9. előadás

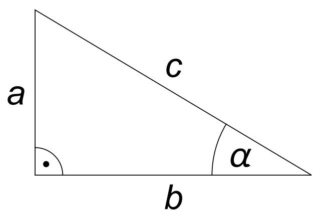
Trigonometrikus függvények és inverzeik. Trigonometrikus egyenletek.

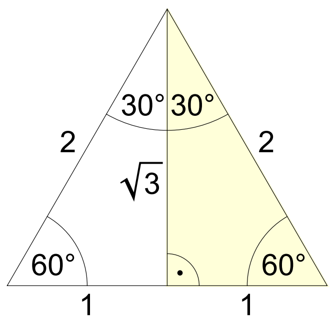
Trigonometria

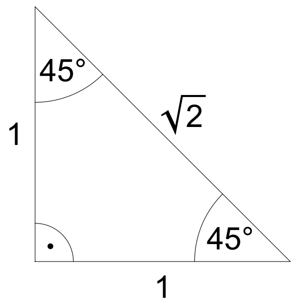
Hegyesszögek szögfüggvényei

Derékszögű háromszögben az α hegyesszög szinusza, koszinusza, tangense, kotangense ($0 < \alpha < 90\,°$):

- $\sin\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{átfogó}}$
- $\cos\alpha = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\text{szöggel szemközi befogó}}{\text{szög melletti befogó}}$
- $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$







Nevezetes szögek szögfüggvényei (30 °, 45 °, 60 °)

- $\sin 30\,° = \cos 60\,° = \dfrac{1}{2}$
- $\sin 60\,° = \cos 30\,° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} 30\,° = \operatorname{ctg} 60\,° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
- $\operatorname{tg} 60\,° = \operatorname{ctg} 30\,° = \sqrt{3}$
- $\sin 45\,° = \cos 45\,° = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} 45\,° = \operatorname{ctg} 45\,° = 1$

Forgásszögek szögfüggvényei ($\alpha \in \mathbb{R}$)

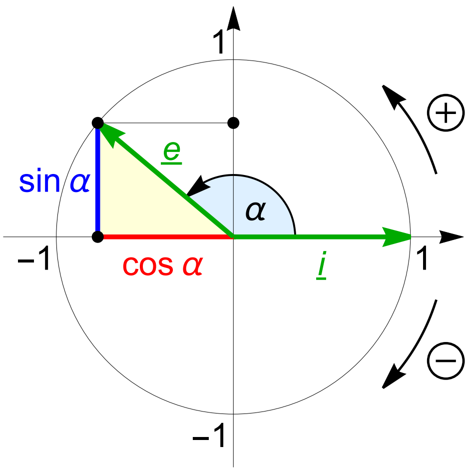
Definíciók:

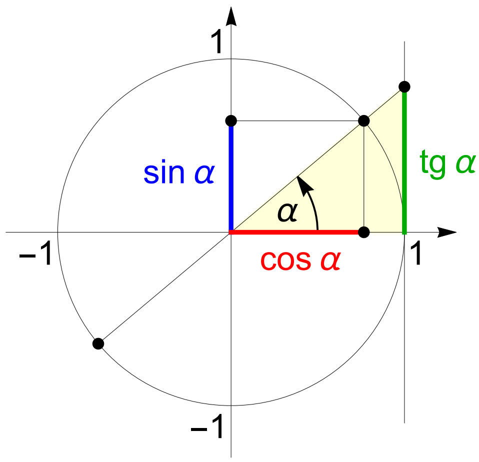
- Forgassuk el az $\underline{i} = (1,\ 0)$ vektort az origó körül α forgásszöggel. Az így kapott $\underline{e}$ egységvektor végpontjának első koordinátája $\cos\alpha$, második koordinátája $\sin\alpha$.

- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ha $\cos\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

- $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ha $\sin\alpha \neq 0$, azaz $\alpha \neq k\,\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Megjegyzés: Az α forgásszög tangense az $x = 1$ egyenletű egyenesen olvasható le, felhasználva, hogy hasonló háromszögek oldalarányaiból $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1}$.



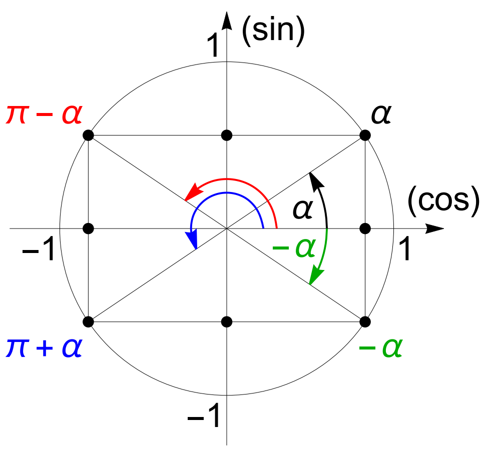


A definíciókból következik:
- $-1 \le \sin\alpha \le 1, \; -1 \le \cos\alpha \le 1$
- Pitagorasz-tétel: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén:
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$,
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$,
- $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot \pi)$,
- $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot \pi)$

Néhány azonosság

Az egységkörön lévő pontok 1. és 2. koordinátájának összehasonlításával néhány azonosság:



- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

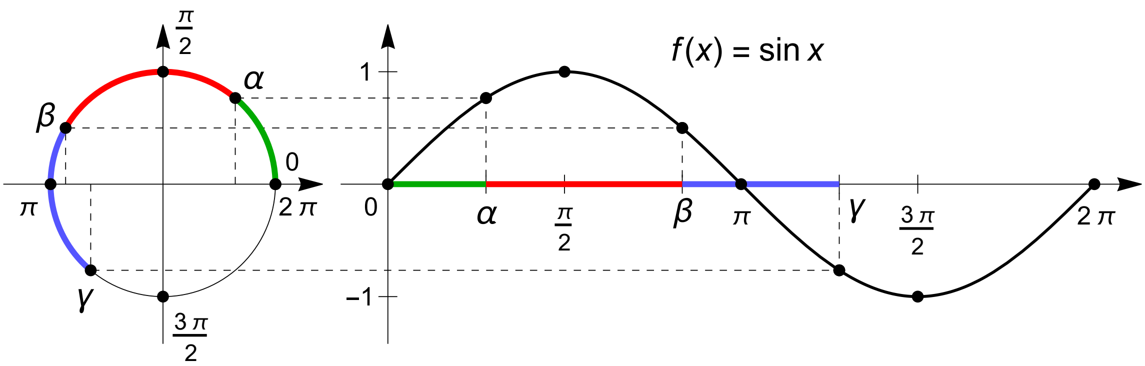
- $\sin(\pi + \alpha) = \sin(-\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\pi + \alpha)$

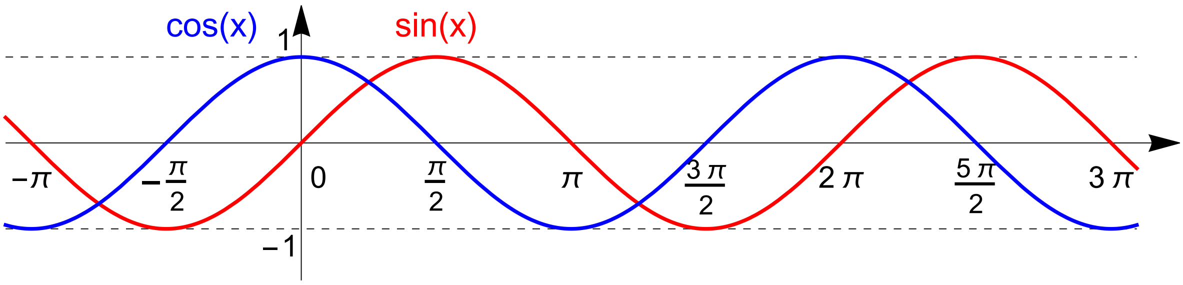
Szögek ívmértéke

- 1 radián nagyságú egy kör azon középponti szöge, amelynél az ív hossza egyenlő a kör sugarával.
- Példák: $360\,°$ ívmértéke $2\,\pi$ radián; $180\,°$ ívmértéke π radián; $90\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{2}$ radián;
  $60\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{3}$ radián; $45\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{4}$ radián; $30\,°$ ívmértéke $\frac{\pi}{6}$ radián.
- Kapcsolat egy szög fokokban ($\alpha°$) és radiánban (α_r) megadott értéke között: $\frac{\alpha°}{180\,°} = \frac{\alpha_r}{\pi}$

  $\Longrightarrow$ $\alpha_r = 1$ radián: $\alpha° = \frac{180\,°}{\pi} \approx 57.2958\ldots\,°$

A szinusz- és koszinuszfüggvény





Értelmezési tartomány: • $D_{\sin} = \mathbb{R}$, $D_{\cos} = \mathbb{R}$

Értékkészlet: • $R_{\sin} = [-1, 1]$, $R_{\cos} = [-1, 1]$

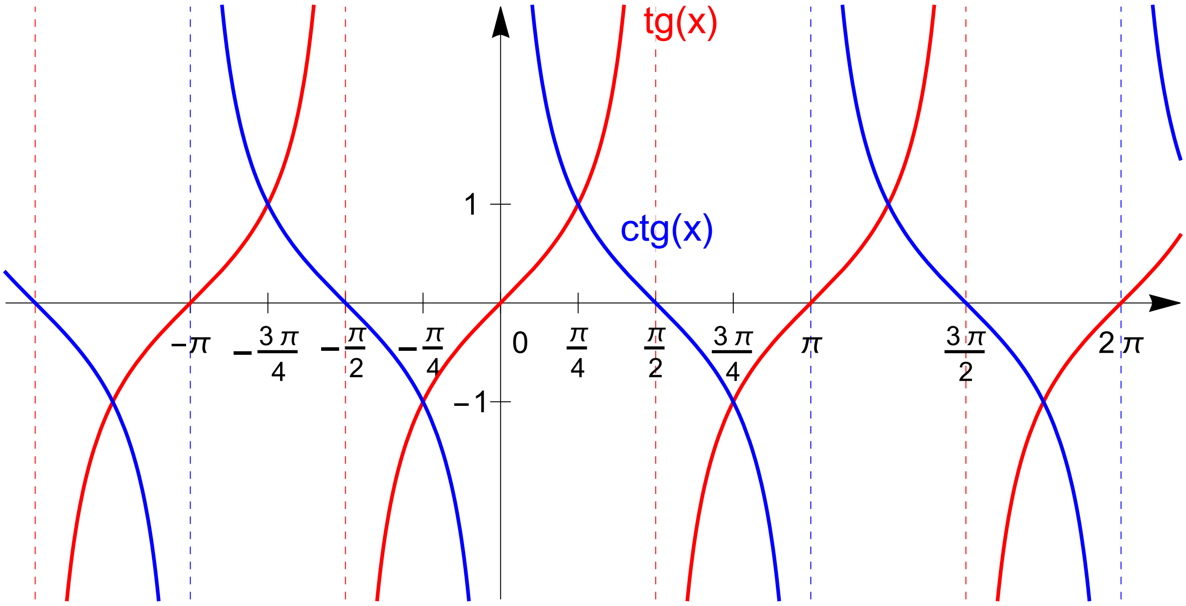
Periodicitás:
- $\sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$,
- $\cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\,\pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Longrightarrow$ a szinusz- és koszinuszfüggvény $2\,\pi$ szerint periodikus

Paritás:
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\Longrightarrow$ a szinuszfüggvény páratlan (grafikonja tükrös az origóra)
- $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ $\Longrightarrow$ a koszinuszfüggvény páros (grafikonja tükrös az y tengelyre)

Zérushelyek:
- $\sin x = 0 \Longleftrightarrow x = k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
- $\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

A tangens- és kotangensfüggvény



Értelmezési tartomány: • $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ott van értelmezve, ahol $\cos x \neq 0$, azaz $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

• $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ ott van értelmezve, ahol $\sin x \neq 0$, azaz $x \neq k\pi \ \ (k \in \mathbb{Z})$

$$\Longrightarrow D_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad D_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Értékkészlet: • $R_{\mathrm{tg}} = \mathbb{R}$, $D_{\mathrm{ctg}} = \mathbb{R}$

Periodicitás: • $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot \pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$, $\Longrightarrow$ a tangens- és kotangensfüggvény

• $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k \cdot \pi)$ $(k \in \mathbb{Z})$ π szerint periodikus

Paritás: • $\operatorname{tg}(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha$ $\Longrightarrow$ a tanges- és kotangensfüggvény páratlan

• $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$ (grafikonjuk tükrös az origóra)

Zérushelyek: • $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = 0 \iff \sin x = 0 \iff x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

• $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = 0 \iff \cos x = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Az arkusz függvények

- Az $f(x) = \sin x$ függvény szigorúan monoton a $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon

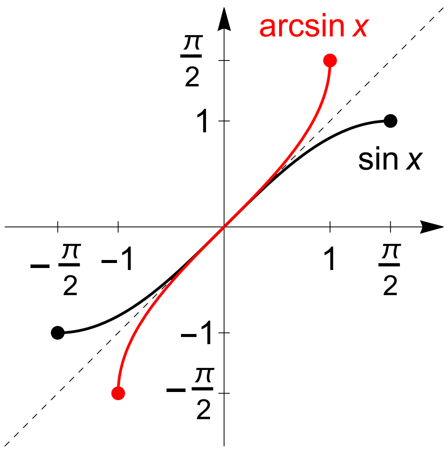
$\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

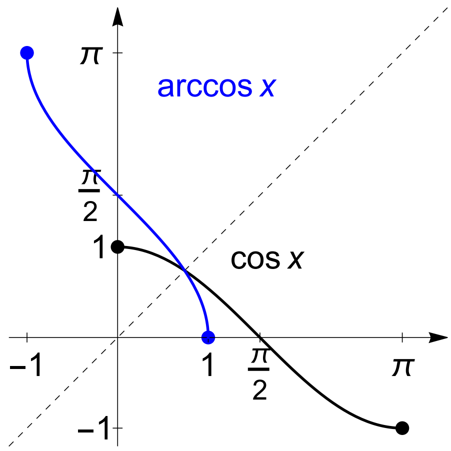
Az arkusz szinusz függvény: $\arcsin x = \left(\sin \mid_{\left[\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}$; $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, $R_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Az $f(x) = \cos x$ függvény szigorúan monoton a $[0, \pi]$ intervallumon

$\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

Az arkusz koszinusz függvény: $\arccos x = \left(\cos \mid_{[0,\pi]}\right)^{-1}$; $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $R_{\arccos} = [0, \pi]$.





- Az $f(x) = \operatorname{tg} x$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right)$ függvény szigorúan monoton a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon

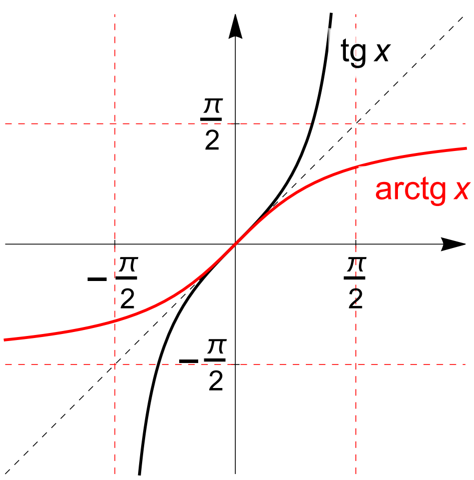
$\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

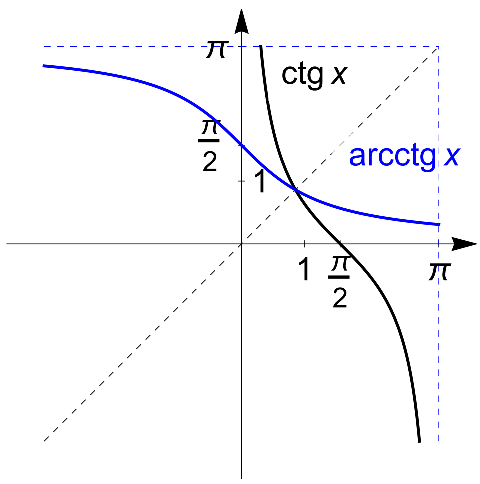
Az arkusz tangens függvény: $\operatorname{arctg} x = \left(\operatorname{tg} \mid_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}$; $D_{\operatorname{arctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arctg}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Az $f(x) = \operatorname{ctg} x$ $(x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$ függvény szigorúan monoton a $(0, \pi)$ intervallumon

$\Longrightarrow$ a leszűkítésének ezen az intervallumon létezik inverze.

Az arkusz kotangens függvény: $\operatorname{arcctg} x = \left(\operatorname{ctg} \mid_{(0,\pi)}\right)^{-1}$; $D_{\operatorname{arcctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arcctg}} = (0, \pi)$.





Néhány azonosság

1) Addíciós képletek:

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \implies \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \implies \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \implies \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}, \ \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

3) $1 + \mathrm{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} \implies \cos^2 x = \dfrac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$

Feladatok

Az alábbi feladatokhoz használjuk fel a következő azonosságokat:

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

3) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Segédanyag:
https://math.bme.hu/bevmat/szogfuggvenyek.pdf

1. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sin x = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\sin(2x) = 1$ **d)** $\sin x = 0.7$

e) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **f)** $\cos^2 x = 1$ **g)** $\cos x = 0.3$ **h)** $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$

2. Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $4 \sin^2 x - 8 \cos x = -1$ **b)** $\cos 2x - 2 \sin x = -3$

c) $2 \cos^2 x + \sin x - 1 = 0$ **d)** $\cos 2x - \sin^2 x - 6 \sin x = 4$

3. Oldja meg az alábbi egyenleteket a $[0, 2\pi]$ intervallumon:

a) $\sin 2x - \sin x = \mathrm{tg}\, x$ **b)** $(\cos x + \sin x)^2 + \cos x = 1$

c) $2 \sin^2 x + \cos(\pi - x) = 2$ **d)** $\cos 2x = \sin x + 1$

e) $\cos 2x + 2 \cos^2 x - 2 \sin x - 1 = 0$ **f)** $2 \sin x \cos 2x = \sin 2x$

Eredmények

1. feladat

a) $\sin x = \frac{1}{2} \iff x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ \ x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \iff x_1 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ \ x_2 = \frac{5\pi}{3} + k \cdot 2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\sin(2x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

d) $\sin x = 0.7 \iff x_1 = \arcsin(0.7) + k \cdot 2\pi \approx 0.775397 + k \cdot 2\pi,$

$x_2 = \pi - \arcsin(0.7) + k \cdot 2\pi \approx 2.3662 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \pm\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

f) $\cos^2 x = 1 \iff x = k \cdot \pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

g) $\cos x = 0.3 \iff x_{1,2} = \pm\arccos(0.3) + k \cdot 2\pi \approx \pm 1.2661 + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

h) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \iff x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

A **2. és 3. feladat** eredményei megtalálhatók az alábbi linken:
https://math.bme.hu/~nagyi/bevmat-B/BevmatB-trigonometria.pdf

Néhány megoldás

2. a) $4\sin^2 x - 8\cos x = -1$

Megoldás. Felhasználjuk: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

Ezt az egyenletbe beírva:

$$4\left(1 - \cos^2 x\right) - 8\cos x = -1$$
$$4 - 4\cos^2 - 8\cos x = -1$$
$$4\cos^2 x + 8\cos x - 5 = 0$$

Ez $\cos x$-re másodfokú egyenlet. A megoldóképletből:

$$(\cos x)_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2 \cdot 4} = \frac{-8 \pm 12}{8}$$

1. eset: $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

2. eset: $\cos x = \frac{-20}{8} = -\frac{5}{2} < -1$, ezért ebben az esetben nincs megoldás

(mivel $-1 \le \cos x \le 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén)

A megoldás: $x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

2. b) $\cos 2x - 2\sin x = -3$

Megoldás. Felhasználjuk: 1) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \implies \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Innen: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

Ezt az egyenletbe beírva: $(1 - 2\sin^2 x) - 2\sin x = -3$

$2\sin^2 x + 2\sin x - 4 = 0$

$\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$

Ez $\sin x$-re másodfokú egyenlet. A megoldóképletből: $(\sin x)_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

1. eset: $\sin x = 1 \iff x = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

2. eset: $\sin x = -2 < -1 \implies$ ebben az esetben nincs megoldás

(mivel $-1 \leq \sin x \leq 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén)

A megoldás: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

3. a) $\sin 2x - \sin x = \operatorname{tg} x$

Megoldás. Felhasználjuk: $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ (Kikötés: $\cos x \neq 0$)

Ezt az egyenletbe beírva: $2\sin x\cos x - \sin x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Megjegyzés: nem oszthatunk $\sin x$-szel, mert ez nulla is lehet. Helyette: emeljünk ki $\sin x$-et, rendezzünk nullára, és alakítsunk szorzattá:

$$\sin x\left(2\cos x - 1 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0$$

Egy szorzat pontosan akkor 0, ha valamelyik tényezője 0.

1. eset: $\sin x = 0 \implies x = 0$ vagy $x = \pi$ vagy $x = 2\pi$

2. eset: $2\cos x - 1 - \dfrac{1}{\cos x} = 0$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

$(\cos x)_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$

2. a) eset: $\cos x = 1 \implies x = 0$ vagy $x = 2\pi$, de ezek az 1. esetben már szerepeltek

2. b) eset: $\cos x = -\dfrac{1}{2} \implies x = \dfrac{2\pi}{3}$ vagy $x = \dfrac{4\pi}{3}$

A megoldás: $x_1 = 0$, $x_2 = \pi$, $x_3 = 2\pi$, $x_4 = \dfrac{2\pi}{3}$, $x_5 = \dfrac{4\pi}{3}$

3. e) $\cos 2x + 2\cos^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

Megoldás. Felhasználjuk: 1) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Innen: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

Ezt az egyenletbe beírva:

$$(1 - 2\sin^2 x) + 2(1 - \sin^2 x) - 2\sin x - 1 = 0$$
$$1 - 2\sin^2 x + 2 - 2\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$$
$$4\sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0$$
$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$
$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

1. eset: $\sin x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$

2. eset: $\sin x = -1 \Longrightarrow x_3 = \frac{3\pi}{2}$

A megoldás: $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}, x_3 = \frac{3\pi}{2}$