Bevezető matematika B, 1. zárthelyi dolgozat

2021. október 15.
Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: ____________________ **Neptun-kód:** __________ **Csoport:** _____

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\sum$

Feladatok

1. (6 pont) Egy moziterem nézőterének utolsó, huszadik sorában 34 férőhely van. Az első sortól kezdve minden következő sorban eggyel több szék van, mint az előtte lévőn. Hányan lehetnek a moziban szombat este egy teltházas előadás alatt?

2. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést:

$$\frac{\left(x^2+2x\right)^2}{x^3-2x^2} : \frac{\left(x^3-4x\right)(x+2)}{\left(x^2-4x+4\right)}$$

3. (6 pont) Hozza a lehető legegyszerűbb alakra az alábbi kifejezést: $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^5}}{x^{-2}\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x^{19}}}}}$

4. (6 pont) Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét: $\left(\dfrac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5 9}+\sqrt{16^{1+\log_9 3}}$

5. (7 pont) Ádám és Tamás együtt dolgozva 4 óra alatt végeznek el egy munkát. Ha külön-külön dolgoznának, Tamásnak 6 órával több időre lenne szüksége, mint Ádámnak. Hány óra alatt végezné el a munkát Ádám, illetve Tamás, ha egyedül dolgoznának?

6. (6 pont) Mely x értékre lesz az $f(x)=-4x^2-12x+3$ függvény értéke maximális, és mennyi a maximum értéke?

7. (6 pont) Hogyan válasszuk meg a p valós paraméter értékét, hogy az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke legyen?

$$x^2+(p-1)\,x-p+4=0$$

8. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2+2x-15}{x+8}>0$$

Eredmények, pontozási útmutató

1.

A számtani sorozat adatainak megadása: $n = 20$, $a_{20} = 34$, $d = 1 \implies a_1 = 34 - 19 = 15$ **(3p)**
Az összegképlet felírása és a végeredmény: $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 490$ **(3p)**

2.

Szorzatokká alakítás és reciprokkal való szorzás: **4p**
Egyszerűsítések után a helyes végeredmény: **2p**

$$\frac{(x^2+2x)^2}{x^3-2x^2} : \frac{(x^3-4x)(x+2)}{(x^2-4x+4)} = \frac{x^2(x+2)^2}{x^2(x-2)} : \frac{x(x^2-4)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{x^2(x+2)^2}{x^2(x-2)} \cdot \frac{(x-2)^2}{x(x-2)(x+2)(x+2)} = \frac{1}{x}$$

3.

Az egyes tényezők hatványkitevős alakban való felírása: **2p**
A számlálóban és a nevezőben az azonos alapú hatványok szorzatára vonatkozó azonosság alkalmazása: **2p**
Végeredmény: **2p**

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x^5}}{x^{-2}\sqrt[3]{x\sqrt{x^{19}}}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{-1} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{19}{12}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{-1+\frac{1}{6}+\frac{19}{12}}} = \frac{x^{\frac{5}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

4.

Az összeg tagjainak kiszámítása: **3-3p**

$$\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5 9} + \sqrt{16^{1+\log_9 3}} = \left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 9} + \sqrt{16^{1+\log_9 3}}$$

$$\left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^{\log_5 9} = \left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 9} = \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_5 9} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 9} = 5^{\log_5\left(9^{\frac{1}{2}}\right)} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\log_9 3 = \log_9\left(\sqrt{9}\right) = \log_9\left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\implies \sqrt{16^{1+\log_9 3}} = \sqrt{16^{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{16^{\frac{3}{2}}} = 16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$$

vagy: $\sqrt{16^{1+\log_9 3}} = \left(\sqrt{16}\right)^{1+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8$

Az eredmény: $3 + 8 = 11$

5.

Ismeretlen bevezetése, külön-külön az egységnyi idő alatt elvégzett munkák kiszámítása: **2p**
Egyenes arányosság alapján az egyenlet felírása: **2p**

Az egyenlet megoldása: **2p**
Helyes válasz: **1p**

Ádám: x óra alatt végez el egy munkát $\Longrightarrow$ 1 óra alatt $\frac{1}{x}$ munkát végez el

Tamás: $x+6$ óra alatt végez el egy munkát $\Longrightarrow$ 1 óra alatt $\frac{1}{x+6}$ munkát végez el

Ádám és Tamás együtt 1 óra alatt $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}$ munkát végeznek el, továbbá

Ádám és Tamás együtt 4 óra alatt 1 munkát végeznek el.

Egyenes arányosság alapján

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6} \Longrightarrow x(x+6)=4(x+6)+4x \Longrightarrow x^2-2x-24=(x-6)(x+4)=0$$

$\Longrightarrow x=6$ vagy $x=-4$, de ez utóbbi nem lehet, mivel $x>0$.

A megoldás: Ádám 6 óra alatt, Tamás 12 óra alatt végezné el a munkát.

6.

Teljes négyzetté alakítás: **4p**
(főegyüttható kiemelése és a teljes négyzet felírása: 2p, $a(x+b)^2+c$ alak: 2p)
A szélsőérték helye és a szélsőérték megadása: **2p**

$$f(x)=-4x^2-12x+3=-4\left(x^2+3x-\frac{3}{4}\right)=-4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)=-4\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-3\right)=-4\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+12$$

f-nek maximuma van az $x=-\frac{3}{2}$ helyen, és a maximum értéke $f\left(-\frac{3}{2}\right)=12$.

7.

Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha $D>0$: **1p**
Diszkrimináns felírása: **2p** Diszkrimináns gyökei: **1p**
A p-re vonatkozó egyenlőtlenség megoldása: **2p**

$$D=(p-1)^2-4(-p+4)=p^2+2p-15=(p-3)(p+5)>0 \Longleftrightarrow p<-5 \text{ vagy } p>3$$

8.

Számláló szorzattá alakítása: **1p**, számláló előjele: **2p**
Nevező előjele: **1p**
Az egyenlőtlenség megoldása : **3p**

$$\frac{x^2+2x-15}{x+8}=\frac{(x+5)(x-3)}{x+8}>0$$

A számláló pozitív, ha $x<-5$ vagy $x>3$ és negatív, ha $-5<x<3$.
A nevező pozitív, ha $x>-8$ és negatív, ha $x<-8$.
A tört pontosan akkor pozitív, ha a számláló és a nevező azonos előjelű.
A megoldás: $-8<x<-5$ vagy $x>3$.