Matematika A2a - Vektorfüggvények, D kurzusok, 2021/2022/2. félév

Az 1. ZH témakörei – Feladatok

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból! A feladatokat Moodle-platformon, de teremben, tanári felügyelettel kell megoldani, teszt alakban, tehát nem az itt található alakban! Több jó válaszos feladatok lesznek a tesztben (ami nem zárja ki azt sem, hogy némelyik feladatban csak egyetlen jó válasz van). Akinek nincs laptopja vagy nagy kijelzésű tabletje vagy internete, és papír alapú ZH-t szeretne írni, annak a Teams-évfolyamcsoportunkban, a ZH előtt 7 nappal, egy általam kimondottan erre a célra kiírt chatben egy emojival jeleznie kell, hogy szüksége van kinyomtatott ZH (teszt) feladatlapra! Ez határidővel ellátott kiírás, kérem, tartsák be a kinyomtatott ZH igénylésének határidejét! Csak annyi ZH (teszt) feladatlappal megyünk a terembe, ahány jelzés érkezett ezzel kapcsolatosan. Aki papír-alapú ZH-t ír, attól a számításokat/megoldást és a piszkozatokat is bekérjük ellenőrzés céljából.

A ZH előtti napon **Neptun-üzenetet küldünk minden hallgatónak**, aki D kurzuskódú előadást vett fel, melyben megadjuk a másnapi ZH terembeosztását, pontos kezdési idejét (kötelező betartani). **A ZH teszt pontos nevét és jelszavát a teremben kapják meg.**

A ZH ismertető szövege a Moodle-ban kb. a következő lesz:

„A Moodle-ZH megoldásához 45 perc áll rendelkezésére. Mindegyik feladatban akár több helyes és helytelen válasz lehet (előre nem lehet tudni a helyes válaszok számát), de az biztos, hogy a 0 pontot érő „Nem válaszolok" opción kívül van a feladatban legalább egy helyes válasz és legalább egy helytelen válasz is. Ezért fogalmazunk minden feladatban úgy, hogy „Válasszon ki egyet vagy többet", azt értve ezen, hogy az összes helyes választ kéri, csak nem lehet előre tudni, hány válasz helyes: egy vagy több. A kiválasztott helyes válaszokra részpontszámokat kapnak úgy, hogy minden feladatban az összes helyes válasz megtalálása a feladat pontszámának 100%-át éri. A kiválasztott helytelen válaszokra pedig negatív részpontszámok járnak úgy, hogy egy feladaton belül az összes helytelen válasz megtalálása a feladat pontszámának (-100)%-át éri. Tehát ez a szabály azt is jelenti, hogy egy-egy helyes válasz pontértéke csupán attól függ, hogy a feladat hány pontos és hány helyes válasz van az adott feladatban."

A papír-alapú ZH-t íróknál is ez a szabály, csak nem írjuk ki a papírra.

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból! A feladatok Moodle-teszt formájában lesznek megfogalmazva, tehát nem az itt található alakban!

1. **Feladat:** Számítsa ki az

$$\int_3^{\infty} \frac{7x-4}{x^2-3x+2} \quad dx$$

improprius integrált!

Megoldás: Az improprius integrál 1. típusú, hiszen az $x^2-3x+2=0$ megoldásai 1 és 2 nincsenek a $3, \infty)$ intervallumban. Ennek alapján

$$\int_3^{\infty}\frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_3^{\omega}\frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx\,.$$

Parciális törtekre bontással kiszámítjuk a határozatlan integrált:

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2}=\frac{7x-4}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)},$$

ahonnan $A+B=7$ és $-2A-B=-4$, azaz $A=-3$ és $B=10$.

Tehát

$$\frac{7x-4}{x^2-3x+2}=\frac{-3}{x-1}+\frac{10}{x-2}=\frac{10}{x-2}-\frac{3}{x-1},$$

azaz

$$\int\frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx=\int\frac{10}{x-2}\,dx-\int\frac{3}{x-1}\,dx=10\,ln(x-2)-3\,ln(x-1)+c=ln\frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3}+c.$$

A Newton-Leibniz formulát használva írhatjuk, hogy az improprius integrál

$$\int_3^{\infty}\frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_3^{\omega}\frac{7x-4}{x^2-3x+2}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\left[\ln\frac{(x-2)^{10}}{(x-1)^3}\right]_3^{\omega}=$$

$$=\lim_{\omega\to\infty}\left[\ln\frac{(\omega-2)^{10}}{(\omega-1)^3}-\ln\frac{1}{2^3}\right]=\lim_{\omega\to\infty}\left[\ln\frac{\omega^{10}\left(1-\frac{2}{\omega}\right)^{10}}{\omega^3\left(1-\frac{1}{\omega}\right)^3}-\ln\frac{1}{2^3}\right]=+\infty,$$

azaz az improprius integrál divergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely konvergens. Lehet olyan feladat is, melyben az integrandus függvény parciális integrálással számítandó ki és lehet olyan is, melyben a $\mathbf{t}=e^x$ helyettesítést kell használni!

2. **Feladat:** Vizsgálja hányadosteszttel az

$$\int_1^{\infty}\frac{10x+1}{x^5+1}\,dx$$

improprius integrál konvergenciáját!

Megoldás: Felírhatjuk, hogy

$$\frac{10x+1}{x^5+1}\sim\frac{x}{x^5}=\frac{1}{x^4},$$

mert $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{10x+1}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(10x+1)x^4}{x^5+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5\left(10+\frac{1}{x}\right)}{x^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}=10>0$

véges szám.

Az $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}\,dx$ improprius integrál konvergens, ha $p>1$ és divergens, ha $p\le 1$.

Így az $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}\,dx$ improprius integrál konvergens (mivel $p=4>1$), és a hányadostesztet használva kapjuk, hogy az $\int_1^{\infty}\frac{10x+1}{x^5+1}\,dx$ improprius integrál is konvergens.

Megjegyzés: A zh-ban ennél a típusfeladatnál lehet olyan 1. típusú improprius integrál is, amely divergens. Vegyük észre, hogy ehhez a feladathoz tudni kellett, hogy az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ **improprius integrál konvergens, ha $p > 1$ és divergens, ha $p \leq 1$.**

3. **<u>Feladat:</u>** Mutassa meg, hogy az $x + y - 4z = 4$ és a $2x + 2y - 8z = 16$ síkok párhuzamosak és határozza meg a távolságukat!

Megoldás: Jelölje S_1 az $x + y - 4z = 4$, S_2 pedig a $2x + 2y - 8z = 16$ síkot. Az S_1 sík egy normálvektora $\boldsymbol{n_1} = (1,1,-4)$, az S_2 sík egy normálvektora $\boldsymbol{n_2} = (2,2,-8) = 2 \cdot \boldsymbol{n_1}$, így a két sík párhuzamos egymással.
Legyen $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n_1} = (1,1,-4)$ a két sík közös normálvektora. A két sík távolságát kiszámíthatjuk például úgy, hogy veszünk az S_1 síkon egy P_1 pontot, valamint az S_2 síkon egy P_2 pontot és meghatározzuk a $\overrightarrow{P_1P_2}$ $\boldsymbol{n}$ vektorra vett merőleges vetületvektorának a hosszát, ami nem más, mint $\left|\left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right\rangle\right|$, azaz a $\overrightarrow{P_1P_2}$ és az $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$ egységvektor skaláris szorzatának az abszolút értéke.
Legyen például $P_1(0,0,-1) \in S_1$ és $P_2(0,0,-2) \in S_2$. (Érdemes minél több 0-val számolni.)
Ekkor $\overrightarrow{P_1P_2} = (0,0,-1)$. Az $\boldsymbol{n}$ vektor hossza $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{18}$ $\left(= 3\sqrt{2}\right)$, egységvektora pedig $\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)$. A két sík távolsága pedig
$\left|\left\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right\rangle\right| = \left|\left\langle (0,0,-1), \left(\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}\right)\right\rangle\right| = \frac{4}{\sqrt{18}}$.

Megjegyzés: Amennyiben más módszerrel, de helyesen számítják ki a 2 sík távolságát, azt a megoldást is elfogadjuk.

4. **<u>Feladat:</u>** Oldja meg a $z^6 + (16 + 16i)z^2 = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat bármilyen alakban elfogadjuk!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z^2[z^4 + (16 + 16i)] = 0$ alakba írható, $z_{1,2} = 0$, azaz a 0 kétszeres gyöke az egyenletnek.

A többi négy megoldást a $z^4 + (16 + 16i) = 0$ egyenletet megoldva kapjuk meg. Mivel $z^4 = -(16 + 16i) = -16 - 16i$, kiszámítjuk a $-16 - 16i$ komplex negyedik gyökeit.
Átírjuk trigonometrikus alakba a $-16 - 16i$ komplex számot:
$-16 - 16i = 16(-1 - i) = 16\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.
A négy komplex negyedik gyök a következő:

$z_k = \sqrt[4]{16\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right)$, ahol $k \in \{0,1,2,3\}$.
Tehát az eredeti egyenlet 6 megoldása (az indexeket kicsit megváltoztattuk, az $z_{1,2} = 0$ megoldásokat a végére tettük be):

$$z_0 = 2\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{16} + i\sin\frac{5\pi}{16}\right), \quad z_1 = 2\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{16} + i\sin\frac{13\pi}{16}\right),$$
$$z_2 = 2\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{16} + i\sin\frac{21\pi}{16}\right), \quad z_3 = 2\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{16} + i\sin\frac{29\pi}{16}\right),$$

$z_4 = 0$, $z_5 = 0$.

5. **Feladat:** Oldja meg a $z^3 - z^2 + 8z = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán! A megoldásokat algebrai alakban kérjük! Írjuk fel a $p(z) = z^3 - z^2 + 8z$ polinom **C**-beli gyöktényezős alakját!

Megoldás: Mivel az egyenlet $z(z^2 - z + 8) = 0$, ezért $z_1 = 0$ megoldása az egyenletnek. A másik két megoldás a $z^2 - z + 8 = 0$ egyenlet két komplex gyöke lesz:
$z_{2,3} = \frac{1+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2} = \frac{1+\sqrt{1-32}}{2} = \frac{1+\sqrt{-31}}{2} = \frac{1\pm i\sqrt{31}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{31}}{2}$, mert $\sqrt{-31} = \pm i\sqrt{31}$.
A kért gyöktényezős alak pedig $p(z) = z\left(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{31}}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{31}}{2}\right)$.

6. **Feladat:** Igazoljuk, hogy az

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

vektorok bázist alkotnak az $\mathbf{R}^3$-ben, és adjuk meg az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ vektornak erre a bázisra vonatkozó koordinátáit!

Megoldás: Az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ vektorok $\mathbf{R}^3$-ben pontosan akkor alkotnak bázist, ha lineárisan függetlenek.

$$\lambda_1\boldsymbol{a_1} + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0\\ 2\lambda_1 - \lambda_3 = 0,\end{cases}$$

ahonnan $\lambda_2 = -2\lambda_3$ és $\lambda_1 = \frac{\lambda_3}{2}$ az utolsó két egyenletből. Ezeket behelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy $\frac{\lambda_3}{2} - 2\lambda_3 + \lambda_3 = 0$, ahonnan következik, hogy $\lambda_3 = 0$, így $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, tehát az $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}$ vektorok lineárisan függetlenek $\mathbf{R}^3$-ben, így bázist alkotnak.
Legyen $B = \{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$. Az $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$ vektornak erre a B bázisra vonatkozó koordinátái

$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$ a következő tulajdonsággal: $\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{a_1} + \beta\boldsymbol{a_2} + \gamma\boldsymbol{a_3}$.

$$\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \gamma\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \text{ azaz } \begin{cases}\alpha + \beta + \gamma = 2\\ \beta + 2\gamma = 1\\ 2\alpha - \gamma = -1,\end{cases}$$

ahonnan az utolsó két egyenletből $\beta = 1 - 2\gamma$ és $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2}$.
Behelyettesítve az első egyenletbe:

$-\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{2} + 1 - 2\gamma + \gamma = 2$, ahonnan $\gamma = -3$, $\beta = 7$, $\alpha = -2$, azaz $[\boldsymbol{x}]_B = \begin{bmatrix}-2\\7\\-3\end{bmatrix}$.

7. **Feladat:** Határozzuk meg az

$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ és $\boldsymbol{a_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok által alkotott vektorrendszer rangját!

Megoldás: Az $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$ vektorrendszer rangja egyenlő az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix rangjával.

Elemi sor- és oszlopműveletek segítségével megállapítjuk az $\boldsymbol{A}$ mátrix rangját. Először felcseréljük a mátrix első és második sorát, mert könnyebben számítjuk ki a rangot, ha az első sor 1-gyel kezdődik. Majd a következő lépésben az első oszlopban az 1 alá nullákat gyártunk le úgy, hogy a második sorból kivonjuk az első sor kétszeresét, valamint a harmadik sorhoz hozzáadjuk az első sor ötszörösét. Ezeket röviden a következőképpen jelölhetjük:
$S_1 \leftrightarrow S_2$, majd a következő lépésben $S_2 - 2S_1$, valamint $S_3 + 5S_1$. Kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 0 & 11 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim$$

A főátló alá csupa nullát akarunk legyártani, így $S_3 + \frac{11}{5}S_2$ és ugyanitt a második sort (-1)-gyel beszorozzuk, majd a következő lépésben $5 \cdot S_3$ elvégzése után kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{14}{5} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

Most az első sorban szeretnénk nullákat látni a főátló felett, így a második oszlopból kivonva az első oszlop kétszeresét, valamint a harmadik és negyedik oszlopból kivonva az első oszlopot, azaz $O_2 - 2O_1$, $O_3 - O_1$, $O_4 - O_1$ kapjuk, hogy

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$O_2 : 5$, $O_3 : 2$ után egy következő lépésben $O_3 - O_2$, $O_4 - O_2$ oszlopműveletekkel

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 14 \end{bmatrix} \sim$$

$O_3 \cdot (-1)$, $O_4 : 14$, majd egy következő lépésben $O_4 - O_3$ és az így kapott mátrixunk már olyan lesz, melyre igaz, hogy minden sorában és oszlopában legfeljebb egy 1-es lesz, és melyben az 1-esek száma már nem csökkenthető:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

és ebben a mátrixban az 1-esek száma 3, ami nem más, mint az $\boldsymbol{A}$ mátrix, és egyben az $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$ vektorrendszer rangja, tehát $\text{rang}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\} = 3$.

Folyt. köv., még van 3 feladattípus, nincs vége!

8. **Feladat:** Számítsuk ki az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét az adjungált mátrix segítségével!

Megoldás: $det\, \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 30 - 2 \cdot (0 - 20) =$ $11 \neq 0$, tehát $\boldsymbol{A}$ invertálható mátrix.

Kiszámítjuk az adjungált mátrixot:

$$adj\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -10 \\ -2 & -29 & 20 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 20 & -29 & -2 \\ -10 & 20 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{det\, A} \cdot adj\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{20}{11} & -\frac{29}{11} & -\frac{2}{11} \\ -\frac{10}{11} & \frac{20}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}.$$

9. **Feladat:** Számítsuk ki az

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét elemi sorműveletek segítségével!

Megoldás: Felírjuk az $[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E_3}]$ mátrixot, és látjuk, hogy az első oszlopban a főátló alatt csak egy nem zérus elem áll: a harmadik sorban. Emiatt elvégezzük az $S_3 - 10S_1$ sorműveletet. Most a második oszlopban szeretnénk a főátló alá nullákat legyártani. A következő mátrixot már az $S_3 + 20S_2$ sorművelettel kapjuk:

$$[\boldsymbol{A},\boldsymbol{E_3}]=\left[\underbrace{\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\\10&0&1\end{matrix}}_{\boldsymbol{A}}\left|\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{\boldsymbol{E_3}}\right.\right]\sim\left[\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-20&-29\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\-10&0&1\end{matrix}\right.\right]$$

$$\sim\left[\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&11\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\-10&20&1\end{matrix}\right.\right]\sim$$

$\frac{S_3}{11}$, majd a következőkben S_1-3S_3, illetve S_2-2S_3

$$\sim\left[\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{matrix}\left|\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\-\frac{10}{11}&\frac{20}{11}&\frac{1}{11}\end{matrix}\right.\right]\sim$$

$$\left[\begin{matrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}\left|\begin{matrix}\frac{41}{11}&-\frac{60}{11}&-\frac{3}{11}\\\frac{20}{11}&-\frac{29}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{10}{11}&\frac{20}{11}&\frac{1}{11}\end{matrix}\right.\right]\sim$$

$$S_1-2S_2$$

$$\sim\left[\underbrace{\begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix}}_{\boldsymbol{E_3}}\left|\underbrace{\begin{matrix}\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\\\frac{20}{11}&-\frac{29}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{10}{11}&\frac{20}{11}&\frac{1}{11}\end{matrix}}_{\boldsymbol{A^{-1}}}\right.\right],$$

így az $\boldsymbol{A^{-1}}=\begin{bmatrix}\frac{1}{11}&-\frac{2}{11}&\frac{1}{11}\\\frac{20}{11}&-\frac{29}{11}&-\frac{2}{11}\\-\frac{10}{11}&\frac{20}{11}&\frac{1}{11}\end{bmatrix}$.

10. **<u>Feladat:</u>** Határozza meg azt az $\boldsymbol{X}$ mátrixot, amelyre

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b^T}\cdot\boldsymbol{X}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{6}\cdot\boldsymbol{X}$, ahol $\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

Megoldás: Mivel $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b^T}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}[1\quad 2\quad 0]=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\3&6&0\end{bmatrix}$ egy 3x3-as mátrix és $\boldsymbol{B}$ is egy 3x3-as mátrix, ezért $\boldsymbol{X}$ is egy 3x3-as mátrix, amennyiben létezik.

Az eredeti mátrixegyenlet ekvivalens a következővel:

$\underbrace{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b^T}-\boldsymbol{6E_3})}_{\boldsymbol{D}}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$, ahol $\boldsymbol{D}\overset{jel}{=}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b^T}-\boldsymbol{6E_3}$, azaz

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\3&6&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&2&0\\2&-2&0\\3&6&-6\end{bmatrix}.$$

Amennyiben létezik a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrix, a $\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$ mátrixegyenletet balról szorozva a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrixszal, pontosan a keresett $\boldsymbol{X}$megoldást kapjuk meg. Ehhez ki kell számítanunk a $\boldsymbol{D^{-1}}$ mátrixot. A $\boldsymbol{D}$ mátrix determinánsát legkönnyebben a harmadik oszlopa szerinti kifejtéssel kaphatjuk meg:

$$det\,\boldsymbol{D}=(-6)\begin{vmatrix}-5&2\\2&-2\end{vmatrix}=(-6)(10-4)=-36\neq 0.$$

Kiszámítjuk az $adj\,\boldsymbol{D}$ adjungált mátrixot:

$$adj\,\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-2&0\\6&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&-6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-2\\3&6\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&0\\6&-6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-5&0\\3&-6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-5&2\\3&6\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&0\\-2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-5&0\\2&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-5&2\\2&-2\end{vmatrix}\end{bmatrix}^{T}=\begin{bmatrix}12&12&18\\12&30&36\\0&0&6\end{bmatrix}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix}12&12&0\\12&30&0\\18&36&6\end{bmatrix}.$$

Ekkor

$$\boldsymbol{D^{-1}}=\frac{1}{det\,\boldsymbol{D}}\cdot adj\,\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{36}&-\frac{12}{36}&0\\-\frac{12}{36}&-\frac{30}{36}&0\\-\frac{18}{36}&-\frac{36}{36}&-\frac{6}{36}\end{bmatrix}\left(vagy\ \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{5}{6}&0\\-\frac{1}{2}&-1&-\frac{1}{6}\end{bmatrix}\right).$$

A mátrixegyenletünk $\boldsymbol{X}$megoldása pedig

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D^{-1}}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\frac{12}{36}&-\frac{12}{36}&0\\-\frac{12}{36}&-\frac{30}{36}&0\\-\frac{18}{36}&-\frac{36}{36}&-\frac{6}{36}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{24}{36}&-\frac{24}{36}&\frac{12}{36}\\-\frac{24}{36}&-\frac{42}{36}&\frac{30}{36}\\-\frac{42}{36}&-\frac{60}{36}&-\frac{30}{36}\end{bmatrix}\left(vagy\ \begin{bmatrix}-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{7}{6}&\frac{5}{6}\\-\frac{7}{6}&-\frac{5}{3}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}\right)$$