Idősorok elemzése

2018. október 15-29.

Idősor fogalma

- sokasági szemlélet: elméleti idősor - valószínűségi változók egy indexelt $\{Y_t, t \in T\}$ családja, avagy időtől függő véletlen mennyiség, azaz egy *sztochasztikus folyamat*.
  Pl.: napi záróárfolyamok a tőzsdén, éves gabonatermés, stb.
  T az időpontok halmaza, ami lehet diszkrét vagy folytonos.
- minta szemlélet: empírikus idősor
- egyváltozós idősor: skalárértékű valószínűségi változóból származik
- többváltozós idősor: vektorértékű valószínűségi változóból származik

Példa

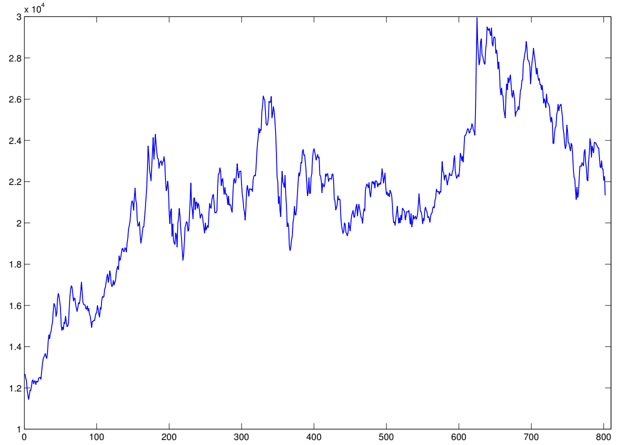

Figure: MOL napi záróárfolyamok 2005 és 2008 között

Idősorelemzési megközelítések

1. **időtartománybeli elemzések**
   - Determinisztikus elemzés: az idősort alakító tényezők teljeskörűen számbavehetők, ezáltal az idősor alakulása időben tökéletes pontossággal felírható. A véletlen csak a gyakorlatban játszik szerepet. De a véletlen szerepe itt véget is ér, a későbbi időpontokra ennek már nincs hatása.
     $\Longrightarrow$ dekompozíciós modellek: különböző, eltérő tartalmú komponensekre bontott idősor, additív vagy multiplikatív formában felépítve. Pl.: additív esetben

     $$Y_t = T_t + C_t + S_t + u_t,$$

     ahol T, C és S a trend, a ciklikus és a periodikus komponens, u pedig a véletlen folyamat.
   - Sztochasztikus elemzés: a véletlen eltérés később is hatással van az idősor alakulására, azaz folyamatépítő szerepe van.
2. **frekvenciatartománybeli elemzések**: rejtett periódusok vizsgálata

Példa - időtartomány vs. frekvenciatartomány

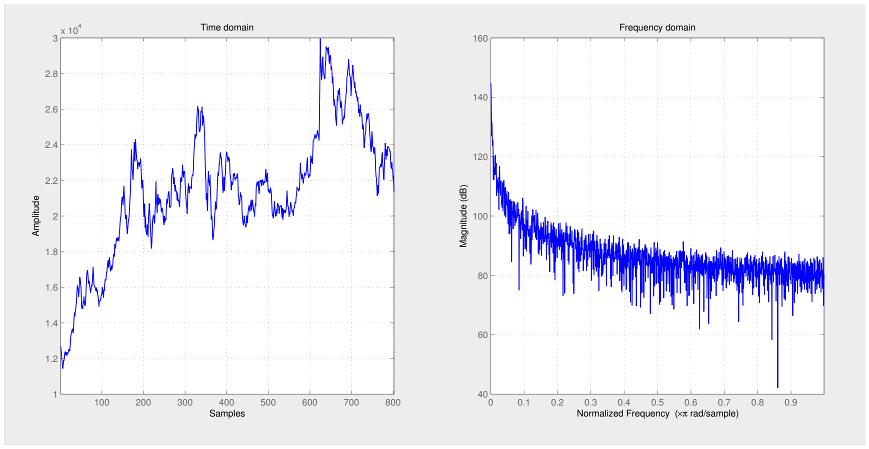

Figure: Időtartomány vs. frekvencia-tartomány, MOL adatok

Példa - determinisztikus vs. sztochasztikus elemzés

Példa: legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges, és

$$
\begin{aligned}
Y_t^D &= \alpha t + u_t \\
Y_t^S &= \alpha + Y_{t-1}^S + u_t, \quad Y_0^S = 0
\end{aligned}
$$

ahol $u \sim N(0, \sigma)$. Ekkor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_t^D) =& \alpha t \quad \text{és} \quad \mathrm{E}(Y_t^S) = \alpha t \\
D^2(Y_t^D) =& \sigma^2 \quad \text{és} \quad D^2(Y_t^S) = t\sigma^2
\end{aligned}
$$

tehát a két idősor várható értékben ugyan azonos, de míg Y_t^D szórása állandó, addig Y_t^S szórása időben változó (azaz beépülnek a 'sokkok' az idősorba).

Példa

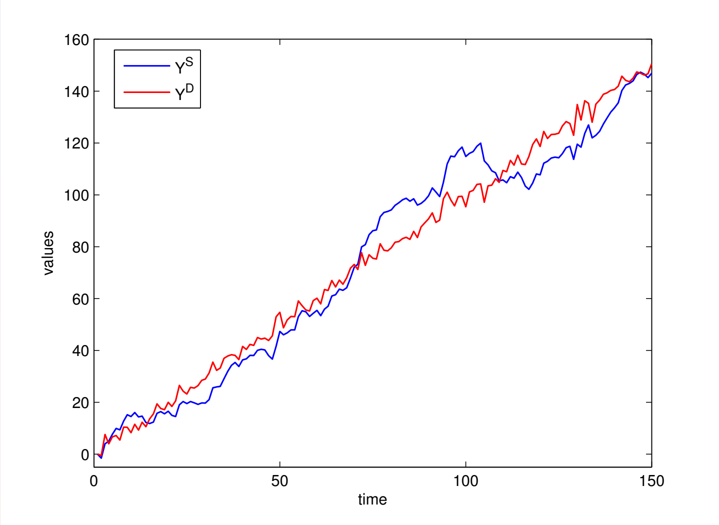

Figure: Determinisztikus és sztochasztikus trend

Példa

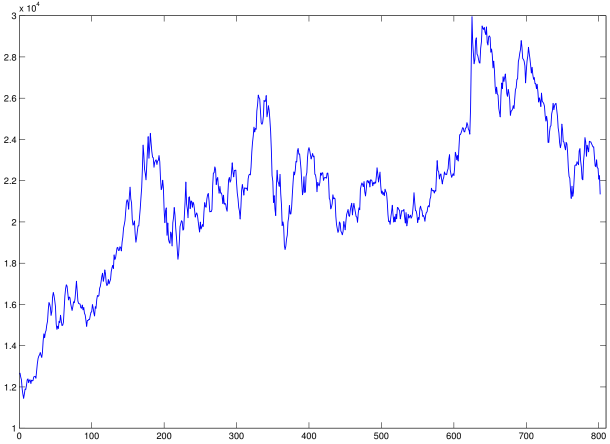

Figure: MOL napi záróárfolyamok 2005 és 2008 között

Stacionaritás

- Az idősorelemzés legalapvetőbb fogalma - lényegében egy megkötést jelent az idősor valószínűségi struktúrájára nézve az idősor statisztikai kezelhetőségének érdekében.
- Cél: adott minta alapján az ismeretlen határeloszlás rekonstruálása, azaz az egyes időpontokhoz tartozó valószínűségi változók együttes eloszlását kellene megadnunk.
- Lehetetlen feladat a gyakorlatban, hiszen csak egyetlen mintánk van! Ezért megkötéseket teszünk az együttes eloszlásra a kezelhetőség érdekében.

$\Longrightarrow$ **STACIONARITÁS FOGALMA**

Stacionaritás

Definíció 1.

Az (Y_t) idősor ***erős értelemben stacionárius****, ha minden véges dimenziós vetületének együttes eloszlása eltolásinvariáns. Azaz $\forall k \geq 1$ esetén $\forall t_1, \ldots, t_k$ indexhalmazra $(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_k})$ és $(Y_{t_1+h}, \ldots, Y_{t_k+h})$ eloszlása megyezik bármely $h \in \mathbb{R}$ esetén.*

Túl sokat követel, a gyakorlatban ellenőrizhetetlen ez a feltétel, így gyengítünk rajta.

Definíció 2.

Az (Y_t) idősor ***gyenge értelemben stacionárius****, ha első- és második momentuma eltolásinvariáns, azaz $\mathrm{E}Y_t = m$ minden t esetén, és $\gamma(t,s) =$Cov$(Y_t, Y_s) = \gamma(t-s)$ bármely t, s pár esetén.*

Nyilvánvaló, hogy gyengén stacionárius idősor esetén $D^2(Y_t) = \sigma^2$ konstans minden t esetén.

Példa

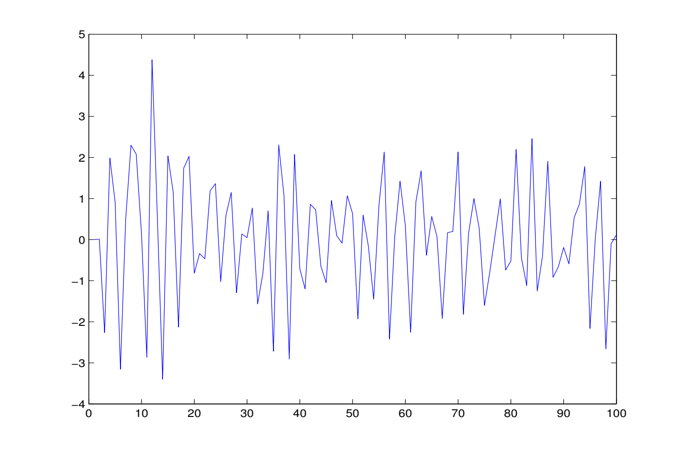

Figure: Példa stacionárius idősorra az $y_t = 0,5y_{t-1} + 0,7y_{t-2} + u_t$, $u_t \sim N(0,3)$ stacionárius specifikációból

Példa

Legyen

$$Y_{t+1} = \alpha Y_t + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{N},$$

ahol $Y_0 = \xi$ valószínűségi változó, (ε_t) pedig i.i.d. sorozat 0 várható értékkel és konstans σ szórással. Milyen feltételek mellett lesz a folyamat stacionárius?
Megoldás: Iterálva az egyenletet adódik, hogy

$$Y_{t+1} = \alpha Y_t + \varepsilon_t = \alpha(\alpha Y_t + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \ldots = \sum_{k=0}^{t} \alpha^k \varepsilon_{t-k} + \alpha^{t+1} Y_0.$$

Tehát

$$\mathrm{E}Y_{t+1} = \alpha^{t+1} \mathrm{E}Y_0,$$

ami akkor lesz t-től független, ha vagy $\alpha = 1$ vagy $\mathrm{E}Y_0 = 0$. Az $\alpha = 1$ eset a véletlen bolyongás esete, ezzel most nem foglalkozunk. Tehát azt kell feltennünk, hogy $\mathrm{E}Y_0 = 0$, és ekkor $\mathrm{E}Y_t = 0$ minden t esetén.

Példa

Másrészt

$$\mathrm{E}Y_{t+1}^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^{t} \alpha^{2k} + \alpha^{2t+2}\mathrm{E}Y_0^2$$

és

$$\mathrm{E}Y_t^2 = \sigma^2 \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^{2k} + \alpha^{2t}\mathrm{E}Y_0^2.$$

Így az $\mathrm{E}Y_{t+1}^2 = \mathrm{E}Y_t^2$ egyenlőség minden t esetén akkor áll fenn, ha

$$\alpha^{2t}\mathrm{E}Y_0^2 = \alpha^{2t+2}\mathrm{E}Y_0^2 + \sigma^2\alpha^{2t},$$

azaz

$$\mathrm{E}Y_0^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}$$

feltéve, hogy $|\alpha| < 1$. Azaz $\mathrm{E}Y_t = 0$ és $|\alpha| < 1$ szükséges a gyenge stacionaritáshoz, és ekkor

$$\mathrm{E}Y_t^2 = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2} \quad \forall t \in T.$$

Példa

Vajon elegendő is ez a feltétel a gyenge stacionaritáshoz? Ehhez a

$$\gamma_k = Cov(Y_t, Y_{t+k})$$

autokovariancia függvény eltolásinvarianciáját kell vizsgálnunk.

Mivel

$$\mathrm{E}(Y_{t+k}Y_t) = \alpha^k \mathrm{E}Y_t^2 + \mathrm{E}[Y_t(\varepsilon_{t+k-1} + \alpha\varepsilon_{t+k-2} + \ldots + \alpha^{k+1}\varepsilon_t)] =$$

$$= \alpha^k \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2},$$

ami valóban csak k függvénye, tehát a feltétel elegendő is.

Stacionaritási jellemzők becslése a mintából

Csak sokasági szemléletben becsülhetők, a mintából történő becslésük reménytelen, ezért fontos a stacionaritás kérdése!

- várható érték becslése: a szokásos tapasztalati mintaátlag ($\hat{\mu}$)
- szórásnégyzet becslése: a szokásos tapasztalati szórásnégyzet ($\hat{\sigma_2}$)
- kovariancia becslése: az autokovariancia függvény tapasztalati úton való becslésével, azaz

$$\hat{\gamma_k} = \frac{1}{T-k} \sum_{t=1}^{T-k} (y_t - \hat{\mu})(y_{t+k} - \hat{\mu})$$

- Korreláció becslése: a

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma_k}}{\hat{\sigma_2}}$$

tapasztalati autokorreláció (ACF) függvény segítségével.

ACF - Korrelogram

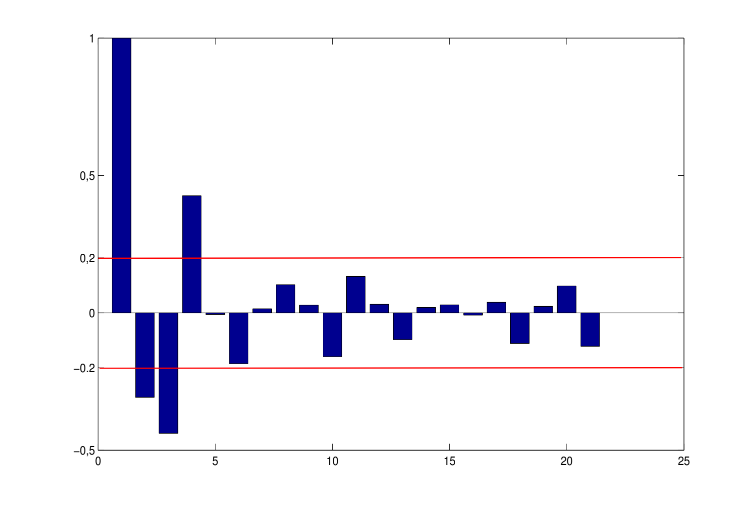

Figure: Példa stacionárius idősor autokorreláció függvényére

Parciális autokorreláció függvény - PACF

Parciális korreláció: két változó közötti kapcsolat erőssége akkor, ha közöttük a megadott változókon keresztül terjedő hatásokat kiszűrjük.

A két változónk most két különböző időpont, a kiszűrt változók pedig a két időpont közötti időpontok (mint v.v-k).

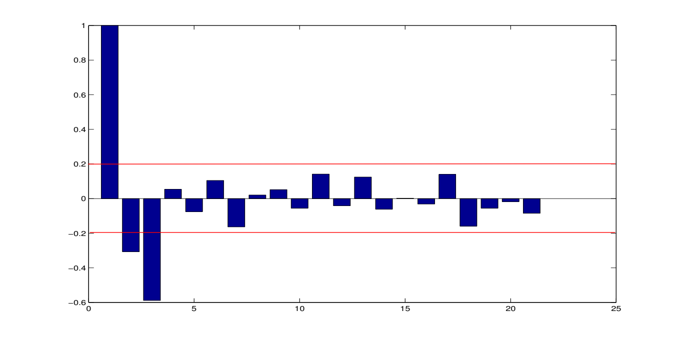

Figure: Példa stacionárius idősor parciális autokorreláció függvényére

ACF szignifikanciájának tesztelése

A statisztikai próba hipotétisei:

$$\mathrm{H}_0 : \ \rho_k = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{H}_1 : \ \rho_k \neq 0$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy a normális eloszlással való közelítés megfelelő lesz, így a próbastatisztika

$$\frac{\hat{\rho}_k}{1/\sqrt{T}} \sim N(0,1).$$

Elfogadási tartomány:

$$[-z_{1-\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}]$$

A korrelogram ábrájáról könnyen leolvasható, hogy a kapott autokorrelációs értékek ebbe a sávba esnek-e, vagy sem.

ACF szignifikanciájának tesztelése

Az előző módszer persze csak egyenkénti vizsgálatra jó! Ha egyszerre tekintjük az összes együttható szignifikanciáját, akkor az elsőfajú hibák kumulálódása miatt erejét veszti a teszt! Helyette tehát összetettebb tesztet kell alkalmaznunk.

A statisztikai próba hipotézisei:

$$\mathrm{H}_0 : \ \rho_1 = \ldots = \rho_k = 0 \quad \text{és} \quad \mathrm{H}_1 : \ \exists i : \ \rho_i \neq 0$$

A legnépszerűbb statisztikai teszt a fenti nullhipotézis ellenőrzésére az ún. Ljung-Box teszt, melynek tesztstatisztikája és eloszlása:

$$Q = T(T+2) \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} \sim \chi_k^2$$

MOL ACF

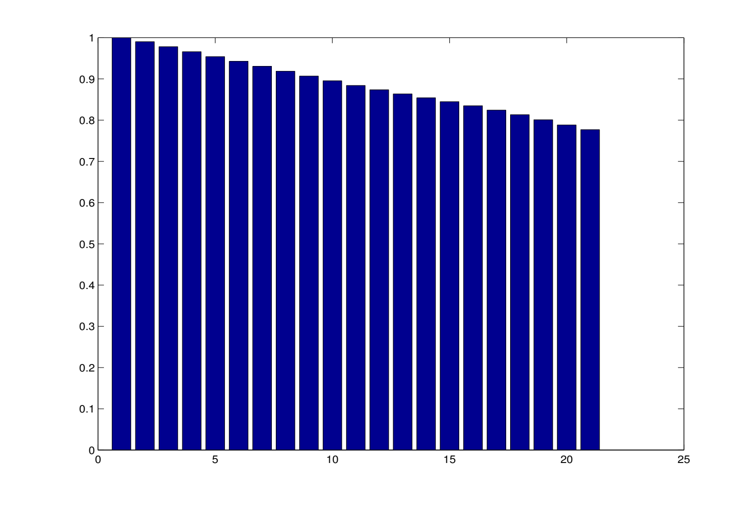

Figure: A MOL idősor autokorreláció függvénye

Stacionaritás ellenőrzése

- az idősor grafikus vizsgálata (pl. trendet tartalmazó idősor nyilvánvalóan megsérti a gyenge stacionaritás várható értékének állandóságára vonatkozó feltételét)
- a korrelogram lecsengésének vizsgálata (stacioner idősorok esetén a korrelogram tipikusan lecsengő, míg nem-stacioner esetben ez nem teljesül)
- statisztikai tesztek a stacionaritás vizsgálatára (Dickey-Fuller és augmented Dickey-Fuller tesztek) - ezen tesztek tárgyalásával később fogunk foglalkozni

Két fő feladat

Alapmodellünk a következő lesz:

$$Y_t = \underbrace{\underbrace{T_t}_{trend} + \underbrace{C_t}_{ciklus} + \underbrace{S_t}_{periódus}}_{determinisztikus\ komponensek} + \underbrace{u_t}_{stacionárius\ komponens} \quad , \quad t \in \{1, \ldots, T\}$$

Tehát két fő feladatunk van:

1. Nem-stacionárius idősort alkalmas transzformációval stacionáriussá tenni
   - trend szűrés - determinisztikus és sztochasztikus eset
   - szezonalitás szűrés
   - periodicitás szűrés
2. Stacionárius idősorok modellezése, becslése és előrejelzése
   - Lineáris modellek: AR, MA és ARMA
   - Nemlineáris modellek: ARCH és GARCH

Determinisztikus trend szűrése - 1. módszer

Mozgó átlagolás: a trendet az eredeti idősor dinamikus átlagaként állítjuk elő. Tegyük fel, hogy idősorunk T hosszú, és legyen k a mozgó ablak szélessége. Képezzük ekkor az

$$\bar{Y}_1 = \frac{Y_1 + \ldots + Y_k}{k}$$
$$\bar{Y}_2 = \frac{Y_2 + \ldots + Y_{k+1}}{k}$$
$$\vdots$$
$$\bar{Y}_{T-k+1} = \frac{Y_{T-k+1} + \ldots + Y_T}{k}$$

átlagokat. Az átlagolás hatására eltűnik mind a véletlen hatás, mind a szezonális ingadozás az adatsorból, a mozgó átlagok pedig a trend közelítő értékeit adják. Ezeket az értékeket kivonva az eredeti idősorból a trendhatás megszűnik.

Determinisztikus trend szűrése - 2. módszer

Analitikus trendszámítás: az idősor grafikonja alapján választjuk a trendfüggvény alakját, majd ennek ismeretlen paramétereit a legkisebb négyzetek módszerével becsüljük. Néhány speciális eset:

- lineáris trend: $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t$ alakban keresendő (egyenletes fejlődés)
- polinomiális trend: $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t + \ldots + b_n t^n$ alakban keresendő (változó intenzitású fejlődés)
- exponenciális trend: $\hat{y}_t = b_0 b_1^t$ alakban keresendő (relatív változás állandóságának feltételezése esetén)
- hiperbolikus trend: $\hat{y}_t = \frac{1}{b_0 + b_1 t}$ alakban keresendő (halálozási arányszámok)
- logisztikus trend: $\hat{y}_t = \frac{k}{1 + be^{-at}}$ alakban keresendő (népesség-növekedés, gyártási adatsorok)

Összességében a determinisztikus trendet tartalmazó idősorokat trendstacioner folyamatoknak nevezzük.

Sztochasztikus trend szűrése

Ebben az esetben az előző módszerek már nem működnek.

Új trükk: differenciázás művelete, mely egy új, transzformált idősort képez az eredeti idősor t-edik és $(t-1)$-edik elemének különbségeként.

Például, ha az idősorunk

$$Y_t^{(S)} = \alpha + Y_{t-1}^{(S)} + X_t, \quad Y_0 = 0$$

alakú, ahol X_t maga stacionárius folyamat, akkor

$$Y_t' = Y_t^{(S)} - Y_{t-1}^{(S)}$$

a differenciázott folyamat, mely már stacionárius lesz.

Sztochasztikus trend szűrése

Mire jó ez?

Sztochasztikus lineáris trend szűrésére jó, de másfajta trendfüggvényt nem tud kiszűrni az adatokból. Magasabbrendű trendfüggvények kezelésére a többszöri differenciázás művelete lesz a megoldás.

Definíció 3.

Egy idősort d-ed rendben integrált idősornak nevezünk, ha d-ed rendű differenciázottja már stacionárius idősor. Jele: $I(d)$.

Természetesen mint mindent, úgy ezt is, a korábban már említett statisztikai tesztek (DF és ADF tesztek) segítségével igazolni kell. Ezekről majd később lesz szó.

Példa

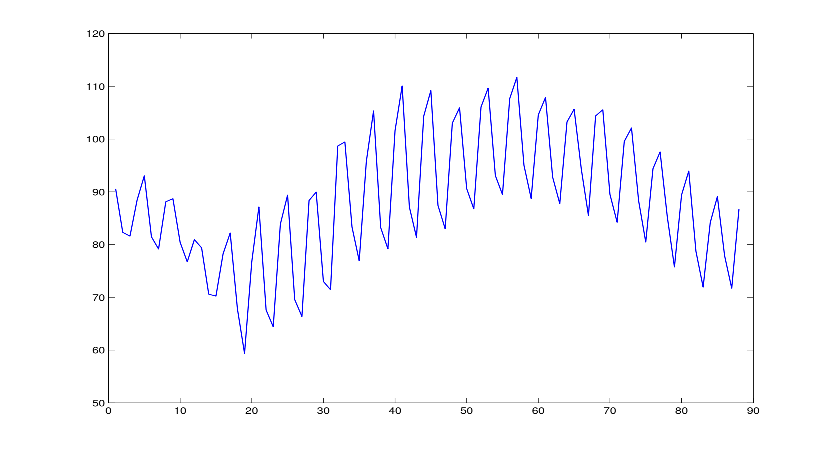

Figure: Villamosenergia adatok

Szezonális hullámzások szűrése

Tegyük fel, hogy idősorunkban trendhatás már nem érvényesül. Ekkor a modellünk

$$Y_{ij} = \bar{Y} + d_j + X_{ij}$$

alakú, ahol X_{ij} stacionárius véletlen hatás, d_j a szezonális komponens, és

$$\bar{Y} = \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} Y_{ij},$$

ahol n a periódusok száma (pl. évek), m pedig az ezen belüli szakaszok (pl. hónapok, negyedévek) száma. A véletlen hatás kiküszöbölése érdekében szezononként átlagolunk:

$$\bar{Y}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_{ij}.$$

Ekkor $\bar{Y}_j = \bar{Y} + \hat{d}_j$, azaz a szezonális eltérés becslése nem más, mint az $\bar{Y}_j - \bar{Y}$ különbség.

LINEÁRIS MODELLEK

Lineáris modellek - AR(p)

Jelölje z az időeltolás operátorát, azaz $zx_t = x_{t-1}$ bármely t esetén. Ekkor $z^j x_t = x_{t-j}$, és bármely $A(s) = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i s^i$ polinomra

$$A(z)x_t = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i x_{t-i}$$

Tegyük fel mostantól, hogy a folyamat mindig 0 várható értékű.

Definíció 4.

Az (ε_t), $t \in \mathbb{Z}$ v.v-sorozatot fehérzajnak nevezzük, ha $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$, $D^2(\varepsilon_t) = \sigma^2$ $\forall t$, *és* $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, *ha* $t \neq s$.

Definíció 5.

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ folyamat ***AR(p) folyamat****, ha előáll*

$$X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} = \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

alakban, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ paraméterek, (ε_t) pedig fehérzaj folyamat.

Lineáris modellek - AR(p)

Könnyen látható, hogy az

$$A(s) = 1 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p$$

jelöléssel a folyamat az $A(z)X_t = \varepsilon_t$ kompakt alakban is felírható, ahol z az időeltolás operátora.

Tétel 1.

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ $AR(p)$ folyamat stacionárius, ha az $A(s)$ polinom gyökei az egységkörön kívülre esnek.

Mivel a folyamat 0 várható értékű, így az autokovarianciák kiszámításához csak a

$$\mathrm{Cov}(X_{t-k}, X_t) = \mathrm{E}(X_{t-k}X_t) = \gamma_k$$

értékeket kell meghatároznunk $k \geq 0$ esetén, hiszen γ szimmetrikus, azaz $\gamma_k = \gamma_{-k}$.

Lineáris modellek - AR(p)

A folyamatot meghatározó (1) egyenletet megszorozva X_{t-k}-val, majd várható értéket véve az alábbi, ún. *Yule-Walker egyenletrendszer* adódik:

$$
\begin{aligned}
k = 0: &\quad \gamma_0 + \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_p\gamma_p = \sigma^2 \\
k = 1: &\quad \gamma_1 + \alpha_1\gamma_0 + \ldots + \alpha_p\gamma_{p-1} = 0 \\
\vdots & \\
k = p: &\quad \gamma_p + \alpha_1\gamma_{p-1} + \ldots + \alpha_p\gamma_0 = 0 \\
k > p: &\quad \gamma_k = -\alpha_1\gamma_{k-1} - \ldots - \alpha_p\gamma_{k-p}
\end{aligned}
$$

Az egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg, ha az $A(s)$ polinomnak nincs 1 abszolútértékű gyöke.

Lineáris modellek - AR(p)

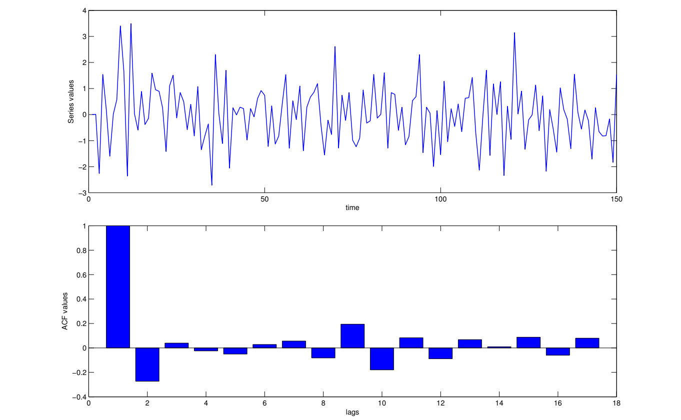

Figure: AR(2) folyamat és autokorreláció függvénye

Lineáris modellek - MA(q)

Fehérzajból egyszerűen kikeverhető folyamatok.

Definíció 6.

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ folyamat ***MA(q) folyamat****, ha előáll*

$$X_t = \beta_0 \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

alakban, ahol $\beta_0, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ paraméterek, (ε_t) pedig fehérzaj folyamat σ_ε szórással.

Erős és gyenge értelemben is stacionárius a folyamat, továbbá

$$k = 0: \quad \gamma_0 = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{j=0}^{q} \beta_j^2$$

$$0 < k \leq q: \quad \gamma_k = \sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{j=0}^{q-k} \beta_j \beta_{j+k}$$

$$k > q: \quad \gamma_k = 0$$

Lineáris modellek - MA(q)

Azt kaptuk tehát, hogy a $(\beta_0, \dots, \beta_q)$ paraméterek egyértelműen meghatározzák a $(\gamma_0, \dots, \gamma_q)$ sorozatot. Igaz-e ez fordítva is?

Tekintsük ehhez a következő két folyamatot:

$$X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z},$$
$$Y_t = \beta\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Ekkor nyilván $\beta \neq 1$ esetén a két folyamat különbözik, viszont autokovariancia függvényükre ugyanaz a

$$\gamma_0 = 1 + \beta^2, \quad \gamma_1 = \beta, \quad \gamma_k = 0,\ k \geq 2$$

előállítás adódik, tehát az állítás megfordítása már nem igaz.

Lineáris modellek - MA(q)

Viszgáljuk még egy kicsit az előbbi két folyamatot. Visszafejtve a rekurziókat adódik, hogy egyrészt

$$\varepsilon_t = X_t - \beta\varepsilon_{t-1} = X_t - \beta(X_{t-1} - \beta\varepsilon_{t-2}) = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\beta^k X_{t-k},$$

másrészt

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\beta}(Y_t - \varepsilon_{t-1}) = \frac{1}{\beta}\left(Y_t - \frac{1}{\beta}(Y_{t-1} - \varepsilon_{t-2})\right) = \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\beta^{k+1}}Y_{t-k}.$$

Mindkét esetben akkor létezik az előállítás, ha a jobb oldali sor konvergens. Ez az első esetben a $|\beta| < 1$ feltételt, míg a második esetben a $|\beta| > 1$ feltételt jelenti.

Lineáris modellek - MA(q)

Azaz β értékétől függ, hogy melyik folyamatból tudjuk a fehérzajt rekonstruálni. Ez a megfigyelés vezet el a mozgóátlag folyamatok egy fontos tulajdonságához.

Definíció 7.

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ MA(q) folyamat ***invertálható****, ha a*

$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_q s^q$$

polinom gyökei az egységkörön kívülre esnek.

Tétel 2 (Wold).

Ha valamely $(\gamma_0, \ldots, \gamma_q)$ sorozathoz létezik olyan $(\beta_0, \ldots, \beta_q)$ sorozat, melyre az autokovariancia egyenletek teljesülnek, akkor létezik olyan MA(q) folyamat, melynek éppen ez a $(\gamma_0, \ldots, \gamma_q)$ sorozat az autokovariancia függvénye. Továbbá ha valamely (X_t) folyamatra $\gamma_k = 0$ $k \geq q$ esetén, akkor (X_t) MA(q) folyamat.

Lineáris modellek - MA(q)

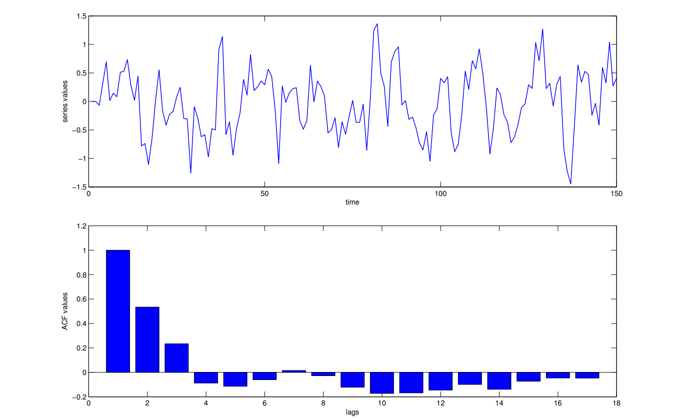

Figure: MA(3) folyamat és autokorreláció függvénye

Lineáris szűrők

Definíció 8.

Legyen adott egy ψ_j, $j \in \mathbb{Z}$ sorozat, melyre $\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\psi_j| < \infty$. Az

$$Y_t = Y_t(\psi, X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j X_{t-j}$$

folyamatot az X_t gyengén stacionárius folyamatból a ψ_j-k által adott lineáris szűrővel definiált folyamatnak nevezzük.

Ha $\psi_j = 1$, $j < 0$, akkor a szűrő kauzális, avagy fizikailag megvalósítható.

Pl.: az MA(∞) folyamatok éppen azok, melyek előállnak fehérzajra alkalmazott szűrő kimeneteként.

Lineáris szűrők - Példa

Tekintsük az alábbi

$$X_{t+1} = \alpha X_t + \varepsilon_{t+1}$$

AR(1) folyamatot, ahol (ε_t) fehérzaj, $|\alpha| < 1$. Láthatóan

$$(1 - \alpha z)X_t = \varepsilon_t,$$

azaz formálisan felírhatjuk, hogy

$$X_t = \frac{1}{1 - \alpha z}\varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i z^i \varepsilon_t = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i \varepsilon_{t-i}$$

a geometriai sor összegképletét felhasználva, vagyis megkaptuk az MA(∞) előállítást.

Ezt a módszert általánosabb folyamatokra is kiterjesztjük, mellyel a mérnöki gyakorlat egyik legfontosabb stacionárius folyamat-osztályához jutunk.

Lineáris modellek - ARMA(p, q)

Definíció 9.

Az $(X_t, t \in \mathbb{Z})$ *folyamat* ***ARMA***(p, q) ***folyamat****, ha előáll*

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \ldots + \alpha_p X_{t-p} + \beta_0 \varepsilon_t + \ldots + \beta_q \varepsilon_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

alakban, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_0, \ldots, \beta_q \in \mathbb{R}$ *paraméterek,* (ε_t) *pedig fehérzaj folyamat.*

Könnyen látható, hogy az

$$A(s) = 1 - \alpha_1 s - \ldots - \alpha_p s^p$$
$$B(s) = \beta_0 + \beta_1 s + \ldots + \beta_q s^q$$

polinomok segítségével az

$$A(z)X_t = B(z)\varepsilon_t$$

kompakt forma adódik.

Lineáris modellek - ARMA(p, q)

A fenti előállítás persze ebben a formában nem egyértelmű, hiszen mindkét oldalra alkalmazva egy alkalmas polinomot, ugyanannak a folyamatnak egy másik előállítását kapjuk. Ennek elkerülése végett feltesszük, hogy

A és B relatív prímek a valós együtthatós polinomok számtestje felett.

Tétel 3.

1. *Ha $A(z)$ gyökei az egységkörön kívülre esnek, akkor létezik a (3) egyenletnek eleget tevő (X_t) folyamat olyan, melynek van kauzális MA(∞) előállítása. Az ilyen ARMA folyamatokat stabil folyamatoknak nevezzük.*
2. *Ha $B(z)$ gyökei az egységkörön kívülre esnek, akkor (X_t) invertálható és létezik AR(∞) előállítása.*

Lineáris modellek - ARMA(p, q)

Az autokovarianciák előállításához legyenek

$$c_k = \mathrm{E}(X_t X_{t-k}) \quad \text{és} \quad d_k = \mathrm{E}(X_t \varepsilon_{t-k}).$$

Ekkor $d_k = 0$, ha $k < 0$, hiszen X_t nem függ a jövőtől, továbbá

$$\begin{aligned}
k = 0 : &\quad d_0 = \beta_0 \\
k = 1 : &\quad d_1 = \alpha_1 d_0 + \beta_1 \\
&\quad \vdots \\
k = p : &\quad d_p = \alpha_1 d_{p-1} + \ldots + \alpha_p d_0 + \beta_p
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
k = 0 : &\quad c_0 = \alpha_1 c_1 + \ldots + \alpha_p c_p + \beta_0 d_0 + \ldots + \beta_q d_q \\
k = 1 : &\quad c_1 = \alpha_1 c_0 + \ldots + \alpha_p c_{p-1} + \beta_1 d_0 + \ldots + \beta_q d_{q-1} \\
&\quad \vdots \\
k = q : &\quad c_q = \alpha_1 c_{q-1} + \ldots + \alpha_p c_{q-p} + \beta_q d_0 \\
k > q : &\quad c_k = \alpha_1 c_{k-1} + \ldots + \alpha_p c_{k-p}
\end{aligned}$$

Lineáris modellek - ARMA(p, q)

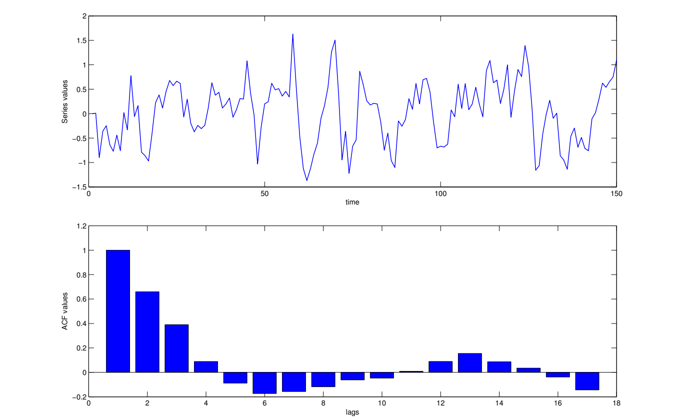

Figure: ARMA$(2, 3)$ folyamat és autokorreláció függvénye