

## Bevezető matematika B, 2. zárthelyi dolgozat

2022. december 8.

Munkaidő: 90 perc. A dolgozat megírásához semmilyen segédeszköz nem használható.

Név: \_\_\_\_\_ Neptun-kód: \_\_\_\_\_ Kurzus: \_\_\_\_\_

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	$\Sigma$

### Feladatok

1. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{x+1} \cdot \frac{1000^x}{\sqrt{100^{4x+2}}} = 10^{2-x}$$

2. (3+4 pont) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

a)  $\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(4x - 10) > -3$

3. (6 pont) Határozza meg az alábbi függvény értelmezési tartományát és zérushelyeit:

$$f(x) = \lg(7 - |x - 8|)$$

4. (6 pont) Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, írja fel az inverzét (a választ indokolja):

$$f(x) = 8 + \frac{2}{x+7}, \quad x > -7$$

5. (6 pont) Oldja meg az alábbi egyenletet a  $[0; 2\pi]$  zárt intervallumon:  $2 \cos^2 x = \sin x + 1$

6. (6 pont) Mennyi az  $\mathbf{a} = (3; 1)$  és  $\mathbf{b} = (4; -2)$  vektorok által közbezárt szög koszinusza?

7. (7 pont) Adott a  $P(2; 6)$  pont és az  $e: x + 3y = -5$  egyenletű egyenes.

a) Írja fel annak az  $f$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a  $P$  ponton, és merőleges az  $e$  egyenesre.

b) Tükrözze a  $P$  pontot az  $e$  egyenesre, és adja meg a tükörkép koordinátáit.

8. (6 pont) András, Bence és Csabi egy 32 lapos magyar kártyacsomagból kihúznak egy-egy lapot. Mi annak a valószínűsége, hogy a három gyerek közül pontosan kettőnél van piros? (A magyar kártyában 8 piros van.)

## Pontozási útmutató

1.

Bal és jobb oldal közös alapra hozása: 4 pont

Kitevők egyenlősége és helyes eredmény: 2 pont

$$x = -3$$

2.

$$\mathbf{a) \log_3(\log_2 x) = 4^0 = 1 \text{ (1p)} \implies \log_2 x = 3^1 = 3 \text{ (1p)} \implies x = 2^3 = 8 \text{ (1p)}}$$

$$\mathbf{b) \text{ kikötés: } 4x - 10 > 0, \text{ azaz } x > \frac{5}{2} \text{ (1p)}}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(4x - 10) > \log_{\frac{1}{2}} 8 \text{ (1p)}$$

 $4x - 10 < 8 \text{ (1p)}$ , mivel az  $\frac{1}{2}$  alapú logaritmusfüggvény szig. mon. csökkenő

$$\text{Eredmény: } \frac{5}{2} < x < \frac{9}{2} \text{ (1p)}$$

3.

$$\text{Értelmezési tartomány: } 7 - |x - 8| > 0 \iff 1 < x < 15 \text{ (3 pont)}$$

$$\text{Zérushely: } 7 - |x - 8| = 0 \iff x_1 = 2, x_2 = 14 \text{ (3 pont)}$$

4.

Invertálhatóság indoklása: 2 pont

Inverzre vonatkozó képlet felírása: 4 pont

$$f^{-1}(x) = -7 + \frac{2}{x-8}, x > 8$$

5.

$$2 \cos^2 x = \sin x + 1$$

$$2 \cdot (1 - \sin^2 x) = \sin x + 1 \text{ (1 pont)}$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{ (1 pont)}$$

$$(\sin x)_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \text{ (1 pont)}$$

$$1. \text{ eset: } \sin x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6} \text{ vagy } x = \frac{5\pi}{6} \text{ (2 pont)}$$

$$2. \text{ eset: } \sin x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{2} \text{ (1 pont)}$$

6.

$$\mathbf{a} = (3, 1), \mathbf{b} = (4, -2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 10 \text{ (1p)}$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{10} \text{ (1p)}$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{20} \text{ (1p)}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \alpha \text{ (1p)}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{10} \sqrt{20}} \text{ (2p)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

7.

a)  $e$  normálvektora:  $(1, 3)$  $f$  normálvektora:  $(3, -1)$  $f$  egyenlete:  $3x - y = 3 \cdot 2 - 6$ , azaz  $3x - y = 0$  (3 pont)b)  $e$  és  $f$  metszéspontja:

$$\begin{aligned} x + 3y = -5 &\Rightarrow x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2} \Rightarrow \text{a metszéspont: } M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right) \text{ (2 pont)} \\ 3x - y = 0 & \end{aligned}$$

c) Legyen  $P$  tükörképe  $M$ -re  $T(a, b) \Rightarrow \frac{2+a}{2} = -\frac{1}{2}, \frac{6+b}{b} = -\frac{3}{2} \Rightarrow T(-3, -9)$  (2 pont)

8.

Kedvező esetek száma: 3 pont

Összes esetek száma: 2 pont

Valószínűség: 1 pont

$$p = \frac{3 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 24}{32 \cdot 31 \cdot 30}$$