Bevezető matematika B, 2. zárthelyi dolgozat

2020. december 10.
Munkaidő: 90 perc

Feladatok

1. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{81^{x+2}}{\sqrt{9^{5x-4}}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1}$$

2. (3+4 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

a) $\log_2(\log_9(\log_3 x)) = -1$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > 1$

3. (6 pont) Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \sqrt{11 - |\,2x - 5\,|}$$

4. (6 pont) Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, írja fel az inverzét (a választ indokolja):

$$f(x) = 5\lg x - 4, \quad x > 0$$

5. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon:

$$(\cos x - \sin x)^2 + \sin x = 1$$

6. (6 pont) Mennyi az $A(-3, 2)$, $B(7, -2)$, $C(3, 4)$ csúcspontú háromszög A csúcsból induló súlyvonalának hossza?

7. (6 pont) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 10$ egyenletű kör középpontján és merőleges az $5x + 3y = 12$ egyenletű egyenesre.

8. (6 pont) Feldobunk 4 dobókockát egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két kockával dobunk 6-ost?

Megoldások

1. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\frac{81^{x+2}}{\sqrt{9^{5x-4}}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{2x+1}$$

Megoldás: Felhasználjuk: $\left(a^k\right)^l = a^{k\,l}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\frac{a^k}{a^l} = a^{k-l}$

$$\frac{\left(3^4\right)^{x+2}}{\sqrt{\left(3^2\right)^{5x-4}}} = \left(3^{-3}\right)^{2x+1} \Longrightarrow \frac{3^{4(x+2)}}{\sqrt{3^{2\cdot(5x-4)}}} = 3^{-3\cdot(2x+1)} \Longrightarrow \frac{3^{4(x+2)}}{3^{2\cdot(5x-4)\cdot\frac{1}{2}}} = 3^{-3\cdot(2x+1)} \Longrightarrow \frac{3^{4x+8}}{3^{5x-4}} = 3^{-6x-3}$$

$$\Longrightarrow 3^{(4x+8)-(5x-4)} = 3^{-6x-3} \Longrightarrow 3^{-x+12} = 3^{-6x-3}$$

A 3-as alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt a kitevők egyenlők:

$$-x + 12 = -6x - 3 \Longrightarrow 5x = -15 \Longrightarrow \text{A megoldás: } x = -3.$$

Pontozás:

Bal és jobb oldal közös alapra hozása: **4 pont**

Kitevők egyenlősége és helyes eredmény: **2 pont**

2. (3+4 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

a) $\log_2(\log_9(\log_3 x)) = -1$ **b)** $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > 1$

Megoldás: a) Felhasználjuk: $\log_a b = c$, amelyre $a^c = b$ $(0 < a \neq 1,\ b > 0)$

$\log_2(\log_9(\log_3 x)) = -1 \Longrightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} = \log_9(\log_3 x)$ **(1p)**

$\log_9(\log_3 x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3 = \log_3 x$ **(1p)**

$\log_3 x = 3 \Longrightarrow 3^3 = x$

A megoldás: $x = 27$ **(1p)**

Ellenőrzés: $\log_2(\log_9(\log_3 27)) = \log_2(\log_9 3) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$

b) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > 1$

Kikötés: $x - 2 > 0$, azaz $x > 2$. **(1p)**

$\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ **(1p)**

Mivel az $\frac{1}{2}$ alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő,

ezért az argumentumokra az egyenlőtlenség iránya megfordul:

$x - 2 < \frac{1}{2}$ **(1p)** $\Longrightarrow x < 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

A megoldás: $2 < x < \frac{5}{2}$. **(1p)**

3. (6 pont) Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \sqrt{11 - |\,2x - 5\,|}$$

Megoldás: Értelmezési tartomány: a négyzetgyök miatt: $11 - |\,2x - 5\,| \geq 0$

$\iff |\,2x - 5\,| \leq 11 \iff -11 \leq 2x - 5 \leq 11$

$\iff -6 \leq 2x \leq 16 \iff -3 \leq x \leq 8$

$D_f = [-8, 8]$ **(3p)**

Zérushelyek: $f(x) = 0 \iff \sqrt{11 - |\,2x - 5\,|} = 0$

$\iff 11 - |\,2x - 5\,| = 0 \iff |\,2x - 5\,| = 11$

$\iff 2x - 5 = 11$ vagy $2x - 5 = -11$, azaz

$x_1 = 8, x_2 = -3.$ **(3p)**

4. (6 pont) Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, írja fel az inverzét (a választ indokolja):

$$f(x) = 5\lg x - 4, \quad x > 0$$

Megoldás: $f(x)$ szigorúan monoton, ezért invertálható. **(2p)**

Az inverz meghatározása: $y = 5\lg x - 4$

Kicseréljük az x-et és az y-t: $x = 5\lg y - 4$

Kifejezzük az y-t az x-szel: $\dfrac{x+4}{5} = \lg y \implies y = 10^{\frac{x+4}{5}}$

Az f inverze: $f^{-1}(x) = 10^{\frac{x+4}{5}}$, $x \in \mathbb{R}$ **(4p)**

5. (7 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a $[0; 2\pi]$ zárt intervallumon:

$$(\cos x - \sin x)^2 + \sin x = 1$$

Megoldás: Felhasználjuk: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Az egyenlet: $(\cos x - \sin x)^2 + \sin x = 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \sin x = 1$

$-2\sin x \cos x + \sin x = 0$ **(1p)**

Megjegyzés: $\sin x$-szel nem oszthatunk, mert 0 is lehet. Helyette szorzattá alakítunk:

$\sin x(-2\cos x + 1) = 0$ **(1p)**

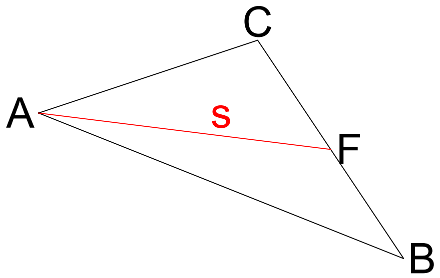
1. eset: $\sin x = 0 \implies x = 0,\ \pi,\ 2\pi$ **(3p)**

2. eset: $-2\cos x + 1 = 0 \implies \cos x = \dfrac{1}{2} \implies x = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ **(2p)**

A megoldás a $[0, 2\pi]$ zárt intervallumon:

$x_1 = 0,\ x_2 = \pi,\ x_3 = 2\pi,\ x_4 = \dfrac{\pi}{3}, x_5 = \dfrac{5\pi}{3}$

6. (6 pont) Mennyi az $A(-3, 2)$, $B(7, -2)$, $C(3, 4)$ csúcspontú háromszög A csúcsból induló súlyvonalának hossza?



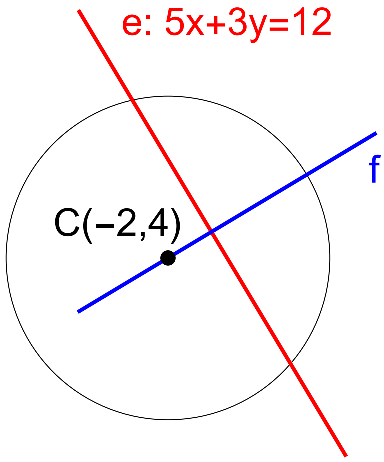
Megoldás: A BC oldal felezőpontja: $F\left(\frac{7+3}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = (5,\ 1)$ **(2p)**

$\overrightarrow{AF} = (8,\ -1)$ **(2p)**

Az s súlyvonal hossza az $\overrightarrow{AF}$ vektor hossza:

$|\ \overrightarrow{AF}\ | = \sqrt{8^2 + (-1)^2} = \sqrt{65}$ **(2p)**

7. (6 pont) Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 10$ egyenletű kör középpontján és merőleges az $5x + 3y = 12$ egyenletű egyenesre.



A $C(u,\ v)$ középpontú, r sugarú kör egyenlete: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
Ha adott az e egyenes egy pontja: $P_0(x_0,\ y_0) \in e$ és egy normálvektora: $\boldsymbol{n}_e = (A,\ B)$,
akkor az egyenes egyenlete: $A\,x + B\,y = A\,x_0 + B\,y_0$.

Megoldás: A kör egyenlete: $x^2 + y^2 + 4\,x - 8\,y = 10$

Teljes négyzetté alakítunk: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10 + 4 + 16$

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 30$$

$\Longrightarrow$ itt a kör középpontja: $C(-2,\ 4)$ **(2p)**

Az e egyenes egyenlete: $5\,x + 3\,y = 12 \Longrightarrow$ az e egy normálvektora: $\boldsymbol{n}_e = (5,\ 3)$
Az f egyenes egy irányvektora: $\boldsymbol{v}_f = \boldsymbol{n}_e = (5,\ 3)$
$\Longrightarrow$ az f egyenes egy normálvektora: $\boldsymbol{n}_f = (3,\ -5)$ **(2p)**

$\Longrightarrow$ az f egyeneshez adott: $(x_0,\ y_0) = (-2,\ 4) \in f$ és $\boldsymbol{n}_f = (3,\ -5) = (A,\ B)$
$\Longrightarrow$ az f egyenes egyenlete: $3\,x - 5\,y = 3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4$

$$3\,x - 5\,y = -26 \quad \textbf{(2p)}$$

8. (6 pont) Feldobunk 4 dobókockát egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két kockával dobunk 6-ost?

Megoldás: A valószínűség: $p = \dfrac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$

Összes esetek számához:

1. kocka: 6-féle lehet
2. kocka: 6-féle lehet
3. kocka: 6-féle lehet
4. kocka: 6-féle lehet egymástól függetlenül

$\Longrightarrow$ az összes esetek száma: 6^4 **(2p)**

Kedvező esetek számához:

Például: 1. eset:
1. kocka: 6-os (1-féle) $\Longrightarrow 5^2$ számú eset
2. kocka: 6-os (1-féle)
3. kocka: nem 6-os (5-féle)
4. kocka: nem 6-os (5-féle)

2. eset:
1. kocka: 6-os (1-féle) $\Longrightarrow 5^2$ számú eset
2. kocka: nem 6-os (5-féle)
3. kocka: 6-os (1-féle)
4. kocka: nem 6-os (5-féle)

... stb.

Kérdés: a két 6-os dobás helyét a 4 hely közül hányféleképpen rögzíthetjük?

Lehetőségek: 1. és 2.
1. és 3.
1. és 4.
2. és 3.
2. és 4.
3. és 4. $\Longrightarrow$ ez $6 = \binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2! \cdot (4-2)!}$ lehetőség

$\Longrightarrow$ a kedvező esetek száma: $6 \cdot 5^2$ **(3p)**

$\Longrightarrow$ a valószínűség: $p = \dfrac{6 \cdot 5^2}{6^4}$ **(1p)**