Markov láncok 2.

13-14. előadás

Diszkrét idejű tömegkiszolgálási modellek
Poisson folyamat
Folytonos idejű Markov láncok
Folytonos idejű sorbanállási modellek

2018. november 26. és december 3.

Bevezetés

A diszkrét idejű Markov láncok elméletében tanultak gyakorlati alkalmazhatóságáról szeretnénk egy klasszikus példát mutatni.

- A modellben az időt egységekre osztjuk.
- A kiszolgálóhoz tartozó sorban tetszőlegesen nagy számú igény várakozhat,
- a szolgáltatáshoz való hozzáférés érkezési sorrendben történik (FIFO).
- A rendszer tervezőjét a várakozási sor hosszának alakulása,
- a felhasználókat az igények várakozási ideje érdekli.

Evolúciós egyenlet a sorhosszra

Tegyük fel, hogy a rendszerben a kezdő (nulladik) időpillanatban X_0 igény van. Jelölje

- X_n a sorhosszt az n-dik időpillanat végén
- Y_n az n-dik időegységben érkezett új igények számát
- V_n az n-dik időegységben a rendszer által kiszolgálni képes igények számát.

Tegyük fel, hogy Y_n és V_n i.i.d. sorozatok, egymástól függetlenek, és az (Y_n, V_n) pár független X_0-tól. Feltesszük azt is, hogy az n-dik időpillanatban érkező igényeket csak a következő időegység alatt lehet kiszolgálni. Világos, hogy $S = \mathbb{N}$.

Ekkor a sorhossz változását az

$$X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$$

evolúciós egyenlet írja le, ahol $a^+ = \max(a, 0)$.

Stabilitás

Állítás 1.

X_n homogén Markov lánc, átmenetvalószínűségeire pedig

$$p_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i) = P((X_0 - V_1)^+ + Y_1 = j | X_0 = i) =$$

$$= P((i - V_1)^+ + Y_1 = j)$$

Tétel 1.

Ha a Π átmenetvalószínűség mátrixban a fő- és mellékátlóbeli elemek mind pozitívak, továbbá

$$\mathrm{E}(Y_1) < \mathrm{E}(V_1) < \infty$$

(azaz átlagosan több igényt tud kiszolgálni a rendszer, mint amennyi érkezik), akkor az X_n Markov lánc stabil.

A stacionárius eloszlás a szokásos $p = p\Pi$ egyenletből számolható.

Példa - Bináris eset

Legyen

$$P(V_n = 1) = p = 1 - P(V_n = 0), \quad 0 < p < 1,$$

$$P(Y_n = 1) = q = 1 - P(Y_n = 0), \quad 0 < q < 1.$$

Ekkor

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a & r & b & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & r & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & r & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

ahol

- $a = (1-q)p$ (0 igény érkezik, 1 kiszolgálás)
- $b = (1-p)q$ (1 igény érkezik, 0 kiszolgálás)
- $r = 1 - a - b$ (maradék).

A lánc stabil, ha $q = \mathrm{E}(Y_1) < \mathrm{E}(V_1) = p$.

Példa - Bináris eset

A stacionárius eloszlás meghatározásához a $w = w\Pi$ egyenletet kellene megoldanunk, de ez most egy ∞ sok egyenletből álló rendszer...

Ennek ellenére mégis megoldható (a speciális struktúra miatt), megoldásként pedig azt kapjuk, hogy

$$w_0 = 1 - \frac{q}{p}, \quad \text{és} \quad w_i = w_0 \cdot \frac{q}{a}\left(\frac{b}{a}\right)^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

A stacionárius állapotban tehát a sorhossz várható értéke

$$\mathrm{E}(X_\infty) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot w_k = \frac{(1-q)q}{p-q}.$$

Bináris esetben a sorhossz várható értéke

Bináris (V_n) sorozat esetén a stacionárius eloszláshoz tartozó első momentum, vagyis a sorhossz várható értéke, általános esetben is meghatározható:

Tétel 2.

Ha a stacionárius eloszláshoz tartozó második momentum véges és V_n bináris, akkor

$$\mathrm{E}(X_\infty) = \frac{\mathrm{E}(Y_1)(1 - 2\mathrm{E}(Y_1)) + \mathrm{E}(Y_1^2)}{2(\mathrm{E}(V_1) - \mathrm{E}(Y_1))}$$

Késleltetés

A felhasználók persze nem a sor hosszára, hanem a rendszer átlagos feldolgozó képességére kíváncsiak. Szeretnénk tehát most kiszámítani az igények átlagos késleltetését, azaz azt az időt, melyet a rendszerben töltenek. Jelölje

- D_n az első n időegységben beérkezett igények késleltetését,
- R_n az ezen idő alatt beérkezett igények számát

Ekkor az átlagos késleltetést a

$$\bar{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{D_n}{R_n}$$

sztochasztikus határérték definiálja, amennyiben létezik.

Állítás 2 (Little-formula).

Ha Y_n i.i.d. sorozat, akkor

$$\bar{D} = \frac{\mathrm{E}(X_\infty)}{\mathrm{E}(Y_1)}$$

POISSON-FOLYAMAT

Poisson folyamat

Gyakorlati alkalmazásokban sűrűn előfordul a Poisson eloszlás: sok, kis várható értékű, független esemény eloszlásaként azonosítottuk a valószínűségszámítási tanulmányaink elején. Emlékeztetőül az eloszlás:

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ \lambda > 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \quad \mathrm{E}\xi = \lambda, \ D^2\xi = \lambda$$

Azt is láttuk, hogy ez az eloszlás megjelenik mint a binomiális eloszlás határértéke bizonyos feltételek mellett.

Tömegkiszolgálási problémákban a bizonyos idő alatt keletkezett igények száma ugyanilyen okok miatt általában Poisson eloszlású.

Ezért fogunk most mi is ilyen eloszlású folyamatokkal foglalkozni.

Poisson folyamat

Definíció 1.

Legyen $\{T_i\}_{i\in\mathbb{R}}$, $T_{i-1} < T_i < T_{i+1}$ *egy, a valós számegyenesen elhelyezkedő, véletlen pontsorozat. Pontfolyamatnak nevezzük az ebből az*

$$X_t = \sharp\{i : 0 \leq T_i < t\} \quad (t > 0)$$

összefüggéssel kapott folytonos idejű sztochasztikus folyamatot, ahol a $\sharp$ *operátor az utána álló halmaz elemeinek számát adja meg, azaz* X_t *a* $[0, t)$ *intervallumba eső pontok száma.*

Definíció 2.

Legyen $\lambda > 0$ *rögzített.* λ *intenzitású homogén Poisson folyamatnak nevezünk egy olyan pontfolyamatot, melyre* X_t *eloszlása Poisson*(λt)*, továbbá a folyamat független és stacionárius növekményű.*

Poisson folyamat

Azaz

1. $X_0 = 0,\ P(X_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ (t > 0,\ k \in S)$
2. minden $n \geq 2$ egészre és $0 < t_1 < \ldots < t_n$ sorozatra az
$$X_{t_1} - X_0,\ X_{t_2} - X_{t_1},\ \ldots,\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$
v.v-k teljesen függetlenek (független növekményűség)
3. minden $s, t < 0$ esetén az
$$X_t - X_0 \quad \text{és} \quad X_{t+s} - X_s$$
v.v-k eloszlása megegyezik (stacionárius növekményűség).

Könnyen ellenőrizhető, hogy $X_t - X_s$ eloszlása Poisson$(\lambda(t-s))$, továbbá
$$m_t = \mathrm{E}(X_t) = \lambda t \quad (t \geq 0),$$
azaz λ megadja az egységnyi idő alatt érkező igények átlagos számát.

Hogyan hozhatunk létre olyan véletlen pontsorozatot, amely által meghatározott pontfolyamat Poisson folyamat?

Tétel 3.

Legyen $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ *egymástól független,* λ *paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k sorozata, és a* $\{T_k\}$ *véletlen pontsorozatot definiálja a*

$$T_k = \sum_{j=1}^{k} Y_j \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

összefüggés. Ekkor a generált $(X_t, t \geq 0)$ *pontfolyamat* λ *intenzitású Poisson folyamat.*

Tehát, ha független $\exp(\lambda)$ eloszlású időközönként érkeznek az igények (azaz átlagosan $1/\lambda$ időegységenként), akkor a t-ig beérkező igények X_t száma Poisson(λt) eloszlású (azaz időegységenként átlagosan λ igény érkezik).

Poisson folyamat

Igaz a tétel megfordítása is, azaz belátható, hogy λ intenzitású homogén Poisson folyamat esetén a pontok távolságai független, λ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k.

Ebből az következik, hogy ez a tulajdonság egyértelműen jellemzi a Poisson folyamatot és annak lehetséges ekvivalens definíciójaként szolgálhat.

A Poisson folyamat további tulajdonságai

Definíció 3.

Legyen $f(t)$ és $g(t)$ két, a nulla valamely jobb oldali környezetében értelmezett valós függvény olyan, hogy a 0-ban léteznek a jobb oldali határértékek. Azt mondjuk, hogy $t \to 0+$ esetén $f(t) = o(g(t))$, ha

$$\lim_{t \to 0+} \frac{f(t)}{g(t)} = 0.$$

Tétel 4.

Legyen $(X_t, t \geq 0)$ λ intenzitású Poisson folyamat. Ekkor

- $P(X_t = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$
- $P(X_t = 1) = \lambda t + o(t)$ *(sűrűségi feltétel)*
- $P(X_t \geq 2) = o(t)$ *(ritkasági feltétel).*

A Poisson folyamat további tulajdonságai

Azaz kicsi annak a valószínűsége, hogy egy rövid intervallumba legalább két pont esik, míg annak a valószínűsége, hogy pontosan egy pont esik ide, kürölbelül az intervallum hosszának λ-szorosa.

A tétel megfordításával kapjuk a korábban már említett ekvivalens definíciót a Poisson folyamatra:

Tétel 5.

Ha az $(X_t, t \geq 0)$ pontfolyamatra teljesül a sűrűségi és ritkasági feltétel, valamint független és stacionárius növekményű a folyamat, akkor a folyamat λ intenzitású homogén Poisson folyamat.

FOLYTONOS IDEJŰ MARKOV LÁNCOK

Folytonos idejű Markov lánc

Legyen $(X_t, t \geq 0)$ a nemnegatív számegyenesen értelmezett folyamat, továbbá $S = \{1, 2, \ldots\}$.

Definíció 4.

Az X_t folyamatot folytonos idejű Markov láncnak nevezzük, ha minden $n \geq 1$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ és $x_0, x_1, \ldots, x_n$ esetén

$$P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = x_0) =$$

$$= P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}),$$

amennyiben a feltételes valószínűségek léteznek.

Továbbra is csak homogén láncokkal foglalkozunk, azaz

$$p_{ij}(t) = P(X_{t+s} = j | X_s = i) \quad (i, j \in S, t \geq 0)$$

A homogén Poisson folyamat folytonos idejű homogén ML.

Folytonos idejű Markov lánc

A folytonos idejű Markov láncokra is érvényes a Chapman-Kolmogorov egyenlet, azaz

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(s) p_{kj}(t)$$

Az átmenetmátrixra bevezetve a $\Pi(t) = [p_{ij}(t)]$ jelölést adódik, hogy

$$\Pi(s+t) = \Pi(s)\Pi(t) = \Pi(t)\Pi(s) \quad (s, t \geq 0).$$

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \tag{1}$$

Azaz azt szeretnénk, hogy kis idő alatt a folyamat nagy valószínűséggel ugyanabban az állapotban maradjon.

Tétel 6.

Ha egy Markov láncra teljesül (1), akkor a $p_{ij}(t)$ függvények differenciálhatók $t \geq 0$ esetén ($t = 0$ esetén jobbról).

Definíció 5.

Jelölje $q_{ij} = p'_{ij}(0+)$. A

$$\mathbf{Q} = [q_{ij}] = \Pi'(0+)$$

mátrixot a folyamat rátamátrixának vagy infinitezimális generátorának nevezzük.

A Poisson folyamat rátamátrixa $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$.

Folytonos idejű Markov lánc

A rátamátrix jelentőségét az alábbi összefüggésekkel lehet megvilágítani: a definíció alapján

$$q_{ij}t - p_{ij}(t) + \delta_{ij} = o(t),$$

amiből

$$P(X_t = j|X_0 = i) = p_{ij}(t) = q_{ij}t + o(t) \quad (i \neq j)$$

$$P(X_t \neq i|X_0 = i) = 1 - p_{ii}(t) = -q_{ii}t + o(t)$$

$$P(X_t = i|X_0 = i) = p_{ii}(t) = 1 + q_{ii}t + o(t).$$

Azaz az i állapotból a $j \neq i$ állapotba t idő alatt való való átmenet valószínűsége kis t-re közel arányos t-vel, és az arányossági tényező éppen q_{ij}.

Igazolható, hogy az i állapotban eltöltött idő $-q_{ii}$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és a lánc i-ből $j \neq i$ állapotba éppen $-q_{ij}/q_{ii}$ valószínűséggel lép át. A Markov tulajdonság alapján az állapottartási idők függetlenek.

Folytonos idejű Markov lánc

Tegyük fel, hogy a Markov lánc véges állapotterű, azaz $S = \{0, 1, \ldots, N\}$. A láncot stabilnak nevezzük, ha létezik határeloszlása és ez független a kezdeti eloszlástól, azaz ha minden $i, j \in S$ esetén

$$\lim_{t \to \infty} p_{ij}(t) = p_j \quad \text{és} \quad \sum_{j=0}^{N} p_j = 1.$$

Definíció 6.

Az X_t ML irreducibilis, ha minden $i, j \in S$ állapothoz létezik $t_{ij} > 0$ olyan, hogy $p_{ij}(t_{ij}) > 0$.

Tétel 7.

*Ha **Q** mellékátlóbeli elemei mind pozitívak, akkor a Markov lánc irreducibilis.*

Folytonos idejű Markov lánc

Tétel 8.

Folytonos idejű, véges állapotterű, irreducibilis Markov lánc stabil.

A határeloszlás kiszámítására több lehetőségünk is van:

Tétel 9.

Ha $P = \{p_j\}$ egy véges állapotú stabil Markov lánc határeloszlása, akkor minden $t \geq 0$ esetén

$$P = P\Pi(t),$$

továbbá

$$P\mathbf{Q} = 0,$$

ahol 0 *a nullvektort jelöli.*

SZÜLETÉSI ÉS HALÁLOZÁSI FOLYAMATOK

Születési és halálozási folyamatok

Olyan speciális folytonos idejű Markov láncok, melyeknél állapot-átmenet csak a szomszédos állapotokba történhet. Fontos szerepük van a sorbanállási rendszerekben.

Definíció 7.

Egy $(X_t, t \geq 0)$ Markov láncot születési és halálozási folyamatnak nevezünk, ha

1. $p_{ij}(0) = \lim_{t \to 0+} p_{ij}(t) = \delta_{ij}$, $(i, j \in S)$
2. $p_{i,i+1}(t) = \lambda_i t + o(t)$, $(i \in S)$
3. $p_{i,i-1}(t) = \mu_i t + o(t)$, $(i \in S - \{0\})$
4. $p_{i,i}(t) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t)$, $(i \in S)$
5. $\mu_0 = 0$ *és létezik* k, l *olyanok, hogy* $\lambda_k > 0$ *és* $\mu_l > 0$.

Ha minden i *esetén* $\mu_i = 0$*, akkor tiszta születési, ha pedig minden* i *esetén* $\lambda_i = 0$*, akkor tiszta halálozási folyamatról beszélünk.*

Születési és halálozási folyamatok

Az irreducibilitás biztosítása érdekében feltesszük, hogy $\lambda_i > 0$, $(i \in S)$, és $\mu_i > 0$, $(i \in S - \{0\})$. Tegyük még fel azt is, hogy $\sup_{i \in S}(\lambda_i + \mu_i) < \infty$. A rátamátrix

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Jelölje a stacionárius eloszlást $P = \{p_i\}$. Ekkor a $PQ = 0$ egyenletrendszer megoldása

$$p_i = \pi_i p_0, \quad \text{ahol} \quad \pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_i} \quad \text{és} \quad p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i} \, (i \in S).$$

Az i állapot tartási idejének eloszlása $\exp(\lambda_i + \mu_i)$, az $i \to i+1$ átmenet valószínűsége $\lambda_i / (\lambda_i + \mu_i)$, az $i - 1 \to i$ átmenet valószínűsége $\mu_i / (\lambda_i + \mu_i)$.

FOLYTONOS IDEJŰ SORBANÁLLÁSI MODELLEK

Jelölések

A fogalom ugyanaz, mint a diszkrét idejű rendszereknél. Azonban most

- az igények tetszőleges időpillanatban érkezhetnek,
- kiszolgálásuk is bármelyik időpillanatban befejeződhet,
- feltesszük, hogy az egyes igények kiszolgálási idői egymástól és az érkezési folyamattól függetlenek, eloszlásuk megegyezik,
- az igények érkezései között eltelt idő független és azonos eloszlású.

Definíció 8.

Egy pontfolyamatot felújítási folyamatnak nevezünk, ha a szomszédos pontok közötti távolságok független, azonos eloszlású, de egyébként tetszőleges valószínűségi változók.

A Poisson folyamat például olyan felújítási folyamat, melynél a pontok távolságai λ paraméterű exponenciálisok.

Jelölések

Kendall-féle kódrendszer:

$$A/B/m/K/M,$$

ahol

- A a szomszédos igények beérkezési között eltelt idő eloszlásának kódja
- B a kiszolgálási idő eloszlásának kódja
- m a rendszerben lévő kiszolgáló egységek száma
- K a kiszolgálókban és a várakozási sorban álló igények maximális száma
- M az igényforrások száma

A és B lehetséges értékei:

- M - Markovi vagy emlékezet nélküli, azaz exponenciális eloszlás
- D - determinisztikus, azaz konstans eloszlás
- G - általános (tetszőleges) eloszlás.

Bevezető példák

Veszteséges kiszolgálás: $M/M/1/(N+1)$ rendszer, ahol az igények λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek, a kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k. Ha az érkező igény a sort megtelve találja, akkor elvész. - Tipikus alkalmazása a születési és halálozási folyamatoknak a sorhosszra $\lambda_i = \lambda$, $(i = 0, \ldots, N-1)$ és $\mu_i = \mu$, $(i = 1, \ldots, N)$ szereposztással.

Erlang-probléma: $M/M/N/N$ rendszer, ahol az igények λ intenzitású Poisson folyamat szerint érkeznek, de nincsenek sorok, azaz ha egy igény nem talál szabad kiszolgálót, akkor elvész. A kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k. - Tipikus alkalmazása ez is a születési és halálozási folyamatoknak a sorhosszra $\lambda_i = \lambda$, $(i = 0, \ldots, N-1)$ és $\mu_i = i\mu$, $(i = 1, \ldots, N)$ szereposztással.

$M/M/1$ rendszer

Az érkezési folyamat továbbra is λ intenzitású Poisson folyamat, kiszolgálási idők μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k, egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most végtelen állapotú születési és halálozási folyamat $\lambda_i = \lambda$, $(i = 0, \ldots, N-1)$ és $\mu_i = \mu$, $(i = 1, \ldots, N)$ paraméterekkel. Stacionárius esetben a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma

$$\bar{N} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda},$$

a késleltetés pedig

$$\bar{D} = \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

$M/G/1$ rendszer

Az érkezési folyamat továbbra is λ intenzitású Poisson folyamat, de a kiszolgálási idők közös eloszlása tetszőleges nemnegatív értékű v.v. lehet. Egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most már nem lesz feltétlenül Markov lánc. Azonban, ha csak egy-egy igény távozásakor nézzük a sorhosszat, akkor tudunk találni egy diszkrét idejű beágyazott Markov láncot.

Részletes számításokra sajnos nincs elég időnk...
(Laplace-transzformáció, generátorfüggvények és egyebek alkalmazását igényli).

$G/M/1$ rendszer

Az érkezési folyamat tetszőleges felújítási folyamat, a kiszolgálási idők pedig egymástól és az érkezési folyamattól független, μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v-k, egy kiszolgáló egységünk van, de a várakozási sor hossza tetszőlegesen nagy lehet, azaz $K = \infty$.

Az $N(t)$ sorhossz most sem lesz feltétlenül Markov lánc. Azonban, ha csak egy-egy igény érkezésekor nézzük a sorhosszat, akkor tudunk találni egy diszkrét idejű beágyazott Markov láncot.

Részletes számításokra sajnos nincs elég időnk... (Laplace-transzformáció, generátorfüggvények és egyebek alkalmazását igényli).