ]= False

In[ ]:= ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 1;
Reduce[g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify
Reduce[g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0, {d2, e2}] // FullSimplify

Out[ ]= False

Out[ ]= False

Setting the value of e1, d2: Equations (16)-(18)

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 5/10; d2 = 20;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 &&
   beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0, {e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0,
  {e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= e2 == 0.771…

Out[ ]= False

In[ ]:=
```
g1 // Factor
```

Out[ ]=

$$\frac{2\left(-14027+15420\,e2+2826\,e2^2+926\,e2^3+72\,e2^4+8\,e2^5\right)}{(2+e2)\left(17163-19172\,e2+12044\,e2^2-1888\,e2^3+256\,e2^4\right)}$$

In[ ]:=
```
g2 // Factor
```

Out[ ]=

$$-\Big(\Big(2\,\big(-126512084933352295+478399692835658985\,e2-762458375238510816\,e2^2+730329622432012315\,e2^3-466875108129002500\,e2^4+180057388265535584\,e2^5-42412278548678749\,e2^6+7565318705371668\,e2^7-1899913140260206\,e2^8+200501244715092\,e2^9+44607817747872\,e2^{10}+18408318367872\,e2^{11}+8352995841088\,e2^{12}+1190085589888\,e2^{13}+348608893184\,e2^{14}+33760183296\,e2^{15}+6787676672\,e2^{16}+473953280\,e2^{17}+64299008\,e2^{18}+2555904\,e2^{19}+196608\,e2^{20}\big)\Big)\Big/\Big(3\,(2+e2)\,\big(83-42\,e2+8\,e2^2\big)\,\big(-73+85\,e2+e2^2+2\,e2^3\big)^2\,\big(109-25\,e2+32\,e2^2+4\,e2^3\big)\big(17163-19172\,e2+12044\,e2^2-1888\,e2^3+256\,e2^4\big)\big(23933-29628\,e2+23764\,e2^2-2976\,e2^3+512\,e2^4\big)\Big)\Big)$$

In[ ]:=
```
e2 = 0.771…;
e2 // N
```

Out[ ]= 0.771291

Perturbation

Setting e2 such that g1 = 0, g2 < 0, trace(*J*) = 0 (no perturbation)

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 2;
e1 = 5/10; d2 = 20;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2);
c1 = (d2 - d2 e1 - (2 + e2) (2 + e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(1 + e1 + e2);
e2 = 0.771…;
g1 = (2 (-14027 + 15420 e2 + 2826 e2^2 + 926 e2^3 + 72 e2^4 + 8 e2^5))/((2 + e2) (17163 - 19172 e2 + 12044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4));
g2 = -((2 (-126512084933352295 + 478399692835658985 e2 - 762458375238510816 e2^2 +
       730329622432012315 e2^3 - 466875108129002500 e2^4 + 180057388265535584 e2^5 -
       42412278548678749 e2^6 + 7565318705371668 e2^7 - 1899913140260206 e2^8 +
       200501244715092 e2^9 + 44607817747872 e2^10 + 18408318367872 e2^11 +
       8352995841088 e2^12 + 1190085589888 e2^13 + 348608893184 e2^14 + 33760183296 e2^15 +
       6787676672 e2^16 + 473953280 e2^17 + 64299008 e2^18 + 2555904 e2^19 + 196608 e2^20)) /
     (3 (2 + e2) (83 - 42 e2 + 8 e2^2) (-73 + 85 e2 + e2^2 + 2 e2^3)^2 (109 - 25 e2 + 32 e2^2 + 4 e2^3)
       (17163 - 19172 e2 + 12044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4)
       (23933 - 29628 e2 + 23764 e2^2 - 2976 e2^3 + 512 e2^4)));
{g1,
  g2} //
 N
```

Out[ ]= $\{4.68034\times10^{-18}, -0.0278896\}$

In[ ]:=
```
ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol]
```

Out[ ]= {x → 1., y → 8.02571}

Out[ ]= $\{1.06859\times10^{-15} + 1.14234\, i, 1.06859\times10^{-15} - 1.14234\, i\}$

3.2.1. Perturbing e2 such that g1 > 0, g2 < 0, trace(*J*) = 0

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 2;
e1 = 5/10; d2 = 20;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2);
c1 = (d2 - d2 e1 - (2 + e2) (2 + e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(1 + e1 + e2);
e2 = 78/100; (*perturbed parameter for g1>0*)
g1 = (2 (-14027 + 15420 e2 + 2826 e2^2 + 926 e2^3 + 72 e2^4 + 8 e2^5))/((2 + e2) (17163 - 19172 e2 + 12044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4));
g2 = -((2 (-126512084933352295 + 478399692835658985 e2 - 762458375238510816 e2^2 +
      730329622432012315 e2^3 - 466875108129002500 e2^4 + 180057388265535584 e2^5 -
      42412278548678749 e2^6 + 7565318705371668 e2^7 - 1899913140260206 e2^8 +
      200501244715092 e2^9 + 44607817747872 e2^10 + 18408318367872 e2^11 +
      8352995841088 e2^12 + 1190085589888 e2^13 + 348608893184 e2^14 + 33760183296 e2^15 +
      6787676672 e2^16 + 473953280 e2^17 + 64299008 e2^18 + 2555904 e2^19 + 196608 e2^20)) /
    (3 (2 + e2) (83 - 42 e2 + 8 e2^2) (-73 + 85 e2 + e2^2 + 2 e2^3)^2 (109 - 25 e2 + 32 e2^2 + 4 e2^3)
     (17163 - 19172 e2 + 12044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4)
     (23933 - 29628 e2 + 23764 e2^2 - 2976 e2^3 + 512 e2^4)));
{c1, d1}
{c1, d1} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{1229}{5700}, \frac{59173}{2850}\right\}$

Out[ ]= {0.215614, 20.7625}

Out[ ]= {0.015511, -0.666999}

In[ ]:=
```
ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol] // FullSimplify
```

Out[ ]= {x → 1., y → 7.99123}

Out[ ]= $\{-1.6237\times10^{-15} + 1.06195\, i, -1.6237\times10^{-15} - 1.06195\, i\}$

3.2.2. Perturbing c1 and e2 such that g1 > 0, g2 < 0, trace(*J*) < 0

In[ ]:=
```
Quit
```

```
In[ ]:= ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 2;
e1 = 5/10; d2 = 20;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2);
c1 = 22/100; (*perturbed parameter for trace(J)<0*)
e2 = 78/100; (*perturbed parameter for g1>0*)
g1 = (2 (-14 027 + 15 420 e2 + 2826 e2^2 + 926 e2^3 + 72 e2^4 + 8 e2^5))/((2 + e2) (17 163 - 19 172 e2 + 12 044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4));
g2 = -((2 (-126 512 084 933 352 295 + 478 399 692 835 658 985 e2 - 762 458 375 238 510 816 e2^2 +
      730 329 622 432 012 315 e2^3 - 466 875 108 129 002 500 e2^4 + 180 057 388 265 535 584 e2^5 -
      42 412 278 548 678 749 e2^6 + 7 565 318 705 371 668 e2^7 - 1 899 913 140 260 206 e2^8 +
      200 501 244 715 092 e2^9 + 44 607 817 747 872 e2^10 + 18 408 318 367 872 e2^11 +
      8 352 995 841 088 e2^12 + 1 190 085 589 888 e2^13 + 348 608 893 184 e2^14 + 33 760 183 296 e2^15 +
      6 787 676 672 e2^16 + 473 953 280 e2^17 + 64 299 008 e2^18 + 2 555 904 e2^19 + 196 608 e2^20)) /
    (3 (2 + e2) (83 - 42 e2 + 8 e2^2) (-73 + 85 e2 + e2^2 + 2 e2^3)^2 (109 - 25 e2 + 32 e2^2 + 4 e2^3)
      (17 163 - 19 172 e2 + 12 044 e2^2 - 1888 e2^3 + 256 e2^4)
      (23 933 - 29 628 e2 + 23 764 e2^2 - 2976 e2^3 + 512 e2^4)));
{c1, d1}
{c1, d1} // N
{g1, g2} // N

Out[ ]= {11/50, 72 148/3475}

Out[ ]= {0.22, 20.762}

Out[ ]= {0.015511, -0.666999}

In[ ]:= ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol]

Out[ ]= {x → 1., y → 7.99281}

Out[ ]= {-0.00179856 + 1.0619 i, -0.00179856 - 1.0619 i}

In[ ]:= -0.0017985611510798125` * 2

Out[ ]= -0.00359712
```

3.2.1. Plotting the limit cycles when $g1 > 0$, $g2 < 0$,

trace(J) = 0

Preparations

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
   {Plot, ParametricPlot, ListPlot, ListLinePlot};
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@ {Plot, ListPlot,
    ListLinePlot, ListLogLogPlot, ParametricPlot, DateListPlot, DiscretePlot};
LaunchKernels[];
```

The function creating the plots

In[ ]:=
```
ClearAll[p, q, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
p[x_, y_] := x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
q[x_, y_] := -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 2;
e1 = 5/10; d2 = 20;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2);
c1 = (d2 - d2 e1 - (2 + e2) (2 + e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(1 + e1 + e2);
e2 = 78/100; (*perturbed parameter for g1>0*)
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1}
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{39}{50}, \frac{1}{2}, 20, \frac{59173}{2850}, 1, 2, \frac{1229}{5700}\right\}$

Out[ ]= {0.78, 0.5, 20., 20.7625, 1., 2., 0.215614}

In[•]:=
```
ClearAll[nsol, ev, plotter];
nsol = First@NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotter[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000,
  ar_ : Automatic, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
    {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]],
    {t, 0, τ}, Epilog → {Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint],
      Orange, Point[{x, y} /. nsol]}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AspectRatio → ar, AxesLabel → {x, y}, LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]
```

Out[•]= {x → 1.0000000000000000000, y → 7.9912280701754385965}

Out[•]= $\{1.896901190933694959 \times 10^{-21} + 1.061951199856750942\, i,$
$1.896901190933694959 \times 10^{-21} - 1.061951199856750942\, i\}$

Plotter with arrow

In[ ]:=
```
ClearAll[nsol, ev, plotterarrow];
nsol = First@NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotterarrow[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000, ar_ : Automatic,
  arrow_, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
    {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Black, Arrowheads → 0.07, Arrow[{startingpoint, arrow}],
      Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange,
       Point[{x, y} /. nsol]
     }, PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar,
    AxesLabel → {x, y}, LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]
```

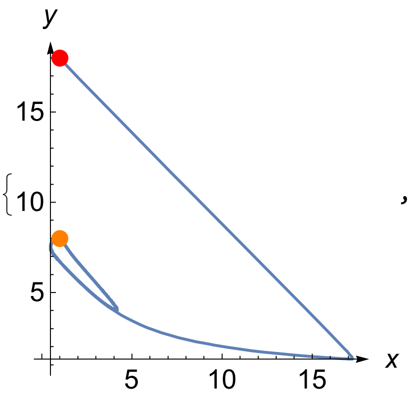
Out[ ]= {x → 1.0000000000000000000, y → 7.9912280701754385965}

Out[ ]= $\{1.896901190933694959\times10^{-21} + 1.061951199856750942\,i,$
$1.896901190933694959\times10^{-21} - 1.061951199856750942\,i\}$

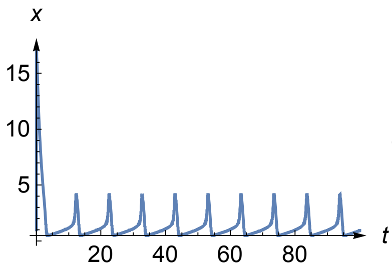
Figure 2

In[ ]:=
```
plotter[100, {0, 10}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
plotterarrow[100, {0, 10}, Automatic,
 100, 1000, Automatic, {3.586, 15.36}, Method → "BDF"]
```

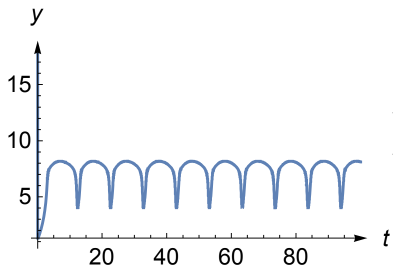
Out[ ]= {



,

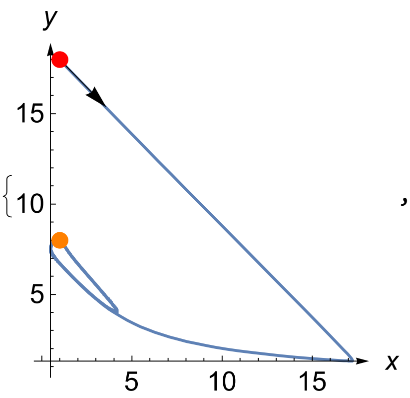


,

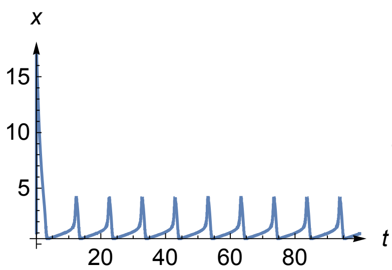


}

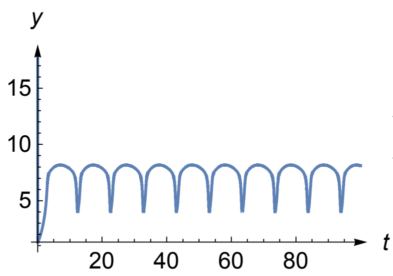
Out[ ]= {



,



,

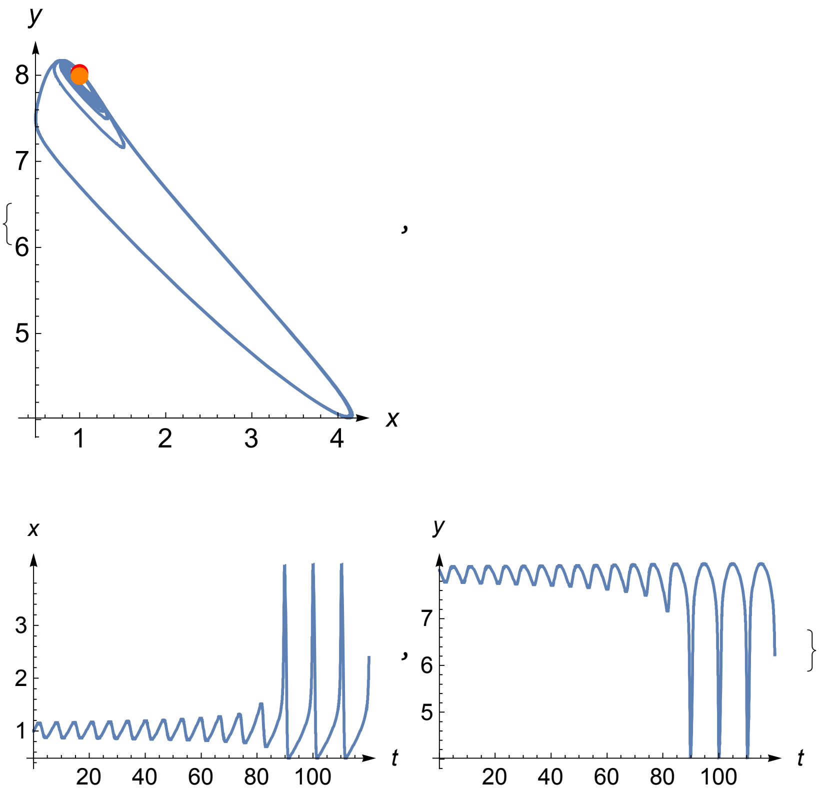


}

Figure 3

In[ ]:=
```
plotter[120, {0, 0.038}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
```

Out[ ]=



3.2.2. Plotting the limit cycles when g1 > 0, g2 < 0, trace(*J*) < 0

Preparations

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
  {Plot, ParametricPlot, ListPlot, ListLinePlot};
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@ {Plot, ListPlot,
   ListLinePlot, ListLogLogPlot, ParametricPlot, DateListPlot, DiscretePlot};
LaunchKernels[];
```

The function creating the plots

In[ ]:=
```
ClearAll[p, q, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
p[x_, y_] := x^2 y + x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
q[x_, y_] := -x^2 y - x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 2;
e1 = 5/10; d2 = 20;
d1 = (d2 (2 + e1) + c1 (e1 - e2) + (2 + e2) f1 + (2 + e1) f2)/(2 + e2);
c1 = 22/100; (*perturbed parameter for trace(J)<0*)
e2 = 78/100; (*perturbed parameter for g1>0*)
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1}
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{39}{50}, \frac{1}{2}, 20, \frac{72148}{3475}, 1, 2, \frac{11}{50}\right\}$

Out[ ]= {0.78, 0.5, 20., 20.762, 1., 2., 0.22}

In[ ]:=
```
ClearAll[nsol, ev, plotter];
nsol = First@NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotter[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000,
  ar_ : Automatic, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
     {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ}, Epilog →
      {Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange, Point[{x, y} /. nsol]},
    PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar, AxesLabel → {x, y},
    LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]
```

Out[ ]= {x → 1.0000000000000000000, y → 7.9928057553956834532}

Out[ ]= {-0.001798561151079136689 + 1.061903917803024083 ⅈ,
 -0.001798561151079136689 - 1.061903917803024083 ⅈ}

Plotter with arrow

In[=]:=
```
ClearAll[nsol, ev, plotterarrow];
nsol = First@NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotterarrow[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000, ar_ : Automatic,
  arrow_, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
     Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
    {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Black, Arrowheads → 0.07, Arrow[{startingpoint, arrow}],
      Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange,
      Point[{x, y} /. nsol]
     }, PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar,
    AxesLabel → {x, y}, LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]
```

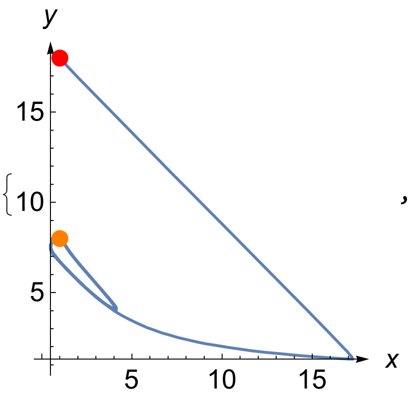
Out[=]= {x → 1.0000000000000000000, y → 7.9928057553956834532}

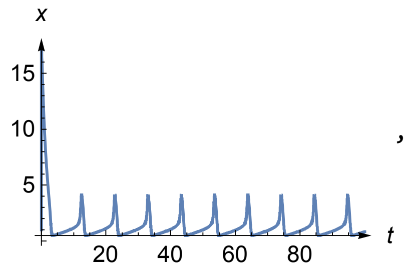
Out[=]= {−0.001798561151079136689 + 1.061903917803024083 ⅈ,
 −0.001798561151079136689 − 1.061903917803024083 ⅈ}

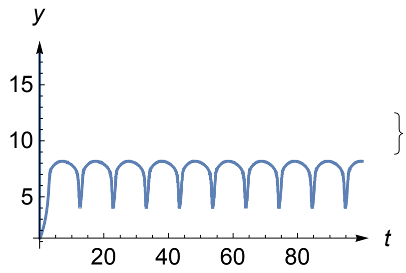
Figure 4

In[ ]:=
```
plotter[100, {0, 10}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
plotterarrow[100, {0, 10}, Automatic,
 100, 1000, Automatic, {3.586, 15.36}, Method → "BDF"]
```

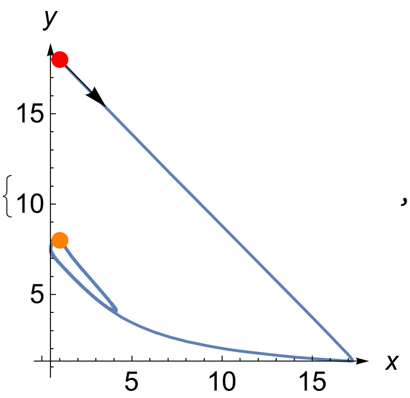
Out[ ]=

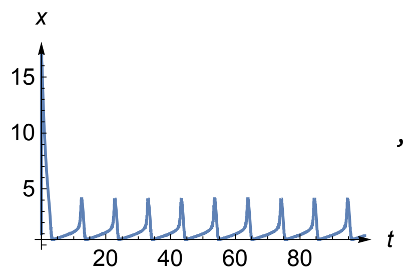






Out[ ]=





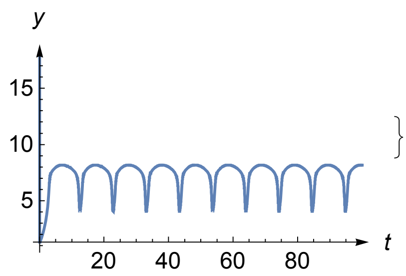


Figure 5

In[ ]:=
```
plotter[120, {0, 0.042}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
```

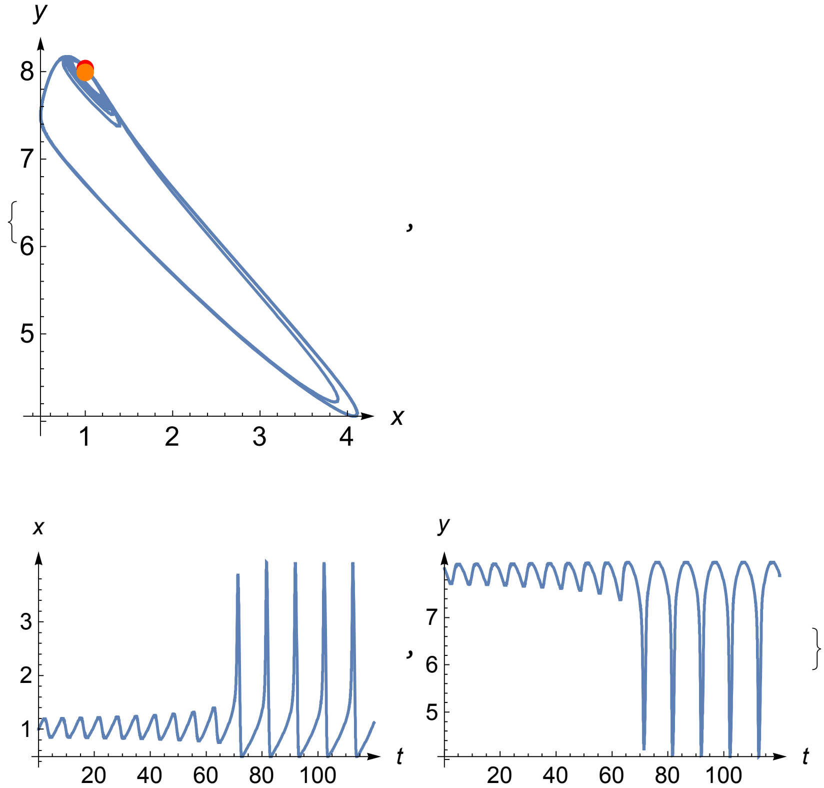
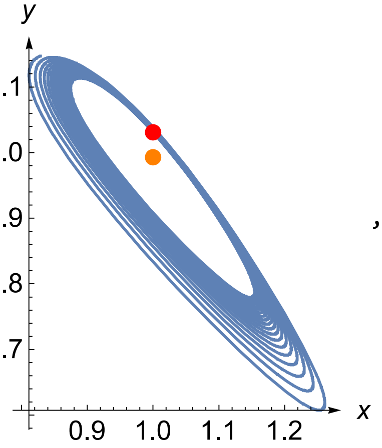
Out[ ]=


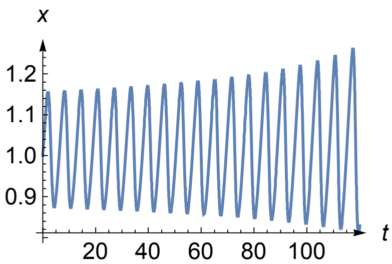
Figure 6

In[*]:=
```
plotter[120, {0, 0.038}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
plotterarrow[120, {0, 0.038}, Automatic,
 100, 1000, Automatic, {1.066, 7.956}, Method → "BDF"]
```

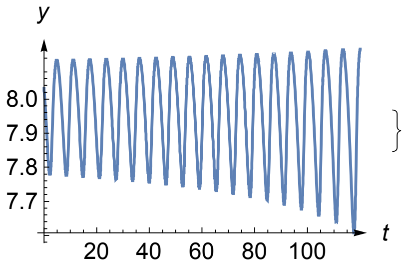
Out[*]= {



,

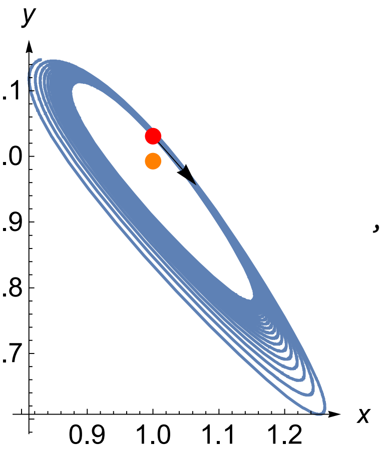


,

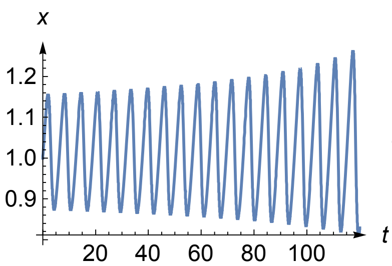


}

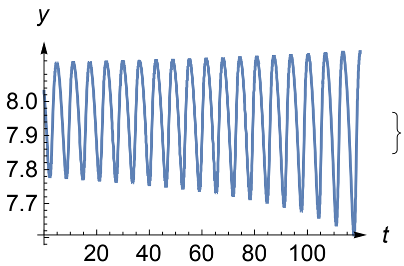
Out[*]= {



,



,

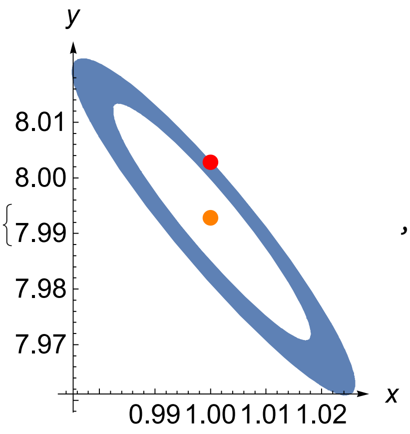


}

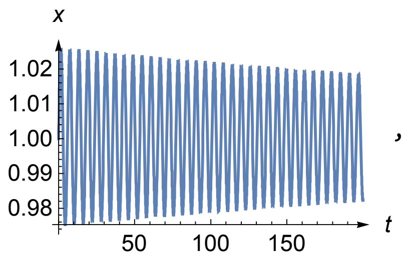
Figure 7

In[]:=
```
plotter[200, {0, 0.01}, Automatic, 100, 1000, Automatic, Method → "BDF"]
plotterarrow[200, {0, 0.01}, Automatic,
 100, 1000, Automatic, {1.007, 7.994}, Method → "BDF"]
```

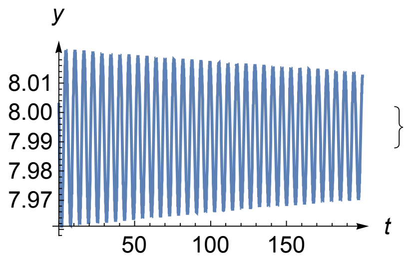
Out[]= {



,

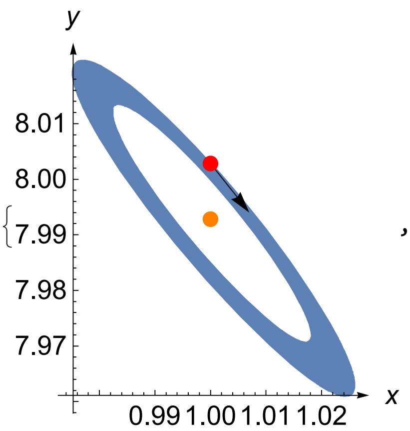


,

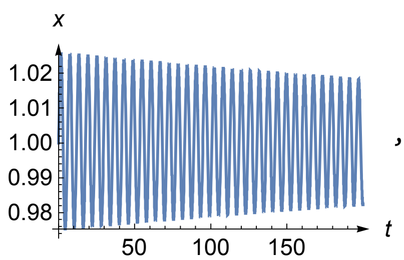


}

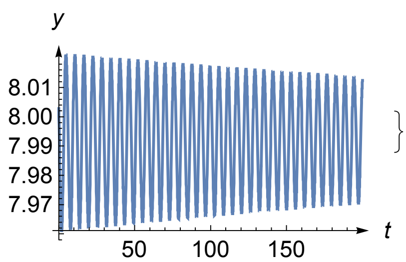
Out[]= {



,



,



}

Model 2 with an unstable outer a stable inner limit cycle

Preparations

System (19)

$x' = x^2 y - x y - c1\, x^2 - d1\, x + e1\, y + f1$
$y' = -x^2 y + x y + c1\, x^2 + d2\, x - e2\, y + f2$

c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2 ≥ 0

The ReactionKinetics program package

The ReactionKinetics program package is available at http://extras.springer.com (ISBN: 978-1-4939-8643-9).
It can be used if either ReactionKinetics.m is put in the same folder as this notebook or ReactionKinetics.wl is added in the packages in the applications.

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
  {ContourPlot, DateListPlot, Plot, ListLinePlot, ListPlot, ListLogPlot,
   LogLinearPlot, LogPlot, ParametricPlot, Plot3D, RegionPlot};
LaunchKernels[];
Needs["ReactionKinetics`"];
```

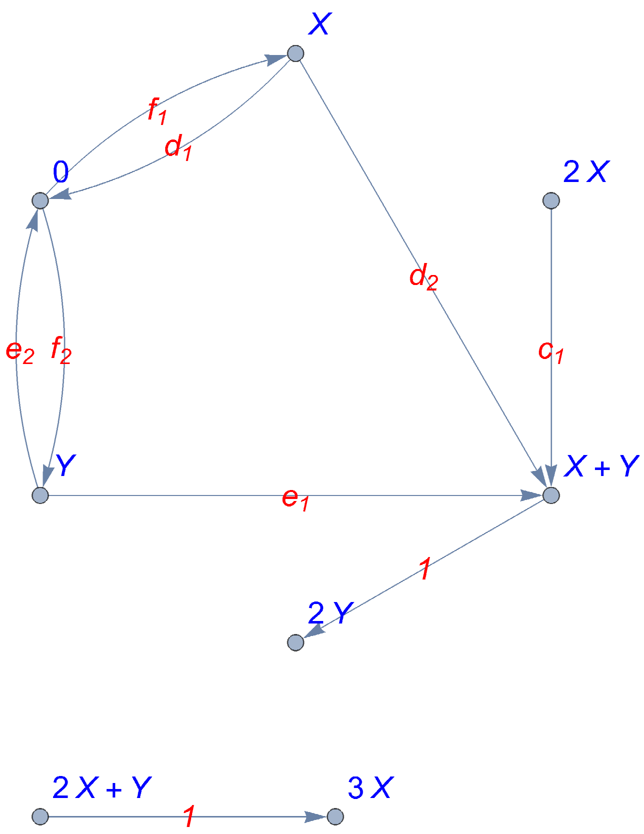
LaunchKernels: Some subkernels are already running. Not launching default kernels again.

Figure 8: Creating the reaction graph with the help of the ReactionKinetics package

In[ ]:=
```
ClearAll[model2];
model2 = {2 X + Y → 3 X, X → 0, 2 X → X + Y → 2 Y, 0 → X → X + Y, 0 → Y → X + Y, Y → 0};
RightHandSide[{model2}, {1, d1, c1, 1, f1, d2, f2, e1, e2}, {x, y}]
model2fig = ShowFHJGraph[model2, {1, d₁, c₁, 1, f₁, d₂, f₂, e₁, e₂}, DirectedEdges → True,
   VertexLabels -> Automatic, EdgeLabelStyle → Directive[Red, Italic, 16],
  VertexLabelStyle → Directive[Blue, 16], GraphLayout -> "TutteEmbedding"]
```

Out[ ]= $\{f1 - d1\,x - c1\,x^2 + e1\,y - x\,y + x^2\,y,\ f2 + d2\,x + c1\,x^2 - e2\,y + x\,y - x^2\,y\}$

Out[ ]=



In[ ]:=
```
Export["Fig-8-Model2.pdf", model2fig]
```

Out[ ]= Fig-8-Model2.pdf

The singular point is shifted into the origin

Singular points if x0 = 1

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
Solve[{xd == 0, yd == 0} /. x → 1, {d1, y}] // FullSimplify
```

Out[ ]= $\left\{\left\{d1 \to \frac{c1\ (e1 - e2) + e2\ f1 + e1\ (d2 + f2)}{e2},\ y \to \frac{c1 + d2 + f2}{e2}\right\}\right\}$

The singular point (if x0 = 1) is shifted into (0, 0)

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, x0, y0, x1d, y1d, xx1, yy1];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
x0 = 1;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2; y0 = (c1 + d2 + f2)/e2;
xx1 = x - x0; yy1 = y - y0;
x1d = D[xx1, x] xd + D[xx1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
y1d = D[yy1, x] xd + D[yy1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
```

Out[ ]= $-\frac{1}{e2}\left(-c1\ x1 - d2\ x1 + c1\ e1\ x1 + d2\ e1\ x1 + c1\ e2\ x1 + e2\ f1\ x1 - f2\ x1 + e1\ f2\ x1 - c1\ x1^2 - d2\ x1^2 + c1\ e2\ x1^2 - f2\ x1^2 - e1\ e2\ y1 - e2\ x1\ y1 - e2\ x1^2\ y1\right)$

Out[ ]= $-\frac{1}{e2}\left(c1\ x1 + d2\ x1 - 2\ c1\ e2\ x1 - d2\ e2\ x1 + f2\ x1 + c1\ x1^2 + d2\ x1^2 - c1\ e2\ x1^2 + f2\ x1^2 + e2^2\ y1 + e2\ x1\ y1 + e2\ x1^2\ y1\right)$

The Jacobian at the origin

In[ ]:=
```
Jac = D[{x1d, y1d}, {{x1, y1}}];
JacOrigin = Jac /. {x1 → 0, y1 → 0} // Simplify
```

Out[ ]= $\left\{\left\{\frac{d2 - d2\ e1 - c1\ (-1 + e1 + e2) - e2\ f1 + f2 - e1\ f2}{e2},\ e1\right\},\ \left\{-\frac{c1 + d2 - 2\ c1\ e2 - d2\ e2 + f2}{e2},\ -e2\right\}\right\}$

In[ ]:=
```
trace = Tr[JacOrigin] // Factor
Solve[trace == 0, c1] // FullSimplify
```

Out[ ]= $-\frac{-c1 - d2 + c1\ e1 + d2\ e1 + c1\ e2 + e2^2 + e2\ f1 - f2 + e1\ f2}{e2}$

Out[ ]= $\left\{\left\{c1 \to \frac{d2 - d2\ e1 - e2\ (e2 + f1) + f2 - e1\ f2}{-1 + e1 + e2}\right\}\right\}$

```
In[ ]:= c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
        evalues = Eigenvalues[JacOrigin] // FullSimplify
```

$$\left\{-\frac{1}{\sqrt{-1+e1+e2}}\,i\,\sqrt{\left(d2\,e1\,(e1-e2)-(-1+e2)\,e2^2+e1\,(-f1+e2\,(-1+e2+2\,f1)-f2)+2\,e1^2\,f2\right)},\ \frac{1}{\sqrt{-1+e1+e2}}\,i\,\sqrt{\left(d2\,e1\,(e1-e2)-(-1+e2)\,e2^2+e1\,(-f1+e2\,(-1+e2+2\,f1)-f2)+2\,e1^2\,f2\right)}\right\}$$

```
In[ ]:= beta = -evalues[[1]]^2 // Factor
```

$$\frac{1}{-1+e1+e2}\left(d2\,e1^2-e1\,e2-d2\,e1\,e2+e2^2+e1\,e2^2-e2^3-e1\,f1+2\,e1\,e2\,f1-e1\,f2+2\,e1^2\,f2\right)$$

```
In[ ]:= pp = x1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor
        qq = y1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor
```

$$\frac{1}{-1+e1+e2}\left(-e2\,x+e1\,e2\,x+e2^2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e1\,y+e1^2\,y+e1\,e2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right)$$

$$-\frac{1}{-1+e1+e2}\left(d2\,e1\,x-e2\,x-d2\,e2\,x+2\,e2^2\,x-f1\,x+2\,e2\,f1\,x-f2\,x+2\,e1\,f2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e2\,y+e1\,e2\,y+e2^2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right)$$

Lyapunov’s theorem

System

```
In[ ]:= Quit

In[ ]:= pp = 1/(-1 + e1 + e2) (-e2 x + e1 e2 x + e2^2 x + d2 e1 x^2 - e2 x^2 + e2^2 x^2 - f1 x^2 + e2 f1 x^2 +
          e1 f2 x^2 - e1 y + e1^2 y + e1 e2 y - x y + e1 x y + e2 x y - x^2 y + e1 x^2 y + e2 x^2 y);
        qq = -1/(-1 + e1 + e2) (d2 e1 x - e2 x - d2 e2 x + 2 e2^2 x - f1 x + 2 e2 f1 x - f2 x +
          2 e1 f2 x + d2 e1 x^2 - e2 x^2 + e2^2 x^2 - f1 x^2 + e2 f1 x^2 + e1 f2 x^2 -
          e2 y + e1 e2 y + e2^2 y - x y + e1 x y + e2 x y - x^2 y + e1 x^2 y + e2 x^2 y);
```

Program

In[ ]:=
```
Ser[s_] := Plus @@ Table[x^i y^(s-i) p[i, s - i], {i, 0, s}];
Hom[s_] := Table[p[s - i, i], {i, 0, s}];
hh = Sum[Ser[i], {i, 2, 6}];(*9*)
Lie = D[hh, x] pp + D[hh, y] qq // Expand;
RHS = g1 (x^2 + y^2)^2 + g2 (x^2 + y^2)^3 + g3 (x^2 + y^2)^4 // Expand;
vv = Lie - RHS // Expand;
CoefPol[f_, s_] :=
  Module[{m, lis, t}, lis = {}; m = Expand[f]; Do[Do[If[i + j == s, lis = AppendTo[lis,
        Coefficient[m, x^i y^j] /. {x → 0, y → 0, z → 0}]], {i, 0, s}], {j, 0, s}];
   ls[s] = lis];
Do[CoefPol[vv, i], {i, 1, 9}];
```

Degree 1, 2

In[ ]:=
```
ls[1]
ls[2] // Factor;
sol2 = Solve[ls[2] == 0, Hom[2]] // Simplify;
{p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} = {p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} /. sol2[[1]];
ls[2] // Simplify
```

Out[ ]= {0, 0}

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]= {0, 0, 0}

Quadratic form

In[ ]:=
```
ClearAll[qv, mat, a11, det, eg];
qv = Ser[2] // FullSimplify
mat = 1 / 2 D[qv, {{x, y}, 2}];
mat // MatrixForm
a11 = mat[[1, 1]]
det = Det[mat] // Factor
eg = Eigenvalues[mat] // Simplify // Factor;
```

Out[ ]= $$\frac{1}{2}\left(\frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\,e2)\ (e2+f1)+(-1+2\,e1)\ f2)\ x^2}{e2\ (-1+e1+e2)}+2\,x\,y+\frac{e1\,y^2}{e2}\right)p[1,1]$$

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\,e2)\ (e2+f1)+(-1+2\,e1)\ f2)\ p[1,1]}{2\,e2\ (-1+e1+e2)} & \frac{1}{2}p[1,1] \\ \frac{1}{2}p[1,1] & \frac{e1\,p[1,1]}{2\,e2} \end{pmatrix}$$

Out[ ]= $$\frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\,e2)\ (e2+f1)+(-1+2\,e1)\ f2)\ p[1,1]}{2\,e2\ (-1+e1+e2)}$$

Out[ ]= $$\frac{\left(d2\,e1^2-e1\,e2-d2\,e1\,e2+e2^2+e1\,e2^2-e2^3-e1\,f1+2\,e1\,e2\,f1-e1\,f2+2\,e1^2\,f2\right)p[1,1]^2}{4\,e2^2\ (-1+e1+e2)}$$

Conditions for a positive definite quadratic form

In[ ]:=

$$d1 = \frac{c1\ (e1 - e2) + e2\ f1 + e1\ (d2 + f2)}{e2};\ y0 = \frac{c1 + d2 + f2}{e2};$$

$$c1 = \frac{d2 - d2\ e1 - e2\ (e2 + f1) + f2 - e1\ f2}{-1 + e1 + e2};$$

beta =

$$\frac{1}{-1 + e1 + e2}\left(d2\ e1^2 - e1\ e2 - d2\ e1\ e2 + e2^2 + e1\ e2^2 - e2^3 - e1\ f1 + 2\ e1\ e2\ f1 - e1\ f2 + 2\ e1^2\ f2\right);$$

In[ ]:=

```
Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 &&
   e1 > 0 && e2 > 0 && f1 > 0 && f2 > 0, {d2, e1, e2, f1, f2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= $Aborted

Setting f1 and f2

In[ ]:=

```
ClearAll[f1, f2];
```

$$p[1, 1] = 1;\ f1 = \frac{1}{2};\ f2 = \frac{1}{10};$$

In[ ]:=

```
Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0,
  {d2, e1, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]=

```
(e1 + e2 > 1 &&
  ((e1 < 1 && √5 √(13 - 80 d2 (-1 + e1) - 8 e1) > 5 + 20 e2 && ((80 d2 > 51 + 3 √465 && e1 ≥
            Root[-2 - 40 d2 - 200 d2² + (61 + 330 d2 + 200 d2²) ♯1 + (-16 + 10 d2) ♯1² + 2 ♯1³ &,
             1]) || (10 d2 ≤ 9 && 5 d2 > 2 && d2 + e1 > 7/5) ||
         (80 d2 ≤ 51 + 3 √465 && 10 d2 > 9 && 2 e1 ≥ 1))) ||
    (e1 < Root[-2 - 40 d2 - 200 d2² + (61 + 330 d2 + 200 d2²) ♯1 + (-16 + 10 d2) ♯1² + 2 ♯1³ &,
        1] && ((e2 < Root[3 e1 - e1² - 5 d2 e1² + 5 d2 e1 ♯1 + (-5 - 5 e1) ♯1² + 5 ♯1³ &, 1] &&
          ((2 e1 > 1 && 2 d2 ≥ 3) || (d2 > 1.46… && e1 >
                Root[-60 + (83 + 370 d2 - 25 d2²) ♯1 + (-282 - 330 d2 - 500 d2² + 100 d2³) ♯1² +
                  (27 + 480 d2 + 200 d2²) ♯1³ + (20 + 100 d2) ♯1⁴ &, 4] && 2 d2 < 3))) ||
        (d2 ≤ 1.46… && 80 d2 > 51 + 3 √465 && 2 e1 ≥ 1 && e2 < Root[
            3 e1 - e1² - 5 d2 e1² + 5 d2 e1 ♯1 + (-5 - 5 e1) ♯1² + 5 ♯1³ &, 3]))) ||
    (2 d2 < 3 && d2 > 1.46… && 2 e1 ≥ 1 && e2 < Root[3 e1 - e1² - 5 d2 e1² +
            5 d2 e1 ♯1 + (-5 - 5 e1) ♯1² + 5 ♯1³ &, 3] &&
       e1 ≤ Root[-60 + (83 + 370 d2 - 25 d2²) ♯1 + (-282 - 330 d2 - 500 d2² + 100 d2³) ♯1² +
           (27 + 480 d2 + 200 d2²) ♯1³ + (20 + 100 d2) ♯1⁴ &, 4])) ||
 (e2 > Root[3 e1 - e1² - 5 d2 e1² + 5 d2 e1 ♯1 + (-5 - 5 e1) ♯1² + 5 ♯1³ &,
```

```
2] &&
((e1 > Root[-60 + (83 + 370 d2 - 25 d2^2) #1 + (-282 - 330 d2 - 500 d2^2 + 100 d2^3) #1^2 +
      (27 + 480 d2 + 200 d2^2) #1^3 + (20 + 100 d2) #1^4 &, 3] &&
   e2 < Root[3 e1 - e1^2 - 5 d2 e1^2 + 5 d2 e1 #1 + (-5 - 5 e1) #1^2 + 5 #1^3 &, 3] &&
   ((80 d2 ≥ 51 + 3 Sqrt[465] && 2 d2 < 3 && 2 e1 < 1) ||
    (20 d2 > 27.2… && 80 d2 < 51 + 3 Sqrt[465] && e1 < Root[-2 - 40 d2 - 200
         d2^2 + (61 + 330 d2 + 200 d2^2) #1 + (-16 + 10 d2) #1^2 + 2 #1^3 &, 1]))) ||
  (Sqrt[5] Sqrt[13 - 80 d2 (-1 + e1) - 8 e1] > 5 + 20 e2 && 2 e1 < 1 && ((20 d2 > 27.2… && e1 ≥
        Root[-2 - 40 d2 - 200 d2^2 + (61 + 330 d2 + 200 d2^2) #1 + (-16 + 10 d2) #1^2 + 2 #1^3 &,
          1] && 80 d2 < 51 + 3 Sqrt[465]) || (10 d2 > 9 && d2 + e1 > 7/5 && 160 d2 ≤ 69 + 5 Sqrt[321]) ||
     (160 d2 > 69 + 5 Sqrt[321] && e1 > Root[-2 - 40 d2 - 200 d2^2 + (61 + 330 d2 + 200 d2^2)
           #1 + (-16 + 10 d2) #1^2 + 2 #1^3 &, 1] && 20 d2 ≤ 27.2…))))) ||
(Sqrt[5] Sqrt[13 - 80 d2 (-1 + e1) - 8 e1] < 5 + 20 e2 &&
  ((e1 > Root[-2 - 40 d2 - 200 d2^2 + (61 + 330 d2 + 200 d2^2) #1 + (-16 + 10 d2) #1^2 + 2 #1^3 &, 1] &&
    e2 < Root[3 e1 - e1^2 - 5 d2 e1^2 + 5 d2 e1 #1 + (-5 - 5 e1) #1^2 + 5 #1^3 &, 2] &&
    ((d2 + e1 < 7/5 &&
       ((5 d2 > 2 && e1 + e2 < 1 && 10 d2 ≤ 9) || (10 d2 > 9 && 160 d2 < 69 + 5 Sqrt[321]))) ||
     (d2 > 0 && Sqrt[3] + 2 d2 < 9/5 && 2 e1 ≤ 1) || (Sqrt[3] + 2 d2 ≥ 9/5 && 2 e1 < 1 && 10 d2 ≤ 9))) ||
   (e1 + e2 < 1 && ((e1 < 1 && ((d2 > 0 && 2 e1 > 1 && Sqrt[3] + 2 d2 < 9/5) || (Sqrt[3] + 2 d2 ≥
             9/5 && 2 e1 ≥ 1 && 5 d2 ≤ 2))) || (5 d2 > 2 && 2 e1 ≥ 1 && d2 + e1 < 7/5)))))
```

Degree 3

In[ ]:=
```
ls[3] // Factor;
sol3 = Solve[ls[3] == 0, Hom[3]] // Simplify;
{p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} =
  {p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} /. sol3[[1]] // Factor;
ls[3] // Simplify
```

Out[ ]=
```
{0, 0, 0, 0}
```

Degree 4

In[ ]:=
```
ls[4] // Factor;
sol4 = Solve[ls[4] == 0, AppendTo[Hom[4], g1]];
{g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} =
  {g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} /. sol4[[1]];
g1 //
 Factor
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]=
$$\left(-15\,e1 - 22\,e1^2 + 55\,d2\,e1^2 + 19\,e1^3 + 85\,d2\,e1^3 - 50\,d2^2\,e1^3 - 6\,e1^4 - 20\,d2\,e1^4 - 100\,d2^2\,e1^4 + 30\,e2 - 90\,e1\,e2 - 75\,d2\,e1\,e2 + 105\,e1^2\,e2 - 70\,d2\,e1^2\,e2 + 50\,d2^2\,e1^2\,e2 - 79\,e1^3\,e2 + 170\,d2\,e1^3\,e2 + 100\,d2^2\,e1^3\,e2 - 80\,e2^2 + 50\,d2\,e2^2 + 410\,e1\,e2^2 - 25\,d2\,e1\,e2^2 - 200\,e1^2\,e2^2 - 200\,d2\,e1^2\,e2^2 - 20\,e1^3\,e2^2 - 200\,d2\,e1^3\,e2^2 - 50\,d2\,e2^3 - 185\,e1\,e2^3 + 50\,d2\,e1\,e2^3 + 170\,e1^2\,e2^3 + 200\,d2\,e1^2\,e2^3 + 50\,e2^4 - 150\,e1\,e2^4 - 100\,e1^2\,e2^4 + 100\,e1\,e2^5\right) \Big/ \left(2\,e2\,\left(27 + 12\,e1 - 90\,d2\,e1 + 38\,e1^2 - 20\,d2\,e1^2 + 75\,d2^2\,e1^2 - 140\,e1^3 + 50\,d2\,e1^3 + 75\,e1^4 + 90\,d2\,e2 - 30\,e1\,e2 + 20\,d2\,e1\,e2 - 150\,d2^2\,e1\,e2 - 140\,e1^2\,e2 + 150\,e1^3\,e2 - 80\,e2^2 + 75\,d2^2\,e2^2 - 240\,e1\,e2^2 + 250\,d2\,e1\,e2^2 + 275\,e1^2\,e2^2 - 200\,e2^3 - 300\,d2\,e2^3 + 300\,e1\,e2^3 + 400\,e2^4\right)\right)$$

In[ ]:=
```
Variables[g1]
```

Out[ ]= {e2, e1, d2}

Degree 5

In[ ]:=
```
ls[5] // Factor;
sol5 = Solve[ls[5] == 0, Hom[5]];
{p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} =
  {p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} /. sol5[[1]] // Factor;
ls[5] // Factor
```

Out[ ]= {0, 0, 0, 0, 0, 0}

Degree 6

In[ ]:=
```
ls[6] // Factor;
sol6 = Solve[ls[6] == 0, AppendTo[Hom[6], g2]];
{p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} =
  {p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} /. sol6[[1]] // Factor;
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

In[ ]:=
```
g2
Variables[g2]
```

Out[ ]=
$\left(-218700\, e1^{3}+967140\, e1^{4}+2624400\, d2\, e1^{4}+\cdots 2922\cdots+900000000\, d2\, e1\, e2^{19}\, p[2,2]+2700000000\, e1^{2}\, e2^{19}\, p[2,2]-1200000000\, e1\, e2^{20}\, p[2,2]\right)/\left(120\, e2 \cdots 3\cdots (\cdots 1\cdots)\left(27+12\, e1-90\, d2\, e1+38\, e1^{2}-20\, d2\, e1^{2}+75\, d2^{2}\, e1^{2}-140\, e1^{3}+\cdots 16\cdots+250\, d2\, e1\, e2^{2}+275\, e1^{2}\, e2^{2}-200\, e2^{3}-300\, d2\, e2^{3}+300\, e1\, e2^{3}+400\, e2^{4}\right)\right)$

large output | show less | show more | show all | set size limit...

Out[ ]= {e2, e1, d2, p[2, 2]}

In[ ]:=
```
p[2, 2] = 0;
g2;
```

In[ ]:=
```
Variables[g2]
```

Out[ ]= {e2, e1, d2}

Investigating the possible values of e1 and d2

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 1/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= False

Out[ ]= False

Out[ ]= False

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 2/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= False

Out[ ]= $0 < d2 < 0.253\ldots$ &&
$e2 == \text{Root}\left[-2336+1780\, d2-350\, d2^{2}+\left(9730-10275\, d2+1750\, d2^{2}\right)\#1+(-3850+22125\, d2)\#1^{2}+(-18875-20000\, d2)\#1^{3}+10000\#1^{4}+12500\#1^{5}\,\&,\, 3\right]$

Out[ ]= False

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 3/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= $d2 > 0 \&\& 47\sqrt{265} + 1200\,d2 < 1259 \&\&$
$e2 == \text{Root}\left[-30078 + 35415\,d2 - 10800\,d2^2 + \left(51585 - 121050\,d2 + 36000\,d2^2\right)\#1 + (122300 + 95500\,d2)\#1^2 + (-201000 - 85000\,d2)\#1^3 - 20000\#1^4 + 150000\#1^5\,\&,\,3\right]$

Out[ ]= False

Out[ ]= False

Setting the value of d2

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; d2 = 1 / 100;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= $e2 ==$
$\text{Root}\left[-3000\,e1 - 4290\,e1^2 + 3969\,e1^3 - 1242\,e1^4 + \left(6000 - 18150\,e1 + 20861\,e1^2 - 15458\,e1^3\right)\#1 + \left(-15900 + 81950\,e1 - 40400\,e1^2 - 4400\,e1^3\right)\#1^2 + \left(-100 - 36900\,e1 + 34400\,e1^2\right)\#1^3 + \left(10000 - 30000\,e1 - 20000\,e1^2\right)\#1^4 + 20000\,e1\#1^5\,\&,\,3\right] \&\&$
$\left(0.264\ldots < e1 < \frac{1}{2} \,||\, 0.213\ldots < e1 < 0.228\ldots\right)$

Out[ ]= $0.128\ldots < e1 < 0.213\ldots \&\& e2 ==$
$\text{Root}\left[-3000\,e1 - 4290\,e1^2 + 3969\,e1^3 - 1242\,e1^4 + \left(6000 - 18150\,e1 + 20861\,e1^2 - 15458\,e1^3\right)\#1 + \left(-15900 + 81950\,e1 - 40400\,e1^2 - 4400\,e1^3\right)\#1^2 + \left(-100 - 36900\,e1 + 34400\,e1^2\right)\#1^3 + \left(10000 - 30000\,e1 - 20000\,e1^2\right)\#1^4 + 20000\,e1\#1^5\,\&,\,3\right]$

Out[ ]= $e1 == 0.213\ldots \&\& e2 + -0.371\ldots == 0$

Setting the value of e1, d2 such that g1=0, g2>0

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 18/100; d2 = 1/100;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 &&
   beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0, {e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0,
  {e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0,
  {e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= False

Out[ ]= 900 e2 == 266. ...

Out[ ]= False

In[ ]:=
```
g1 // Factor
```

Out[ ]=

$$\left(4\left(-256\,700\,232+1\,296\,384\,900\,e2-970\,164\,375\,e2^{2}-2\,198\,218\,750\,e2^{3}+1\,543\,750\,000\,e2^{4}+1\,406\,250\,000\,e2^{5}\right)\right)\Big/\left(625\,e2\left(29\,488\,131-8\,127\,900\,e2-113\,832\,500\,e2^{2}-149\,000\,000\,e2^{3}+400\,000\,000\,e2^{4}\right)\right)$$

In[ ]:=
```
g2 // Factor
```

Out[ ]=

$$-\Big(\Big(2\Big(-2\,134\,161\,091\,674\,039\,218\,421\,625\,601\,149\,503+140\,355\,978\,576\,685\,509\,466\,108\,656\,363\,508\,650\,e2-1\,754\,283\,565\,687\,266\,330\,660\,162\,078\,035\,242\,500\,e2^{2}+8\,737\,367\,532\,700\,018\,023\,712\,655\,697\,839\,625\,000\,e2^{3}-21\,589\,750\,138\,203\,633\,706\,431\,942\,941\,437\,500\,000\,e2^{4}+75\,104\,078\,381\,422\,305\,038\,823\,485\,272\,500\,000\,000\,e2^{5}-513\,431\,090\,081\,409\,858\,991\,186\,790\,953\,125\,000\,000\,e2^{6}+2\,056\,162\,232\,816\,920\,023\,362\,338\,942\,968\,750\,000\,000\,e2^{7}-3\,838\,597\,863\,908\,140\,206\,223\,129\,570\,312\,500\,000\,000\,e2^{8}+1\,617\,903\,538\,459\,282\,225\,849\,587\,890\,625\,000\,000\,000\,e2^{9}+4\,615\,310\,325\,659\,104\,860\,692\,578\,125\,000\,000\,000\,000\,e2^{10}-1\,399\,763\,372\,530\,238\,358\,330\,078\,125\,000\,000\,000\,000\,e2^{11}-20\,086\,555\,324\,348\,486\,795\,898\,437\,500\,000\,000\,000\,000\,e2^{12}+40\,652\,986\,288\,855\,743\,115\,234\,375\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{13}-41\,911\,717\,827\,629\,003\,906\,250\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{14}+37\,465\,861\,770\,189\,697\,265\,625\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{15}-37\,513\,628\,819\,775\,390\,625\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{16}+29\,057\,543\,024\,902\,343\,750\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{17}-12\,113\,875\,488\,281\,250\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{18}+1\,593\,969\,726\,562\,500\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{19}+263\,671\,875\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{20}\Big)\Big)\Big/\Big(1875\,e2\left(-3549+850\,e2+10\,000\,e2^{2}\right)\left(25\,299+450\,e2-295\,000\,e2^{2}+250\,000\,e2^{3}\right)^{2}\left(-25\,299-450\,e2-320\,000\,e2^{2}+500\,000\,e2^{3}\right)\left(29\,488\,131-8\,127\,900\,e2-113\,832\,500\,e2^{2}-149\,000\,000\,e2^{3}+400\,000\,000\,e2^{4}\right)\left(38\,082\,789-250\,500\,e2-60\,467\,500\,e2^{2}-515\,000\,000\,e2^{3}+800\,000\,000\,e2^{4}\right)\Big)\Big)$$

In[ ]:=
```
e2 = 266.... / 900;
e2 // N
```
Out[ ]=
```
0.29582
```

Perturbation

1. Setting e2 such that g1 = 0, g2 > 0, trace(J) = 0

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1/2; f2 = 1/10;
e1 = 18/100; d2 = 1/100;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2;
c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
e2 = (266....)/900;
g1 = (4 (-256 700 232 + 1 296 384 900 e2 -
      970 164 375 e2^2 - 2 198 218 750 e2^3 + 1 543 750 000 e2^4 + 1 406 250 000 e2^5)) /
   (625 e2 (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4));
g2 = -((2 (-2 134 161 091 674 039 218 421 625 601 149 503 +
        140 355 978 576 685 509 466 108 656 363 508 650 e2 -
        1 754 283 565 687 266 330 660 162 078 035 242 500 e2^2 +
        8 737 367 532 700 018 023 712 655 697 839 625 000 e2^3 -
        21 589 750 138 203 633 706 431 942 941 437 500 000 e2^4 +
        75 104 078 381 422 305 038 823 485 272 500 000 000 e2^5 -
        513 431 090 081 409 858 991 186 790 953 125 000 000 e2^6 +
        2 056 162 232 816 920 023 362 338 942 968 750 000 000 e2^7 -
        3 838 597 863 908 140 206 223 129 570 312 500 000 000 e2^8 +
        1 617 903 538 459 282 225 849 587 890 625 000 000 000 e2^9 +
        4 615 310 325 659 104 860 692 578 125 000 000 000 000 e2^10 -
        1 399 763 372 530 238 358 330 078 125 000 000 000 000 e2^11 -
        20 086 555 324 348 486 795 898 437 500 000 000 000 000 e2^12 +
        40 652 986 288 855 743 115 234 375 000 000 000 000 000 e2^13 -
        41 911 717 827 629 003 906 250 000 000 000 000 000 000 e2^14 +
        37 465 861 770 189 697 265 625 000 000 000 000 000 000 e2^15 -
        37 513 628 819 775 390 625 000 000 000 000 000 000 000 e2^16 +
        29 057 543 024 902 343 750 000 000 000 000 000 000 000 e2^17 -
        12 113 875 488 281 250 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^18 +
        1 593 969 726 562 500 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^19 +
        263 671 875 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^20)) /
    (1875 e2 (-3549 + 850 e2 + 10 000 e2^2) (25 299 + 450 e2 - 295 000 e2^2 + 250 000 e2^3)^2
      (-25 299 - 450 e2 - 320 000 e2^2 + 500 000 e2^3)
      (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4)
      (38 082 789 - 250 500 e2 - 60 467 500 e2^2 - 515 000 000 e2^3 + 800 000 000 e2^4)));
{c1, d1, e2} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]=
```
{0.277042, 0.458465, 0.29582}
```

Out[ ]= $\{-1.97438\times10^{-17}, 0.0276312\}$

```
In[ ]:= Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals] // N
Out[ ]= {{x → 0.457223, y → 3.41004}, {x → 0.809127, y → 2.04744}, {x → 1., y → 1.30837}}
```

```
In[ ]:= ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[3]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol] // N
Out[ ]= {x → 1., y → 1.30837}
```

Out[ ]= $\{-8.67362\times10^{-18}+0.21555\,i, -8.67362\times10^{-18}-0.21555\,i\}$

2. Perturbing e2 such that g1 < 0, g2 > 0, trace(J) = 0

```
In[ ]:= Quit
```

```
In[*]:= ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1/2; f2 = 1/10;
e1 = 18/100; d2 = 1/100;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2;
c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
e2 = 278/1000;(*perturbed parameter for g1<0*)
g1 = (4 (-256 700 232 + 1 296 384 900 e2 -
       970 164 375 e2^2 - 2 198 218 750 e2^3 + 1 543 750 000 e2^4 + 1 406 250 000 e2^5)) /
   (625 e2 (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4));
g2 = -((2 (-2 134 161 091 674 039 218 421 625 601 149 503 +
          140 355 978 576 685 509 466 108 656 363 508 650 e2 -
          1 754 283 565 687 266 330 660 162 078 035 242 500 e2^2 +
          8 737 367 532 700 018 023 712 655 697 839 625 000 e2^3 -
          21 589 750 138 203 633 706 431 942 941 437 500 000 e2^4 +
          75 104 078 381 422 305 038 823 485 272 500 000 000 e2^5 -
          513 431 090 081 409 858 991 186 790 953 125 000 000 e2^6 +
          2 056 162 232 816 920 023 362 338 942 968 750 000 000 e2^7 -
          3 838 597 863 908 140 206 223 129 570 312 500 000 000 e2^8 +
          1 617 903 538 459 282 225 849 587 890 625 000 000 000 e2^9 +
          4 615 310 325 659 104 860 692 578 125 000 000 000 000 e2^10 -
          1 399 763 372 530 238 358 330 078 125 000 000 000 000 e2^11 -
          20 086 555 324 348 486 795 898 437 500 000 000 000 000 e2^12 +
          40 652 986 288 855 743 115 234 375 000 000 000 000 000 e2^13 -
          41 911 717 827 629 003 906 250 000 000 000 000 000 000 e2^14 +
          37 465 861 770 189 697 265 625 000 000 000 000 000 000 e2^15 -
          37 513 628 819 775 390 625 000 000 000 000 000 000 000 e2^16 +
          29 057 543 024 902 343 750 000 000 000 000 000 000 000 e2^17 -
          12 113 875 488 281 250 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^18 +
          1 593 969 726 562 500 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^19 +
          263 671 875 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^20)) /
     (1875 e2 (-3549 + 850 e2 + 10 000 e2^2) (25 299 + 450 e2 - 295 000 e2^2 + 250 000 e2^3)^2
       (-25 299 - 450 e2 - 320 000 e2^2 + 500 000 e2^3)
       (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4)
       (38 082 789 - 250 500 e2 - 60 467 500 e2^2 - 515 000 000 e2^3 + 800 000 000 e2^4)));
{c1, d1}
{c1, d1} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{31521}{135500}, \frac{66289}{135500}\right\}$

Out[ ]= {0.232627, 0.489218}

Out[ ]= {-0.0090896, 0.0400065}

In[ ]:=
```
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals] // N
```

Out[ ]= {{x → 1., y → 1.23247}, {x → 0.414968, y → 4.09327}, {x → 0.7895, y → 2.26181}}

In[ ]:=
```
ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol] // N
```

Out[ ]= {x → 1., y → 1.23247}

Out[ ]= $\{-3.81639\times10^{-17} + 0.24293\, i, -3.81639\times10^{-17} - 0.24293\, i\}$

3. Perturbing c1 and e2 such that g1 < 0, g2 > 0, trace(*J*) > 0

In[ ]:=
```
Quit
```

```
In[ ]:= ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1/2; f2 = 1/10;
e1 = 18/100; d2 = 1/100;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2;
c1 = 233/1000;(*perturbed parameter for trace(J)>0*)
e2 = 278/1000;(*perturbed parameter for g1<0*)
g1 = (4 (-256 700 232 + 1 296 384 900 e2 -
      970 164 375 e2^2 - 2 198 218 750 e2^3 + 1 543 750 000 e2^4 + 1 406 250 000 e2^5)) /
   (625 e2 (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4));
g2 = -((2 (-2 134 161 091 674 039 218 421 625 601 149 503 +
        140 355 978 576 685 509 466 108 656 363 508 650 e2 -
        1 754 283 565 687 266 330 660 162 078 035 242 500 e2^2 +
        8 737 367 532 700 018 023 712 655 697 839 625 000 e2^3 -
        21 589 750 138 203 633 706 431 942 941 437 500 000 e2^4 +
        75 104 078 381 422 305 038 823 485 272 500 000 000 e2^5 -
        513 431 090 081 409 858 991 186 790 953 125 000 000 e2^6 +
        2 056 162 232 816 920 023 362 338 942 968 750 000 000 e2^7 -
        3 838 597 863 908 140 206 223 129 570 312 500 000 000 e2^8 +
        1 617 903 538 459 282 225 849 587 890 625 000 000 000 e2^9 +
        4 615 310 325 659 104 860 692 578 125 000 000 000 000 e2^10 -
        1 399 763 372 530 238 358 330 078 125 000 000 000 000 e2^11 -
        20 086 555 324 348 486 795 898 437 500 000 000 000 000 e2^12 +
        40 652 986 288 855 743 115 234 375 000 000 000 000 000 e2^13 -
        41 911 717 827 629 003 906 250 000 000 000 000 000 000 e2^14 +
        37 465 861 770 189 697 265 625 000 000 000 000 000 000 e2^15 -
        37 513 628 819 775 390 625 000 000 000 000 000 000 000 e2^16 +
        29 057 543 024 902 343 750 000 000 000 000 000 000 000 e2^17 -
        12 113 875 488 281 250 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^18 +
        1 593 969 726 562 500 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^19 +
        263 671 875 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^20)) /
     (1875 e2 (-3549 + 850 e2 + 10 000 e2^2) (25 299 + 450 e2 - 295 000 e2^2 + 250 000 e2^3)^2
       (-25 299 - 450 e2 - 320 000 e2^2 + 500 000 e2^3)
       (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4)
       (38 082 789 - 250 500 e2 - 60 467 500 e2^2 - 515 000 000 e2^3 + 800 000 000 e2^4)));
{c1, d1}
{c1, d1} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{233}{1000}, \frac{67983}{139000}\right\}$

Out[ ]= {0.233, 0.489086}

Out[ ]= {-0.0090896, 0.0400065}

```
In[ ]:= Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals] // N
```

Out[ ]= {{x → 1., y → 1.23381}, {x → 0.414926, y → 4.09403}, {x → 0.789796, y → 2.26142}}

```
In[ ]:= ClearAll[sol];
        sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
        D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
        Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol] // N
```

Out[ ]= {x → 1., y → 1.23381}

Out[ ]= {0.000363309 + 0.242735 i, 0.000363309 - 0.242735 i}

```
In[ ]:= 0.0003633093525180382` * 2
```

Out[ ]= 0.000726619

Plotting the limit cycles when g1 < 0, g2 > 0, trace(J) > 0

Preparations

```
In[ ]:= Quit
```

```
In[ ]:= SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
          {Plot, ParametricPlot, ListPlot, ListLinePlot};
        SetDirectory[NotebookDirectory[]];
        SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@ {Plot, ListPlot,
           ListLinePlot, ListLogLogPlot, ParametricPlot, DateListPlot, DiscretePlot};
        LaunchKernels[];
```

The function creating the plots

In[ ]:=
```
ClearAll[p, q, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
p[x_, y_] := x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
q[x_, y_] := -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1/2; f2 = 1/10;
e1 = 18/100; d2 = 1/100;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2;
c1 = 233/1000;(*perturbed parameter for trace(J)>0*)
e2 = 278/1000;(*perturbed parameter for g1<0*)
g1 = (4 (-256 700 232 + 1 296 384 900 e2 -
      970 164 375 e2^2 - 2 198 218 750 e2^3 + 1 543 750 000 e2^4 + 1 406 250 000 e2^5)) /
   (625 e2 (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4));
g2 = -((2 (-2 134 161 091 674 039 218 421 625 601 149 503 +
         140 355 978 576 685 509 466 108 656 363 508 650 e2 -
         1 754 283 565 687 266 330 660 162 078 035 242 500 e2^2 +
         8 737 367 532 700 018 023 712 655 697 839 625 000 e2^3 -
         21 589 750 138 203 633 706 431 942 941 437 500 000 e2^4 +
         75 104 078 381 422 305 038 823 485 272 500 000 000 e2^5 -
         513 431 090 081 409 858 991 186 790 953 125 000 000 e2^6 +
         2 056 162 232 816 920 023 362 338 942 968 750 000 000 e2^7 -
         3 838 597 863 908 140 206 223 129 570 312 500 000 000 e2^8 +
         1 617 903 538 459 282 225 849 587 890 625 000 000 000 e2^9 +
         4 615 310 325 659 104 860 692 578 125 000 000 000 000 e2^10 -
         1 399 763 372 530 238 358 330 078 125 000 000 000 000 e2^11 -
         20 086 555 324 348 486 795 898 437 500 000 000 000 000 e2^12 +
         40 652 986 288 855 743 115 234 375 000 000 000 000 000 e2^13 -
         41 911 717 827 629 003 906 250 000 000 000 000 000 000 e2^14 +
         37 465 861 770 189 697 265 625 000 000 000 000 000 000 e2^15 -
         37 513 628 819 775 390 625 000 000 000 000 000 000 000 e2^16 +
         29 057 543 024 902 343 750 000 000 000 000 000 000 000 e2^17 -
         12 113 875 488 281 250 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^18 +
         1 593 969 726 562 500 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^19 +
         263 671 875 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 e2^20)) /
    (1875 e2 (-3549 + 850 e2 + 10 000 e2^2) (25 299 + 450 e2 - 295 000 e2^2 + 250 000 e2^3)^2
      (-25 299 - 450 e2 - 320 000 e2^2 + 500 000 e2^3)
      (29 488 131 - 8 127 900 e2 - 113 832 500 e2^2 - 149 000 000 e2^3 + 400 000 000 e2^4)
      (38 082 789 - 250 500 e2 - 60 467 500 e2^2 - 515 000 000 e2^3 + 800 000 000 e2^4)));
{g1, g2} // N
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1}
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1} // N
```

Out[ ]=
```
{-0.0090896, 0.0400065}
```

Out[ ]= $\left\{\frac{139}{500}, \frac{9}{50}, \frac{1}{100}, \frac{67983}{139000}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{233}{1000}\right\}$

Out[ ]= {0.278, 0.18, 0.01, 0.489086, 0.5, 0.1, 0.233}

In[ ]:=
```
ClearAll[nsol, nsol1, nsol2, ev, ev1, ev2, plotter];
nsol = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[3]]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
nsol1 = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[1]]
ev1 = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol1]
nsol2 = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[2]]
ev2 = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol2]
plotter[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000,
  ar_ : Automatic, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
    {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange, Point[{x, y} /. nsol],
      Blue, Point[{x, y} /. nsol1], Green, Point[{x, y} /. nsol2]},
    PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar, AxesLabel → {x, y},
    LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]
```

Out[ ]= {x → 1.0000000000000000000, y → 1.2338129496402877698}

Out[ ]= {0.000363309352517985612 + 0.242734832567487461 i,
0.000363309352517985612 − 0.242734832567487461 i}

Out[ ]= {x → 0.41492622701256916735, y → 4.0940256764463354455}

Out[ ]= {−1.335594059107776771, −0.0786738624710661643}

Out[ ]= {x → 0.7897961011600615896, y → 2.2614233031455012892}

Out[ ]= {0.42948903134671044, −0.087898813021974952}

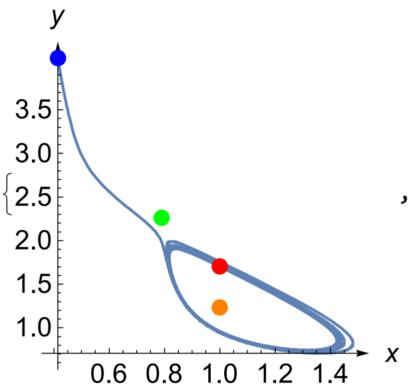
Plotter with arrow

```
In[ ]:= ClearAll[nsol, nsol1, nsol2, ev, ev1, ev2, plotterarrow];
nsol = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[3]]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
nsol1 = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[1]]
ev1 = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol1]
nsol2 = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[2]]
ev2 = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol2]
plotterarrow[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000, ar_ : Automatic,
  arrow_, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
     {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Black, Arrowheads → 0.07, Arrow[{startingpoint, arrow}], Red,
      PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange, Point[{x, y} /. nsol],
      Blue, Point[{x, y} /. nsol1], Green, Point[{x, y} /. nsol2]},
    PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar, AxesLabel → {x, y},
    LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 200]}]

Out[ ]= {x → 1.0000000000000000000, y → 1.2338129496402877698}

Out[ ]= {0.00036330935251798561 2 + 0.242734832567487461 i,
 0.0003633093525179856 12 - 0.242734832567487461 i}

Out[ ]= {x → 0.41492622701256916735, y → 4.0940256764463354455}

Out[ ]= {-1.335594059107776771, -0.0786738624710661643}

Out[ ]= {x → 0.7897961011600615896, y → 2.2614233031455012892}

Out[ ]= {0.42948903134671044, -0.087898813021974952}
```

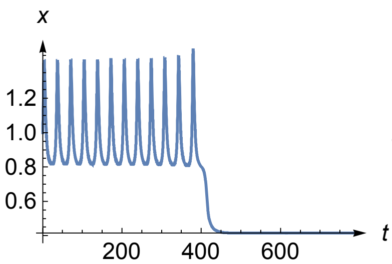
Figures

In[]:=
```
plotter[800, {0, 0.47}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
plotterarrow[800, {0, 0.47}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.17, 1.405}, Method → "BDF"]
```

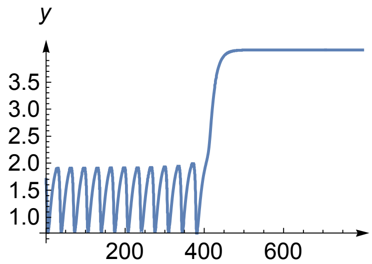
Out[]= {



,

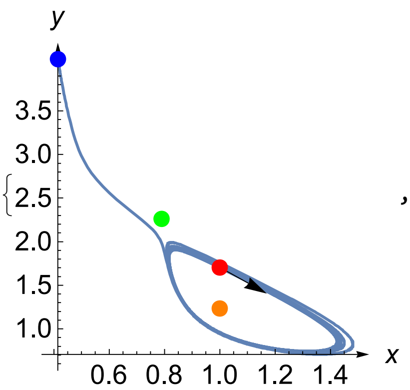


,

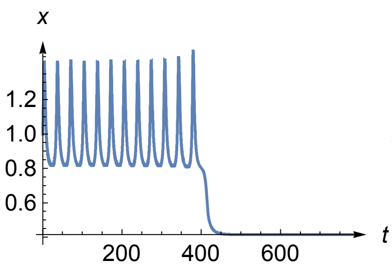


}

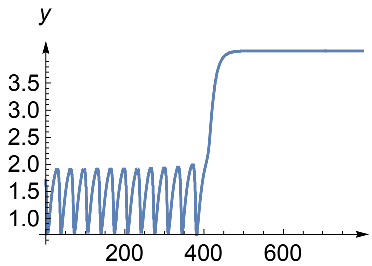
Out[]= {



,



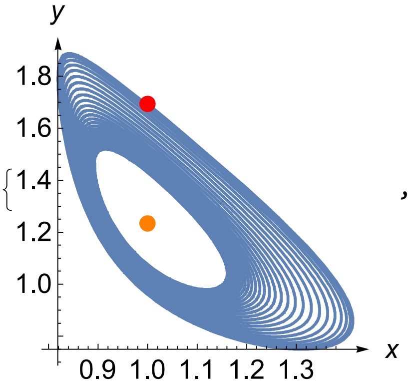
,



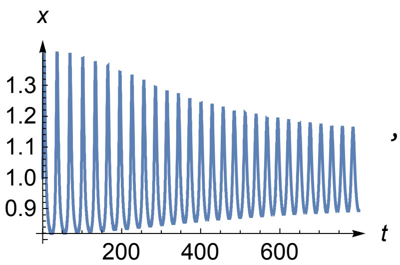
}

In[ ]:=
```
plotter[800, {0, 0.46}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
plotterarrow[800, {0, 0.46}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.117, 1.506}, Method → "BDF"]
```

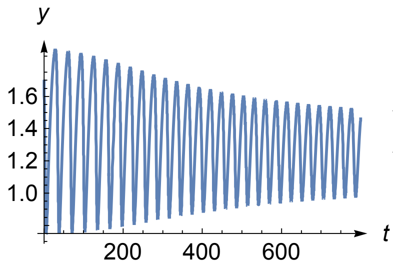
Out[ ]= {



,

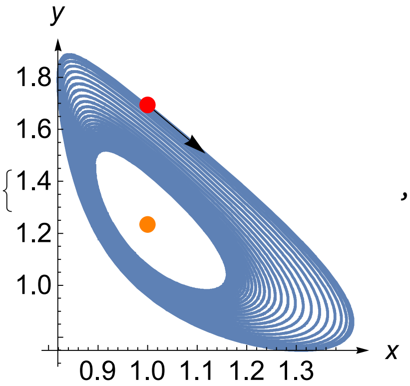


,

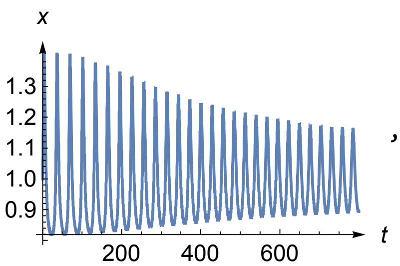


}

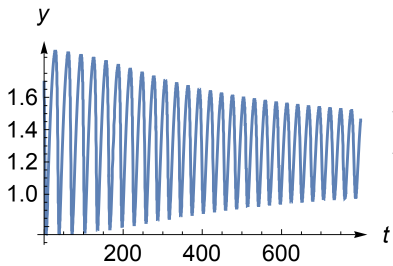
Out[ ]= {



,



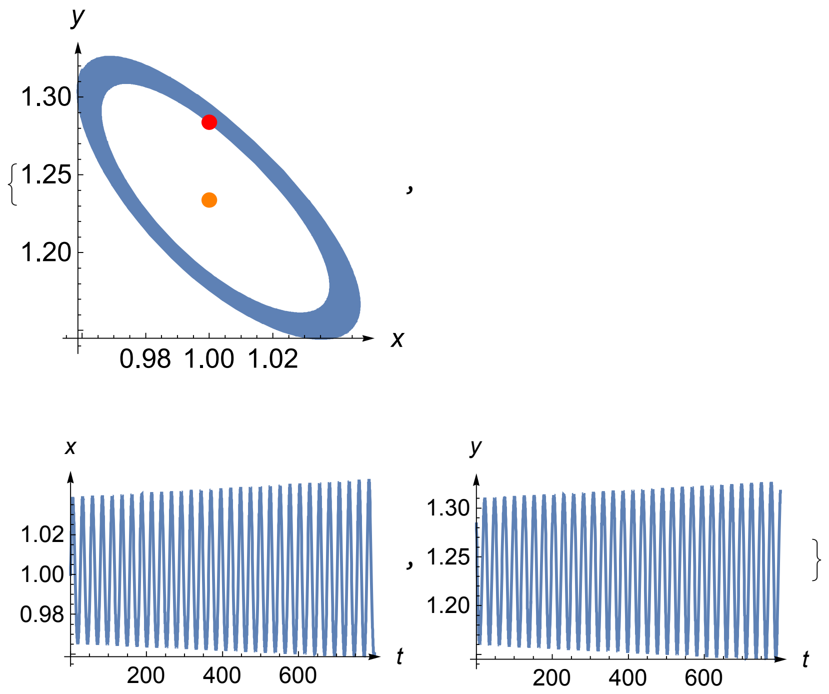
,



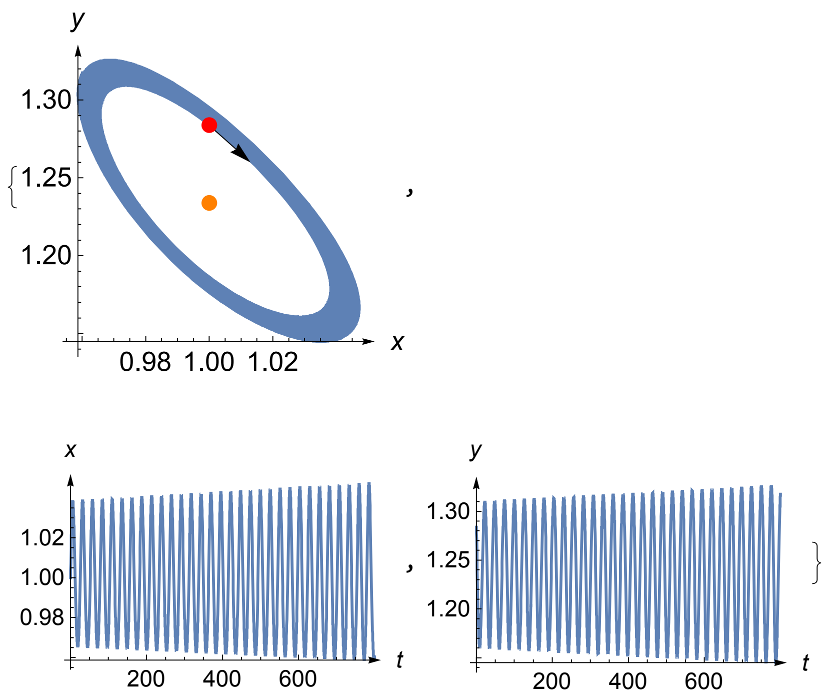
}

In[ ]:=
```
plotter[800, {0, 0.05}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
plotterarrow[800, {0, 0.05}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.013, 1.26}, Method → "BDF"]
```

Out[ ]=



Out[ ]=



Model 2 with a stable outer an unstable inner limit cycle

The singular point is shifted into the origin

Singular points if x0 = 1

In[]:=
```
Quit
```

In[]:=
```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
Solve[{xd == 0, yd == 0} /. x → 1, {d1, y}] // FullSimplify
```

Out[]= $\left\{\left\{d1 \to \frac{c1\ (e1 - e2) + e2\ f1 + e1\ (d2 + f2)}{e2},\ y \to \frac{c1 + d2 + f2}{e2}\right\}\right\}$

The singular point (if x0 = 1) is shifted into (0, 0)

```
ClearAll[xd, yd, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, x0, y0, x1d, y1d, xx1, yy1];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
x0 = 1;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2; y0 = (c1 + d2 + f2)/e2;
xx1 = x - x0; yy1 = y - y0;
x1d = D[xx1, x] xd + D[xx1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
y1d = D[yy1, x] xd + D[yy1, y] yd /. {x → x1 + x0, y → y1 + y0} // Factor
```

Out[]= $-\frac{1}{e2}\left(-c1\ x1 - d2\ x1 + c1\ e1\ x1 + d2\ e1\ x1 + c1\ e2\ x1 + e2\ f1\ x1 - f2\ x1 + e1\ f2\ x1 - c1\ x1^2 - d2\ x1^2 + c1\ e2\ x1^2 - f2\ x1^2 - e1\ e2\ y1 - e2\ x1\ y1 - e2\ x1^2\ y1\right)$

Out[]= $-\frac{1}{e2}\left(c1\ x1 + d2\ x1 - 2\ c1\ e2\ x1 - d2\ e2\ x1 + f2\ x1 + c1\ x1^2 + d2\ x1^2 - c1\ e2\ x1^2 + f2\ x1^2 + e2^2\ y1 + e2\ x1\ y1 + e2\ x1^2\ y1\right)$

The Jacobian at the origin

In[]:=
```
Jac = D[{x1d, y1d}, {{x1, y1}}];
JacOrigin = Jac /. {x1 → 0, y1 → 0} // Simplify
```

Out[]= $\left\{\left\{\frac{d2 - d2\ e1 - c1\ (-1 + e1 + e2) - e2\ f1 + f2 - e1\ f2}{e2},\ e1\right\},\ \left\{-\frac{c1 + d2 - 2\ c1\ e2 - d2\ e2 + f2}{e2},\ -e2\right\}\right\}$

In[]:=
```
trace = Tr[JacOrigin] // Factor
Solve[trace == 0, c1] // FullSimplify
```

Out[]= $-\frac{-c1 - d2 + c1\ e1 + d2\ e1 + c1\ e2 + e2^2 + e2\ f1 - f2 + e1\ f2}{e2}$

Out[]= $\left\{\left\{c1 \to \frac{d2 - d2\ e1 - e2\ (e2 + f1) + f2 - e1\ f2}{-1 + e1 + e2}\right\}\right\}$

In[ ]:=
```
c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
evalues = Eigenvalues[JacOrigin] // FullSimplify
```

Out[ ]=
$$\left\{-\frac{i\sqrt{d2\,e1\,(e1-e2)-(-1+e2)\,e2^2+e1\,(-f1+e2\,(-1+e2+2\,f1)-f2)+2\,e1^2\,f2}}{\sqrt{-1+e1+e2}},\ \frac{i\sqrt{d2\,e1\,(e1-e2)-(-1+e2)\,e2^2+e1\,(-f1+e2\,(-1+e2+2\,f1)-f2)+2\,e1^2\,f2}}{\sqrt{-1+e1+e2}}\right\}$$

In[ ]:=
```
beta = -evalues[[1]]^2 // Factor
```

Out[ ]=
$$\frac{d2\,e1^2-e1\,e2-d2\,e1\,e2+e2^2+e1\,e2^2-e2^3-e1\,f1+2\,e1\,e2\,f1-e1\,f2+2\,e1^2\,f2}{-1+e1+e2}$$

In[ ]:=
```
pp = x1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor
qq = y1d /. {x1 → x, y1 → y} // Factor
```

Out[ ]=
$$\frac{1}{-1+e1+e2}\left(-e2\,x+e1\,e2\,x+e2^2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e1\,y+e1^2\,y+e1\,e2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right)$$

Out[ ]=
$$-\frac{1}{-1+e1+e2}\left(d2\,e1\,x-e2\,x-d2\,e2\,x+2\,e2^2\,x-f1\,x+2\,e2\,f1\,x-f2\,x+2\,e1\,f2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e2\,y+e1\,e2\,y+e2^2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right)$$

Lyapunov’s theorem

System

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
$$pp = \frac{1}{-1+e1+e2}\left(-e2\,x+e1\,e2\,x+e2^2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e1\,y+e1^2\,y+e1\,e2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right);$$
$$qq = -\frac{1}{-1+e1+e2}\left(d2\,e1\,x-e2\,x-d2\,e2\,x+2\,e2^2\,x-f1\,x+2\,e2\,f1\,x-f2\,x+2\,e1\,f2\,x+d2\,e1\,x^2-e2\,x^2+e2^2\,x^2-f1\,x^2+e2\,f1\,x^2+e1\,f2\,x^2-e2\,y+e1\,e2\,y+e2^2\,y-x\,y+e1\,x\,y+e2\,x\,y-x^2\,y+e1\,x^2\,y+e2\,x^2\,y\right);$$

Program

In[ ]:=
```
Ser[s_] := Plus @@ Table[x^i y^(s-i) p[i, s - i], {i, 0, s}];
Hom[s_] := Table[p[s - i, i], {i, 0, s}];
hh = Sum[Ser[i], {i, 2, 6}]; (*9*)
Lie = D[hh, x] pp + D[hh, y] qq // Expand;
RHS = g1 (x^2 + y^2)^2 + g2 (x^2 + y^2)^3 + g3 (x^2 + y^2)^4 // Expand;
vv = Lie - RHS // Expand;
CoefPol[f_, s_] :=
  Module[{m, lis, t}, lis = {}; m = Expand[f]; Do[Do[If[i + j == s, lis = AppendTo[lis,
        Coefficient[m, x^i y^j] /. {x → 0, y → 0, z → 0}]], {i, 0, s}], {j, 0, s}];
   ls[s] = lis];
Do[CoefPol[vv, i], {i, 1, 9}];
```

Degree 1, 2

In[ ]:=
```
ls[1]
ls[2] // Factor;
sol2 = Solve[ls[2] == 0, Hom[2]] // Simplify;
{p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} = {p[2, 0], p[1, 1], p[0, 2]} /. sol2[[1]];
ls[2] // Simplify
```

Out[ ]= {0, 0}

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]= {0, 0, 0}

Quadratic form

In[ ]:=
```
ClearAll[qv, mat, a11, det, eg];
qv = Ser[2] // FullSimplify
mat = 1 / 2 D[qv, {{x, y}, 2}];
mat // MatrixForm
a11 = mat[[1, 1]]
det = Det[mat] // Factor
eg = Eigenvalues[mat] // Simplify // Factor;
```

Out[ ]= $$\frac{1}{2}\left(\frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\ e2)\ (e2+f1)+(-1+2\ e1)\ f2)\ x^2}{e2\ (-1+e1+e2)}+2\ x\ y+\frac{e1\ y^2}{e2}\right)\ p[1,1]$$

Out[ ]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} \frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\ e2)\ (e2+f1)+(-1+2\ e1)\ f2)\ p[1,1]}{2\ e2\ (-1+e1+e2)} & \frac{1}{2}\ p[1,1] \\ \frac{1}{2}\ p[1,1] & \frac{e1\ p[1,1]}{2\ e2} \end{pmatrix}$$

Out[ ]= $$\frac{(d2\ (e1-e2)+(-1+2\ e2)\ (e2+f1)+(-1+2\ e1)\ f2)\ p[1,1]}{2\ e2\ (-1+e1+e2)}$$

Out[ ]= $$\frac{\left(d2\ e1^2-e1\ e2-d2\ e1\ e2+e2^2+e1\ e2^2-e2^3-e1\ f1+2\ e1\ e2\ f1-e1\ f2+2\ e1^2\ f2\right)\ p[1,1]^2}{4\ e2^2\ (-1+e1+e2)}$$

Conditions for a positive definite quadratic form

```
In[•]:= d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2; y0 = (c1 + d2 + f2)/e2;
        c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
        beta = (d2 e1^2 - e1 e2 - d2 e1 e2 + e2^2 + e1 e2^2 - e2^3 - e1 f1 + 2 e1 e2 f1 - e1 f2 + 2 e1^2 f2)/(-1 + e1 + e2);
```

```
In[•]:= Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 &&
          e1 > 0 && e2 > 0 && f1 > 0 && f2 > 0, {d2, e1, e2, f1, f2} ] // FullSimplify
```

```
Out[•]= $Aborted
```

Setting f1 and f2

```
In[•]:= ClearAll[f1, f2];
        p[1, 1] = 1; f1 = 1; f2 = 1;
```

```
In[•]:= Reduce[ a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e1 > 0 && e2 > 0,
          {d2, e1, e2} ] // FullSimplify
```

```
Out[•]= (e1 + e2 > 1 && (((e1 < 1 && Sqrt[5 + 4 d2 - 4 (1 + d2) e1] > 1 + 2 e2 && ((d2 > 1/2 + Sqrt[3] &&
              e1 ≥ Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 + (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1]) ||
            (2 d2 ≤ 1 && d2 > 0 && d2 + e1 > 1) || (d2 ≤ 1/2 + Sqrt[3] && 2 d2 > 1 && 2 e1 ≥ 1))) ||
         (e1 < Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 + (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1] &&
          ((e2 < Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 1] &&
             ((2 e1 > 1 && 2 d2 ≥ 5) || (d2 > [2.29…] && e1 > Root[-8 + (55 + 42 d2 - d2^2) #1 +
                 (-222 - 62 d2 - 32 d2^2 + 4 d2^3) #1^2 + (159 + 104 d2 + 8 d2^2) #1^3 + (8 + 4 d2)
                 #1^4 &, 4] && 2 d2 < 5))) || (d2 ≤ [2.29…] && d2 > 1/2 + Sqrt[3] && 2 e1 ≥ 1 &&
            e2 < Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 3]))) ||
         (2 d2 < 5 && d2 > [2.29…] && 2 e1 ≥ 1 && e2 < Root[
            2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 3] &&
          e1 ≤ Root[-8 + (55 + 42 d2 - d2^2) #1 + (-222 - 62 d2 - 32 d2^2 + 4 d2^3) #1^2 +
             (159 + 104 d2 + 8 d2^2) #1^3 + (8 + 4 d2) #1^4 &, 4]))) ||
   (e2 > Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &,
       2] &&
     (((2 e1 < 1 && ((Sqrt[5 + 4 d2 - 4 (1 + d2) e1] > 1 + 2 e2 && ((d2 < 1/2 + Sqrt[3] && d2 > [1.74…] && e1 ≥
```

```
      Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 + (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1]) ||
   (d2 ≤ 1/√2 && 2 d2 > 1 && d2 + e1 > 1) || (d2 ≤ 1.74… && d2 > 1/√2 && e1 >
      Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 + (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1]))) ||
  (2 d2 < 5 && d2 ≥ 1/2 + √3 && e2 < Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1)
      #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 3] &&
    e1 > Root[-8 + (55 + 42 d2 - d2^2) #1 + (-222 - 62 d2 - 32 d2^2 + 4 d2^3)
      #1^2 + (159 + 104 d2 + 8 d2^2) #1^3 + (8 + 4 d2) #1^4 &, 3])) ||
 (d2 < 1/2 + √3 && d2 > 1.74… && e1 < Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 +
      (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1] &&
   e2 < Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 3] &&
   e1 > Root[-8 + (55 + 42 d2 - d2^2) #1 + (-222 - 62 d2 - 32 d2^2 + 4 d2^3) #1^2 +
      (159 + 104 d2 + 8 d2^2) #1^3 + (8 + 4 d2) #1^4 &, 3]))) ||
(√(5 + 4 d2 - 4 (1 + d2) e1) < 1 + 2 e2 &&
  ((e1 > Root[-1 - 2 d2 - d2^2 + (7 + 6 d2 + d2^2) #1 + (-5 - 2 d2) #1^2 + #1^3 &, 1] &&
     e2 < Root[2 e1 - 2 e1^2 - d2 e1^2 + (-e1 + d2 e1) #1 + (-1 - e1) #1^2 + #1^3 &, 2] &&
     ((2 d2 > 1 && d2 < 1/√2 && d2 + e1 < 1) || (d2 + -0.0933… ≥ 0 && 2 e1 < 1 && 2 d2 ≤ 1) ||
       (d2 > 0 && d2 + -0.0933… < 0 && 2 e1 ≤ 1))) ||
   (d2 + e1 < 1 && e1 + e2 < 1 && ((2 e1 ≥ 1 && d2 + -0.0933… ≥ 0 && 2 d2 ≤ 1) ||
       (d2 > 0 && 2 e1 > 1 && d2 + -0.0933… < 0)))))
```

Degree 3

In[∘]:=
```
ls[3] // Factor;
sol3 = Solve[ls[3] == 0, Hom[3]] // Simplify;
{p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} =
  {p[3, 0], p[2, 1], p[1, 2], p[0, 3]} /. sol3[[1]] // Factor;
ls[3] // Simplify
```

Out[∘]=
```
{0, 0, 0, 0}
```

Degree 4

In[ ]:=
```
ls[4] // Factor;
sol4 = Solve[ls[4] == 0, AppendTo[Hom[4], g1]];
{g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} =
  {g1, p[4, 0], p[3, 1], p[2, 2], p[1, 3], p[0, 4]} /. sol4[[1]];
g1 //
 Factor
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

Out[ ]=
$$\left(-2\,e1+e1^2+3\,d2\,e1^2+4\,e1^3+d2\,e1^3-d2^2\,e1^3-3\,e1^4-4\,d2\,e1^4-2\,d2^2\,e1^4+2\,e2-4\,e1\,e2-2\,d2\,e1\,e2+5\,e1^2\,e2-4\,d2\,e1^2\,e2+d2^2\,e1^2\,e2-3\,e1^3\,e2+5\,d2\,e1^3\,e2+2\,d2^2\,e1^3\,e2-5\,e2^2+d2\,e2^2+18\,e1\,e2^2-10\,e1^2\,e2^2-2\,d2\,e1^2\,e2^2-4\,e1^3\,e2^2-4\,d2\,e1^3\,e2^2+3\,e2^3-d2\,e2^3-12\,e1\,e2^3+d2\,e1\,e2^3+5\,e1^2\,e2^3+4\,d2\,e1^2\,e2^3-e1\,e2^4-2\,e1^2\,e2^4+2\,e1\,e2^5\right)\Big/\left(e2\left(12-20\,e1-12\,d2\,e1+7\,e1^2+10\,d2\,e1^2+3\,d2^2\,e1^2-2\,e1^3+2\,d2\,e1^3+3\,e1^4-12\,e2+12\,d2\,e2+6\,e1\,e2-4\,d2\,e1\,e2-6\,d2^2\,e1\,e2+6\,e1^3\,e2-17\,e2^2-6\,d2\,e2^2+3\,d2^2\,e2^2+14\,e1\,e2^2+10\,d2\,e1\,e2^2+11\,e1^2\,e2^2+4\,e2^3-12\,d2\,e2^3+12\,e1\,e2^3+16\,e2^4\right)\right)$$

In[ ]:=
```
Variables[g1]
```

Out[ ]=
```
{e2, e1, d2}
```

Degree 5

In[ ]:=
```
ls[5] // Factor;
sol5 = Solve[ls[5] == 0, Hom[5]];
{p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} =
  {p[5, 0], p[4, 1], p[3, 2], p[2, 3], p[1, 4], p[0, 5]} /. sol5[[1]] // Factor;
ls[5] // Factor
```

Out[ ]=
```
{0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Degree 6

In[ ]:=
```
ls[6] // Factor;
sol6 = Solve[ls[6] == 0, AppendTo[Hom[6], g2]];
{p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} =
  {p[6, 0], p[5, 1], p[4, 2], p[3, 3], p[2, 4], p[1, 5], p[0, 6], g2} /. sol6[[1]] // Factor;
```

Solve: Equations may not give solutions for all "solve" variables.

In[ ]:=
```
g2
Variables[g2]
```

Out[ ]=
$$\frac{-192\,e1^3+3744\,e1^4+\cdots 2933\cdots+288\,d2\,e1\,e2^{19}\,p[2,2]+864\,e1^2\,e2^{19}\,p[2,2]-384\,e1\,e2^{20}\,p[2,2]}{3\,e2\cdots 3\cdots(\cdots 1\cdots)\left(20-44\,e1-20\,d2\,e1+33\,e1^2+22\,d2\,e1^2+\cdots 24\cdots+13\,e1^2\,e2^2-4\,e2^3-20\,d2\,e2^3+20\,e1\,e2^3+32\,e2^4\right)}$$

large output | show less | show more | show all | set size limit...

Out[ ]=
```
{e2, e1, d2, p[2, 2]}
```

In[ ]:=
```
p[2, 2] = 0;
g2;
```

In[ ]:=
```
Variables[g2]
```

Out[ ]=
```
{e2, e1, d2}
```

Investigating the possible values of e1 and d2

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 1/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]=
```
False
```

Out[ ]=
```
False
```

Out[ ]=
```
False
```

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 2/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]=
```
False
```

Out[ ]=
```
False
```

Out[ ]=
```
False
```

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 3/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && d2 > 0 && e2 > 0, {d2, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]=
```
(0 < d2 < 7/10 && e2 == Root[-4263 + 2646 d2 - 432 d2^2 + (11 690 - 8250 d2 + 1440 d2^2) #1 +
      (-6080 + 7120 d2) #1^2 + (-1500 - 3400 d2) #1^3 - 4800 #1^4 + 6000 #1^5 &, 1]) ||
 (7/10 < d2 < 0.735… && e2 == Root[-4263 + 2646 d2 - 432 d2^2 + (11 690 - 8250 d2 + 1440 d2^2) #1 +
      (-6080 + 7120 d2) #1^2 + (-1500 - 3400 d2) #1^3 - 4800 #1^4 + 6000 #1^5 &, 2])
```

Out[ ]= False

Out[ ]= False

Setting the value of d2

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; d2 = 3 / 10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 &&
   y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 &&
   c1 > 0 && d1 > 0 && e1 ≥ 0 && e2 > 0, {e1, e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]=
```
(39 + Sqrt[5713 - 4008 Sqrt[2]] + 20 e1 > 36 Sqrt[2] &&
   e1 + -0.492… < 0 && e2 == Root[-200 e1 + 190 e1^2 + 421 e1^3 - 438 e1^4 +
      (200 - 460 e1 + 389 e1^2 - 132 e1^3) #1 + (-470 + 1800 e1 - 1060 e1^2 - 520 e1^3) #1^2 +
      (270 - 1170 e1 + 620 e1^2) #1^3 + (-100 e1 - 200 e1^2) #1^4 + 200 e1 #1^5 &, 1]) ||
 (0.492… ≤ e1 < 1/2 && e2 == Root[-200 e1 + 190 e1^2 + 421 e1^3 - 438 e1^4 +
      (200 - 460 e1 + 389 e1^2 - 132 e1^3) #1 + (-470 + 1800 e1 - 1060 e1^2 - 520 e1^3) #1^2 +
      (270 - 1170 e1 + 620 e1^2) #1^3 + (-100 e1 - 200 e1^2) #1^4 + 200 e1 #1^5 &, 3])
```

Out[ ]= False

Out[ ]= False

Setting the value of e1, d2 such that g1=0, g2<0

In[ ]:=
```
ClearAll[d2, e1, e2]; e1 = 3/10; d2 = 4/10;
Reduce[ g1 == 0 && g2 < 0 && a11 > 0 && det > 0 &&
   beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0, {e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 > 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0,
  {e2} ] // FullSimplify
Reduce[ g1 == 0 && g2 == 0 && a11 > 0 && det > 0 && beta > 0 && y0 > 0 && c1 > 0 && d1 > 0 && e2 > 0,
  {e2} ] // FullSimplify
```

Out[ ]= 30 e2 + [√ -18.9…] == 0

Out[ ]= False

Out[ ]= False

In[ ]:= `g1 // Factor`

Out[ ]=
$$\frac{-81843+215510\,e2-80800\,e2^2-71500\,e2^3-120000\,e2^4+150000\,e2^5}{25\,e2\left(55851-60060\,e2-125300\,e2^2+28000\,e2^3+160000\,e2^4\right)}$$

In[ ]:= `g2 // Factor`

Out[ ]=
$$-\Big(\big(-7163477245732849632+108834719548271657265\,e2-618997960691032506300\,e2^2+1654315932275893272000\,e2^3-1921827260759476942500\,e2^4+895027619630747687500\,e2^5-5443787618252766375000\,e2^6+23247943465166542500000\,e2^7-40625221075278218750000\,e2^8+34972974592196812500000\,e2^9-20364241867282500000000\,e2^{10}+26751631674075000000000\,e2^{11}-36525826237125000000000\,e2^{12}+20523696210000000000000\,e2^{13}-5042947712500000000000\,e2^{14}+20423760000000000000000\,e2^{15}-40658469375000000000000\,e2^{16}+34192681250000000000000\,e2^{17}-13181250000000000000000\,e2^{18}+1170000000000000000000\,e2^{19}+450000000000000000000\,e2^{20}\big)\Big/\Big(300\,e2\left(-149+90\,e2+200\,e2^2\right)\left(96-45\,e2-325\,e2^2+250\,e2^3\right)^2\left(-96+45\,e2-200\,e2^2+500\,e2^3\right)\left(55851-60060\,e2-125300\,e2^2+28000\,e2^3+160000\,e2^4\right)\left(78749-72900\,e2-169900\,e2^2-60000\,e2^3+320000\,e2^4\right)\Big)\Big)$$

In[ ]:=
```
e2 = - [√ -18.9…]/30;
e2 // N
```

Out[ ]= 0.63138

Perturbation

1. Setting e2 such that g1 = 0, g2 < 0, trace(J) = 0

In[ ]:= Quit

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
xd = x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
yd = -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 1;
e1 = 3/10; d2 = 4/10;
d1 = (c1 (e1 - e2) + e2 f1 + e1 (d2 + f2))/e2;
c1 = (d2 - d2 e1 - e2 (e2 + f1) + f2 - e1 f2)/(-1 + e1 + e2);
e2 = -(-18.9...)/30;
g1 = (-81843 + 215510 e2 - 80800 e2^2 - 71500 e2^3 - 120000 e2^4 + 150000 e2^5)/
     (25 e2 (55851 - 60060 e2 - 125300 e2^2 + 28000 e2^3 + 160000 e2^4));
g2 =
  -((-7163477245732849632 + 108834719548271657265 e2 - 618997960691032506300 e2^2 +
      1654315932275893272000 e2^3 - 1921827260759476942500 e2^4 +
      895027619630747687500 e2^5 - 5443787618252766375000 e2^6 +
      23247943465166542500000 e2^7 - 40625221075278218750000 e2^8 +
      34972974592196812500000 e2^9 - 20364241867282500000000 e2^10 +
      26751631674075000000000 e2^11 - 36525826237125000000000 e2^12 +
      20523696210000000000000 e2^13 - 5042947712500000000000 e2^14 +
      20423760000000000000000 e2^15 - 40658469375000000000000 e2^16 +
      34192681250000000000000 e2^17 - 13181250000000000000000 e2^18 +
      1170000000000000000000 e2^19 + 450000000000000000000 e2^20) /
    (300 e2 (-149 + 90 e2 + 200 e2^2) (96 - 45 e2 - 325 e2^2 + 250 e2^3)^2
      (-96 + 45 e2 - 200 e2^2 + 500 e2^3) (55851 - 60060 e2 - 125300 e2^2 + 28000 e2^3 +
        160000 e2^4) (78749 - 72900 e2 - 169900 e2^2 - 60000 e2^3 + 320000 e2^4)));
{c1, d1, e2} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]= {0.728939, 1.28263, 0.63138}

Out[ ]= $\{1.52172\times 10^{-15}, -0.0493633\}$

In[ ]:= `Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals] // N`

Out[ ]= {{x → 1., y → 3.37188}}

2. Perturbing e2 such that g1 > 0, g2 < 0, trace(J) = 0

In[ ]:= Quit

In[ ]:= ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];

$$xd = x^2\,y - x\,y - c1\,x^2 - d1\,x + e1\,y + f1;$$

$$yd = -x^2\,y + x\,y + c1\,x^2 + d2\,x - e2\,y + f2;$$

$$f1 = 1;\ f2 = 1;$$

$$e1 = \frac{3}{10};\ d2 = \frac{4}{10};$$

$$d1 = \frac{c1\,(e1 - e2) + e2\,f1 + e1\,(d2 + f2)}{e2};$$

$$c1 = \frac{d2 - d2\,e1 - e2\,(e2 + f1) + f2 - e1\,f2}{-1 + e1 + e2};$$

$$e2 = \frac{633}{1000};\ \text{(*perturbed parameter for g1>0*)}$$

$$g1 = \frac{-81\,843 + 215\,510\,e2 - 80\,800\,e2^2 - 71\,500\,e2^3 - 120\,000\,e2^4 + 150\,000\,e2^5}{25\,e2\,\left(55\,851 - 60\,060\,e2 - 125\,300\,e2^2 + 28\,000\,e2^3 + 160\,000\,e2^4\right)};$$

$$\begin{aligned} g2 = &-\Big(\big(-7\,163\,477\,245\,732\,849\,632 + 108\,834\,719\,548\,271\,657\,265\,e2 - 618\,997\,960\,691\,032\,506\,300\,e2^2 +\\ &1\,654\,315\,932\,275\,893\,272\,000\,e2^3 - 1\,921\,827\,260\,759\,476\,942\,500\,e2^4 +\\ &895\,027\,619\,630\,747\,687\,500\,e2^5 - 5\,443\,787\,618\,252\,766\,375\,000\,e2^6 +\\ &23\,247\,943\,465\,166\,542\,500\,000\,e2^7 - 40\,625\,221\,075\,278\,218\,750\,000\,e2^8 +\\ &34\,972\,974\,592\,196\,812\,500\,000\,e2^9 - 20\,364\,241\,867\,282\,500\,000\,000\,e2^{10} +\\ &26\,751\,631\,674\,075\,000\,000\,000\,e2^{11} - 36\,525\,826\,237\,125\,000\,000\,000\,e2^{12} +\\ &20\,523\,696\,210\,000\,000\,000\,000\,e2^{13} - 5\,042\,947\,712\,500\,000\,000\,000\,e2^{14} +\\ &20\,423\,760\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{15} - 40\,658\,469\,375\,000\,000\,000\,000\,e2^{16} +\\ &34\,192\,681\,250\,000\,000\,000\,000\,e2^{17} - 13\,181\,250\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{18} +\\ &1\,170\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{19} + 450\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{20}\big) \Big/\\ &\Big(300\,e2\,\left(-149 + 90\,e2 + 200\,e2^2\right)\left(96 - 45\,e2 - 325\,e2^2 + 250\,e2^3\right)^2\\ &\left(-96 + 45\,e2 - 200\,e2^2 + 500\,e2^3\right)\left(55\,851 - 60\,060\,e2 - 125\,300\,e2^2 + 28\,000\,e2^3 +\right.\\ &\left.160\,000\,e2^4\right)\left(78\,749 - 72\,900\,e2 - 169\,900\,e2^2 - 60\,000\,e2^3 + 320\,000\,e2^4\right)\Big)\Big); \end{aligned}$$

{c1, d1}

{c1, d1} // N

{g1, g2} // N

Out[ ]= $\left\{\frac{53\,689}{67\,000}, \frac{83\,211}{67\,000}\right\}$

Out[ ]= {0.801328, 1.24196}

Out[ ]= {0.00642203, -0.301207}

In[ ]:= sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals] // N

Out[ ]= $\{\{x \to 1.,\ y \to 3.47761\}\}$

3. Perturbing c1 and e2 such that g1 > 0, g2 < 0, trace(*J*) < 0

In[ ]:= Quit

In[ ]:=
```
ClearAll[xd, yd, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2, g1, g2, sol];
```

$$xd = x^2 y - x y - c1\, x^2 - d1\, x + e1\, y + f1;$$

$$yd = -x^2 y + x y + c1\, x^2 + d2\, x - e2\, y + f2;$$

f1 = 1; f2 = 1;

$$e1 = \frac{3}{10};\ d2 = \frac{4}{10};$$

$$d1 = \frac{c1\,(e1 - e2) + e2\, f1 + e1\,(d2 + f2)}{e2};$$

$$c1 = \frac{79}{100};$$ (*perturbed parameter for trace(J)<0*)

$$e2 = \frac{633}{1000};$$ (*perturbed parameter for g1>0*)

$$g1 = \frac{-81\,843 + 215\,510\, e2 - 80\,800\, e2^2 - 71\,500\, e2^3 - 120\,000\, e2^4 + 150\,000\, e2^5}{25\, e2\,(55\,851 - 60\,060\, e2 - 125\,300\, e2^2 + 28\,000\, e2^3 + 160\,000\, e2^4)};$$

$$g2 = -\Big(\big(-7\,163\,477\,245\,732\,849\,632 + 108\,834\,719\,548\,271\,657\,265\, e2 - 618\,997\,960\,691\,032\,506\,300\, e2^2 + 1\,654\,315\,932\,275\,893\,272\,000\, e2^3 - 1\,921\,827\,260\,759\,476\,942\,500\, e2^4 + 895\,027\,619\,630\,747\,687\,500\, e2^5 - 5\,443\,787\,618\,252\,766\,375\,000\, e2^6 + 23\,247\,943\,465\,166\,542\,500\,000\, e2^7 - 40\,625\,221\,075\,278\,218\,750\,000\, e2^8 + 34\,972\,974\,592\,196\,812\,500\,000\, e2^9 - 20\,364\,241\,867\,282\,500\,000\,000\, e2^{10} + 26\,751\,631\,674\,075\,000\,000\,000\, e2^{11} - 36\,525\,826\,237\,125\,000\,000\,000\, e2^{12} + 20\,523\,696\,210\,000\,000\,000\,000\, e2^{13} - 5\,042\,947\,712\,500\,000\,000\,000\, e2^{14} + 20\,423\,760\,000\,000\,000\,000\,000\, e2^{15} - 40\,658\,469\,375\,000\,000\,000\,000\, e2^{16} + 34\,192\,681\,250\,000\,000\,000\,000\, e2^{17} - 13\,181\,250\,000\,000\,000\,000\,000\, e2^{18} + 1\,170\,000\,000\,000\,000\,000\,000\, e2^{19} + 450\,000\,000\,000\,000\,000\,000\, e2^{20}\big) \Big/ \big(300\, e2\,(-149 + 90\, e2 + 200\, e2^2)\,(96 - 45\, e2 - 325\, e2^2 + 250\, e2^3)^2\,(-96 + 45\, e2 - 200\, e2^2 + 500\, e2^3)\,(55\,851 - 60\,060\, e2 - 125\,300\, e2^2 + 28\,000\, e2^3 + 160\,000\, e2^4)\,(78\,749 - 72\,900\, e2 - 169\,900\, e2^2 - 60\,000\, e2^3 + 320\,000\, e2^4)\big)\Big);$$

```
{c1, d1}
{c1, d1} // N
{g1, g2} // N
```

Out[ ]= $\left\{\frac{79}{100}, \frac{26\,331}{21\,100}\right\}$

Out[ ]= {0.79, 1.24791}

Out[ ]= {0.00642203, -0.301207}

In[ ]:=
```
ClearAll[sol];
sol = Solve[{xd == 0, yd == 0}, {x, y}, Reals][[1]] // N
D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol;
Eigenvalues[D[{xd, yd}, {{x, y}}] /. sol] // N
```

Out[ ]= {x → 1., y → 3.45972}

Out[ ]= {-0.000599526 + 0.209724 i, -0.000599526 - 0.209724 i}

In[ ]:=
```
-0.0005995260663507829` * 2
```

Out[ ]= -0.00119905

Plotting the limit cycles when g1 < 0, g2 > 0, trace(*J*) > 0

Preparations

In[ ]:=
```
Quit
```

In[ ]:=
```
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@
  {Plot, ParametricPlot, ListPlot, ListLinePlot};
SetDirectory[NotebookDirectory[]];
SetOptions[#, AxesStyle → Arrowheads[Automatic]] & /@ {Plot, ListPlot,
   ListLinePlot, ListLogLogPlot, ParametricPlot, DateListPlot, DiscretePlot};
LaunchKernels[];
```

The function creating the plots

In[ ]:=
```
ClearAll[p, q, x, y, c1, d1, d2, e1, e2, f1, f2];
p[x_, y_] := x^2 y - x y - c1 x^2 - d1 x + e1 y + f1;
q[x_, y_] := -x^2 y + x y + c1 x^2 + d2 x - e2 y + f2;
f1 = 1; f2 = 1;
```

$$e1 = \frac{3}{10}; \; d2 = \frac{4}{10};$$

$$d1 = \frac{c1\,(e1 - e2) + e2\,f1 + e1\,(d2 + f2)}{e2};$$

$$c1 = \frac{79}{100}; \text{(*perturbed parameter for trace(J)<0*)}$$

$$e2 = \frac{633}{1000}; \text{(*perturbed parameter for g1>0*)}$$

$$g1 = \frac{-81\,843 + 215\,510\,e2 - 80\,800\,e2^2 - 71\,500\,e2^3 - 120\,000\,e2^4 + 150\,000\,e2^5}{25\,e2\,\left(55\,851 - 60\,060\,e2 - 125\,300\,e2^2 + 28\,000\,e2^3 + 160\,000\,e2^4\right)};$$

$$g2 = -\Big(\big(-7\,163\,477\,245\,732\,849\,632 + 108\,834\,719\,548\,271\,657\,265\,e2 - 618\,997\,960\,691\,032\,506\,300\,e2^2 + 1\,654\,315\,932\,275\,893\,272\,000\,e2^3 - 1\,921\,827\,260\,759\,476\,942\,500\,e2^4 + 895\,027\,619\,630\,747\,687\,500\,e2^5 - 5\,443\,787\,618\,252\,766\,375\,000\,e2^6 + 23\,247\,943\,465\,166\,542\,500\,000\,e2^7 - 40\,625\,221\,075\,278\,218\,750\,000\,e2^8 + 34\,972\,974\,592\,196\,812\,500\,000\,e2^9 - 20\,364\,241\,867\,282\,500\,000\,000\,e2^{10} + 26\,751\,631\,674\,075\,000\,000\,000\,e2^{11} - 36\,525\,826\,237\,125\,000\,000\,000\,e2^{12} + 20\,523\,696\,210\,000\,000\,000\,000\,e2^{13} - 5\,042\,947\,712\,500\,000\,000\,000\,e2^{14} + 20\,423\,760\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{15} - 40\,658\,469\,375\,000\,000\,000\,000\,e2^{16} + 34\,192\,681\,250\,000\,000\,000\,000\,e2^{17} - 13\,181\,250\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{18} + 1\,170\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{19} + 450\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,e2^{20}\big) \Big/ \big(300\,e2\,(-149 + 90\,e2 + 200\,e2^2)\,(96 - 45\,e2 - 325\,e2^2 + 250\,e2^3)^2\,(-96 + 45\,e2 - 200\,e2^2 + 500\,e2^3)\,(55\,851 - 60\,060\,e2 - 125\,300\,e2^2 + 28\,000\,e2^3 + 160\,000\,e2^4)\,(78\,749 - 72\,900\,e2 - 169\,900\,e2^2 - 60\,000\,e2^3 + 320\,000\,e2^4)\big)\Big);$$

```
{g1, g2} // N
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1}
{e2, e1, d2, d1, f1, f2, c1} // N
```

Out[ ]= {0.00642203, -0.301207}

Out[ ]= $\left\{\frac{633}{1000}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{26\,331}{21\,100}, 1, 1, \frac{79}{100}\right\}$

Out[ ]= {0.633, 0.3, 0.4, 1.24791, 1., 1., 0.79}

```
In[]:= ClearAll[nsol, ev, plotter];
nsol = NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20][[1]]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotter[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000,
  ar_ : Automatic, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
     {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  trafo[point_] := point;
  solution[t_] := trafo[Through[sys[t]]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange,
      Point[trafo[{x, y} /. nsol]]}, PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar,
    AxesLabel → {x, y}, LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 350],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 250],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 250]}]

Out[]= {x → 1.0000000000000000000, y → 3.4597156398104265403}

Out[]= {-0.00059952606635071090 + 0.209724420398826536 i,
 -0.00059952606635071090 - 0.209724420398826536 i}
```

Plotter with arrow

In[#]:=
```
ClearAll[nsol, ev, plotterarrow];
nsol = First@NSolve[Join @@ Thread /@ {{p[x, y], q[x, y]} == 0, {x, y} > 0}, {x, y}, 20]
ev = Eigenvalues[D[{p[x, y], q[x, y]}, {{x, y}}] /. nsol]
plotterarrow[τ_, shift_, ag_ : Automatic, pg_ : Automatic, pp_ : 1000, ar_ : Automatic,
  arrow_, opts___] := Module[{startingpoint, sys, solution, plot1},
  startingpoint = ({x, y} /. nsol) + shift;
  sys := NDSolveValue[Join[{u'[t] == p[u[t], v[t]], v'[t] == q[u[t], v[t]]},
      Thread[{u[0], v[0]} == startingpoint]],
     {u, v}, {t, τ}, AccuracyGoal → ag, PrecisionGoal → pg, opts];
  solution[t_] := Through[sys[t]];
  {ParametricPlot[Evaluate[solution[t]], {t, 0, τ},
    Epilog → {Black, Arrowheads → 0.07, Arrow[{startingpoint, arrow}],
      Red, PointSize[0.05], Point[startingpoint], Orange,
      Point[{x, y} /. nsol]
     }, PlotRange → All, PlotPoints → pp, AspectRatio → ar,
    AxesLabel → {x, y}, LabelStyle → Directive[14], ImageSize → 350],
   Plot[Evaluate[solution[t][[1]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, x}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 250],
   Plot[Evaluate[solution[t][[2]]], {t, 0, τ}, PlotRange → All, PlotPoints → pp,
    AxesLabel → {t, y}, LabelStyle → Directive[12], ImageSize → 250]}]
```

Out[#]=
```
{x → 1.0000000000000000000, y → 3.4597156398104265403}
```

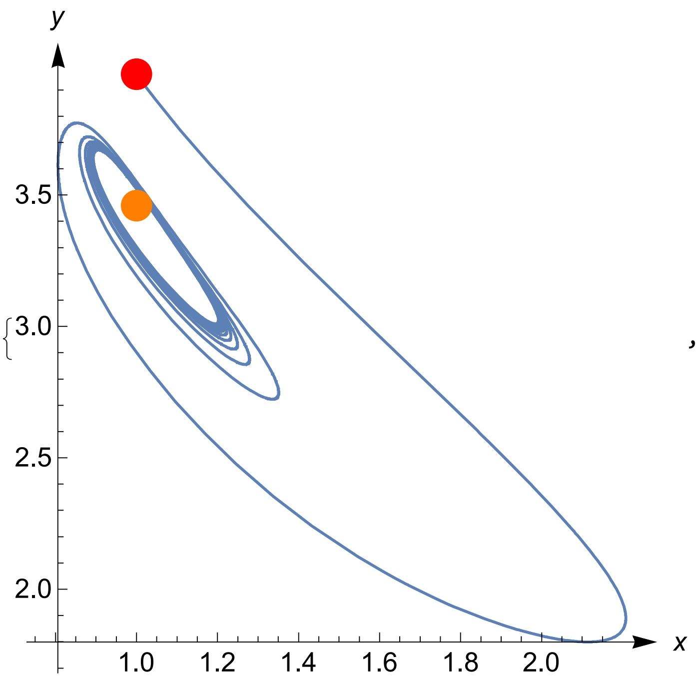
Out[#]=
```
{-0.000599526066350710900 + 0.209724420398826536 ⅈ,
 -0.000599526066350710900 - 0.209724420398826536 ⅈ}
```

Figures

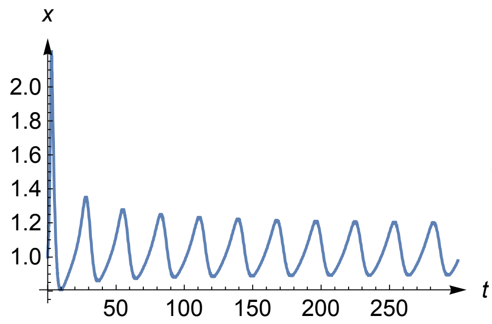
Figure 12

In[#]:=
```
plotter[300, {0, 0.5}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
plotterarrow[300, {0, 0.5}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.214, 3.559}, Method → "BDF"]
```

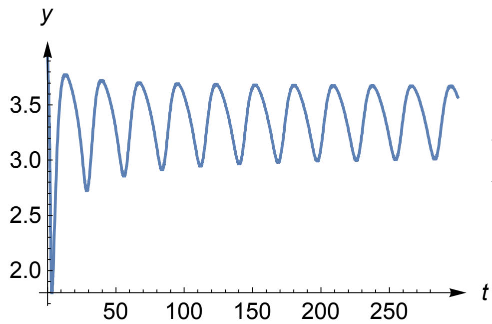
Out[#]= {


y
3.5
3.0
2.5
2.0
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
x

,

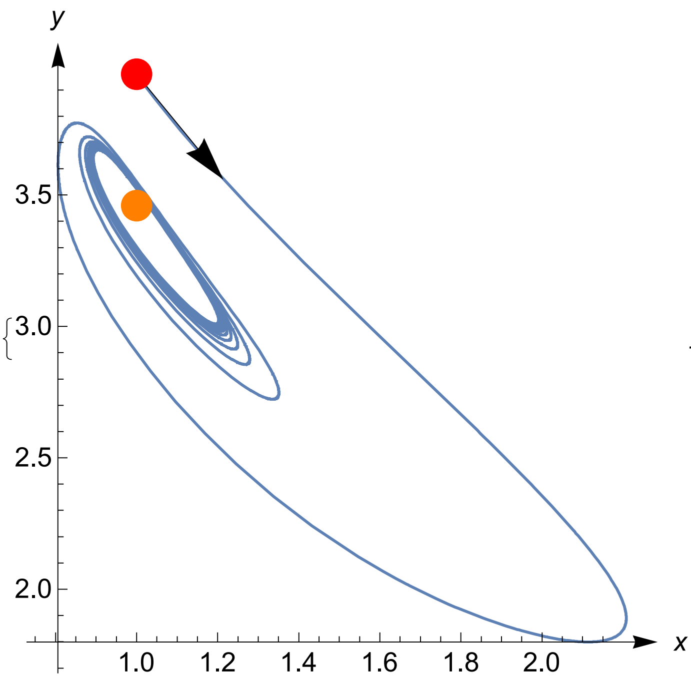

x
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
50
100
150
200
250
t

,

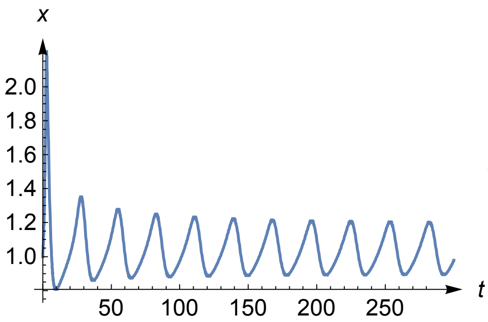

y
3.5
3.0
2.5
2.0
50
100
150
200
250
t

}

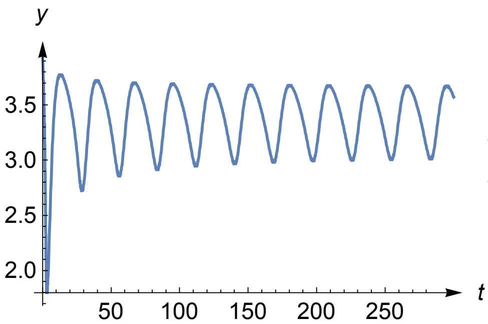
Out[#]= {



,



,

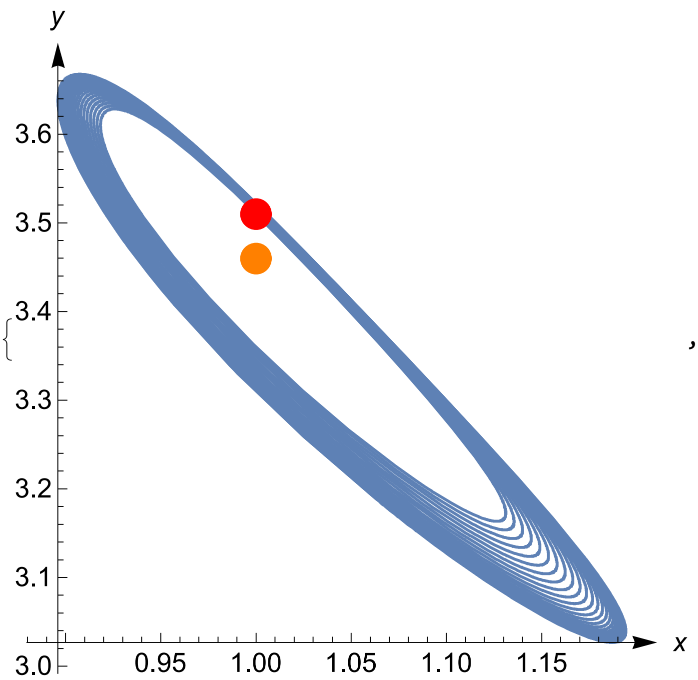


}

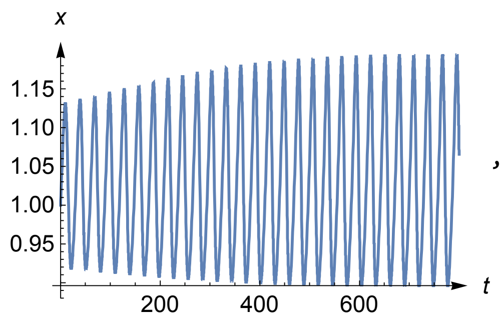
Figure 13

In[#]:=
```
plotter[800, {0, 0.05}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
plotterarrow[800, {0, 0.05}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.05, 3.396}, Method → "BDF"]
```

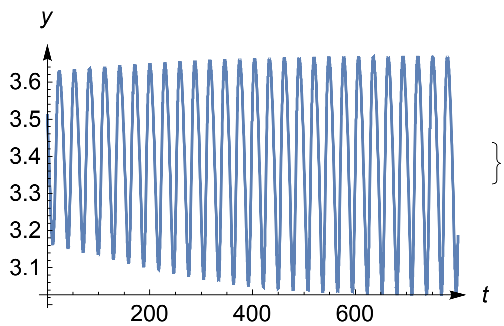
Out[ ]=


y
3.6
3.5
3.4
3.3
3.2
3.1
3.0
0.95
1.00
1.05
1.10
1.15
x

,


x
1.15
1.10
1.05
1.00
0.95
200
400
600
t

,


y
3.6
3.5
3.4
3.3
3.2
3.1
200
400
600
t

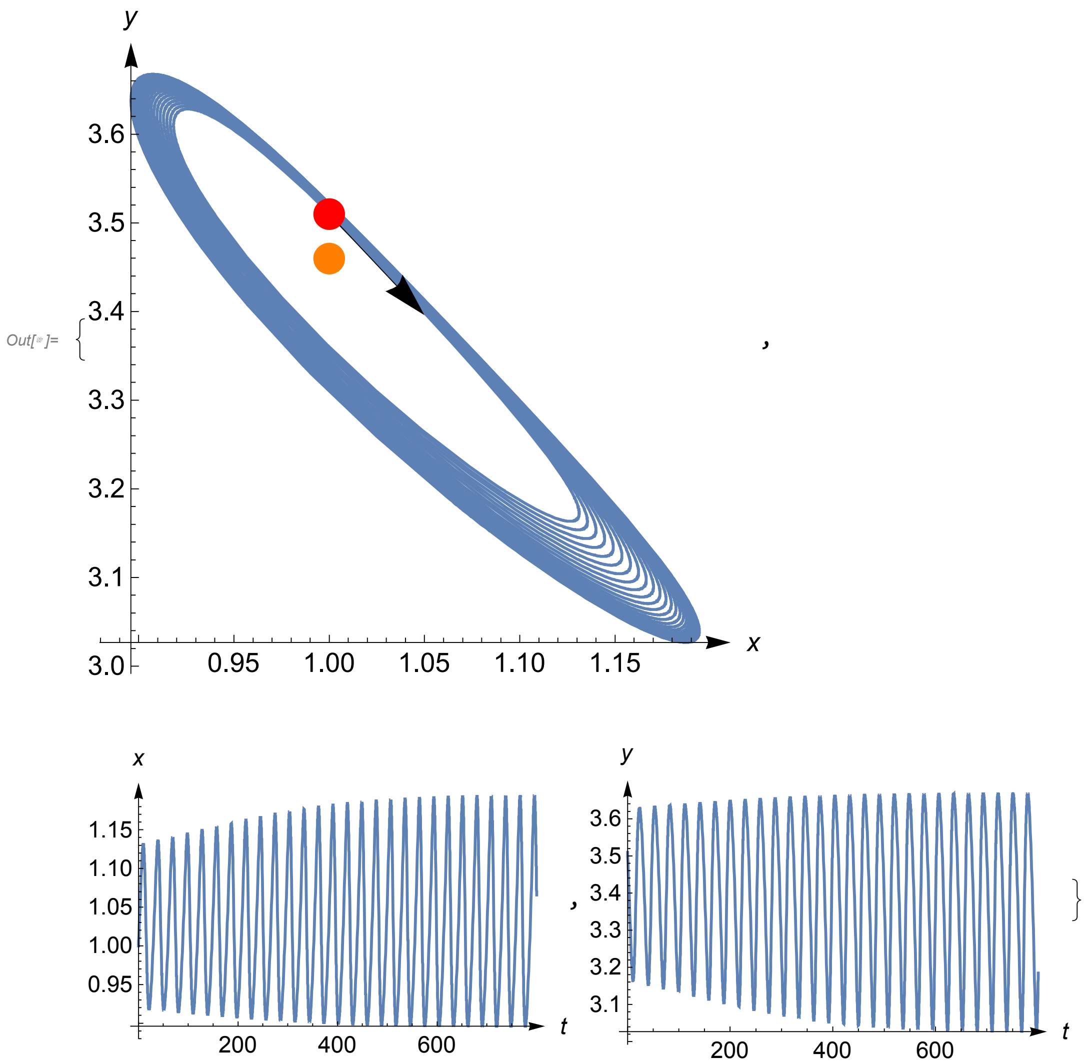
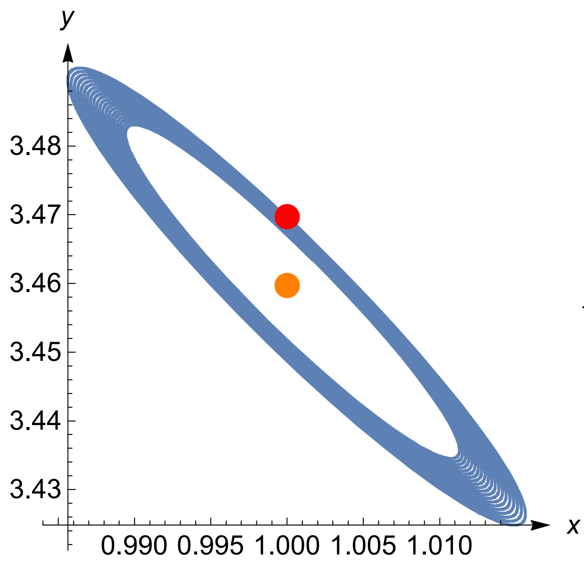


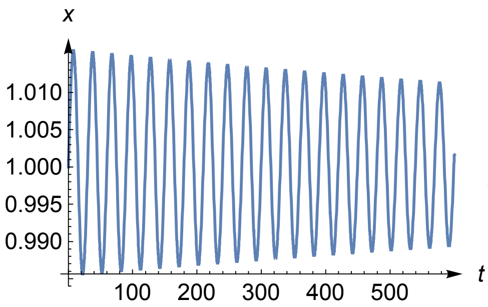
Figure 14

```
In[]:= plotter[600, {0, 0.01}, Automatic, 100, 1000, 1, Method → "BDF"]
       plotterarrow[600, {0, 0.01}, Automatic, 100, 1000, 1, {1.005, 3.458}, Method → "BDF"]
```

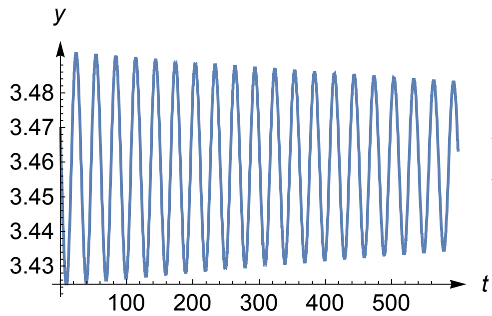
Out[•]= {


y
3.48
3.47
3.46
3.45
3.44
3.43
0.990 0.995 1.000 1.005 1.010
x

,

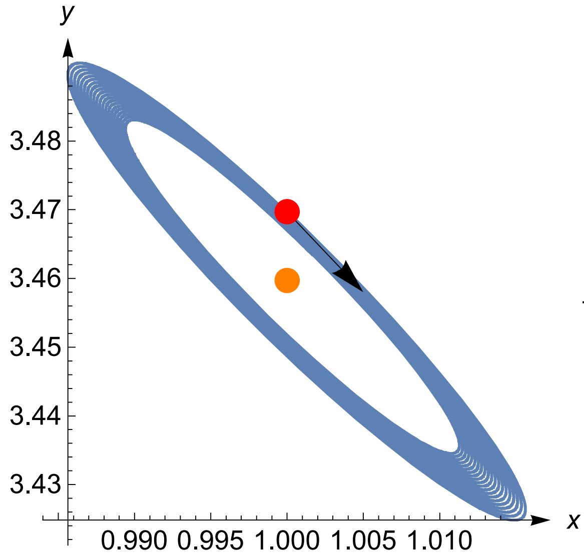

x
1.010
1.005
1.000
0.995
0.990
100 200 300 400 500
t

,

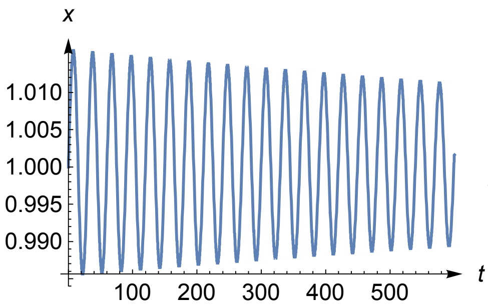

y
3.48
3.47
3.46
3.45
3.44
3.43
100 200 300 400 500
t

}

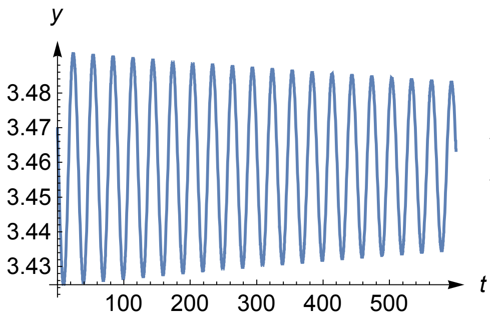
Out[ ]= {


y
3.48
3.47
3.46
3.45
3.44
3.43
0.990 0.995 1.000 1.005 1.010
x

,


x
1.010
1.005
1.000
0.995
0.990
100 200 300 400 500
t

,


y
3.48
3.47
3.46
3.45
3.44
3.43
100 200 300 400 500
t

}