Matematika A2a - Vektorfüggvények, (D0), 2021/2022/2. félév

**A 2. zh témakörei**

A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból!

A feladatokat Moodle-platformon kell megoldani, teszt alakban, de teremben, tanári felügyelettel, ugyanúgy, mint az 1. ZH esetén. A szabályok maradnak itt is ugyanazok, csak arra figyeljenek, hogy teljesen más lehet a terembeosztás és az idősáv, amit a ZH előtti nap küldök el mindenkinek, aki D kurzuskódú előadást vett fel a Neptunban (kötelező betartani)! Több jó válaszos feladatok lesznek a tesztben (ami nem zárja ki azt sem, hogy némelyik feladatban csak egyetlen jó válasz van). Akinek nincs laptopja vagy nagy kijelzésű tabletje vagy internete, vagy csak egyszerűen papír alapú
ZH-t szeretne írni, annak a Teams-évfolyamcsoportunkban, a ZH előtt 7 nappal, egy általam kimondottan erre a célra kiírt chatben egy emojival jeleznie kell, hogy papír-alapú ZH-t kér! Csak annyi kinyomtatott ZH (teszt) feladatlappal megyünk a terembe ZH-t íratni, ahány jelzés érkezett ezzel kapcsolatosan. Aki papír-alapú ZH-t ír, attól a számításokat/megoldást és a piszkozatokat is bekérjük ellenőrzés céljából.

A ZH ismertető szövege a Moodle-ban kb. a következő lesz:

„A Moodle-ZH megoldásához 45 perc áll rendelkezésére. Mindegyik feladatban akár több helyes és helytelen válasz lehet (előre nem lehet tudni a helyes válaszok számát), de az biztos, hogy a 0 pontot érő „Nem válaszolok” opción kívül van a feladatban legalább egy helyes válasz és legalább egy helytelen válasz is. Ezért fogalmazunk minden feladatban úgy, hogy „Válasszon ki egyet vagy többet”, azt értve ezen, hogy az összes helyes választ kéri, csak nem lehet előre tudni, hány válasz helyes: egy vagy több. A kiválasztott helyes válaszokra részpontszámokat kapnak úgy, hogy minden feladatban az összes helyes válasz megtalálása a feladat pontszámának 100%-át éri. A kiválasztott helytelen válaszokra pedig negatív részpontszámok járnak úgy, hogy egy feladaton belül az összes helytelen válasz megtalálása a feladat pontszámának $(-100)$%-át éri. Tehát ez a szabály azt is jelenti, hogy egy-egy helyes válasz pontértéke csupán attól függ, hogy a feladat hány pontos és hány helyes válasz van az adott feladatban.”

**A zárthelyi dolgozatban 4 feladat lesz az alábbi típusokból! A feladatok Moodle-teszt formájában lesznek megfogalmazva, tehát nem az itt található alakban!** Aki papír-alapú ZH-t ír, ugyanezekkel a szabályokkal írja, csak a szabályokat nem írjuk le a papírra.

**1. Feladat (Gauss-Jordan módszer):**

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!)

$$\begin{cases} x + y + 2z = & -1 \\ 2x - y + 2z = & -4 \\ 4x + y + 4z = & -2. \end{cases}$$

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
Tulajdonképpen az egyenletrendszer három egyenlete az $\mathbb{R}^3$ térben 3 sík. Mi lehet a metszetük (azaz az egyenletrendszer megoldása)?

- $\emptyset$, amennyiben a három síknak nincs közös pontja, mert pl. kettő közülük párhuzamos;
- 1 megoldás, ha a három sík egy pontban metszi egymást;
- $\infty$ megoldás, abból is két lehetőség: vagy egy egyenesben metszik egymást és akkor 1 a szabadságfok, vagy egy síkban, mikor egybeesik a három sík, akkor meg 2 a szabadságfok.

A lineáris egyenletrendszerünk mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. Elkezdjük elemi sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Először a főátló alá gyártunk le 0-kat balról jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 2S_1$; $S_3 - 4S_1$, majd a következő mátrixhoz $S_3 - S_2$ és $S_2 \cdot (-1)$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 2 & -1 & 2 & | & -4 \\ 4 & 1 & 4 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -3 & -2 & | & -2 \\ 0 & -3 & -4 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim$$

Ha csak Gauss-módszert kértünk volna, akkor vége lenne, mert tiszta nulla sor nem állítható elő. Ekkor visszahelyettesítésekkel megkapnánk a megoldásokat. Most viszont Gauss-Jordan módszert kért a feladat szövege, így folytatjuk azzal, hogy a főelemek oszlopában minden más elemet kinullázunk és a vezéregyeseket is legyártjuk. Előtte viszont még $S_3 : (-2)$, utána meg $S_1 - 2S_3$, $S_2 - 2S_3$, majd $S_2 : 3$. A legvégén $S_1 - S_2$:

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 3 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 3 & 0 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2 \end{bmatrix},$$

ahonnan kiolvasható a megoldás:

$$\begin{cases} x = & 1 \\ y = & 2 \\ z = & -2, \end{cases}$$

másképp felírva $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, azaz pontosan egy megoldásunk van (mert $rang\,\mathbf{A} = rang\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 = n$, azaz a rang az ismeretlenek számával egyenlő).

**Megjegyzés az 1. Feladathoz:** természetesen, azt nem garantálom, hogy olyan egyenletrendszer lehet csak a zh-ban, melynek pontosan egy megoldása van. A megoldás elején részleteztem, hogy milyen esetek lehetségesek. Kérem, hogy az összes Gauss-Jordan módszeres feladatot nézzék át, melyet gyakorlaton vagy előadáson vettünk. Érdemes azokat is átnézni, melyeket a 6. gyakorlat írott anyagának a legvégén, a Neptun-tananyagból ajánlottam átnézésre.

**2. Feladat (Gauss-Jordan módszer vagy Gauss-Jordan elimináció; a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza; annak egy bázisa):**

Oldjuk meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! (Azaz kérjük az elemi sorműveletek használatát a redukált lépcsős alakig!) Mennyi az együtthatómátrix rangja és az egyenletrendszer szabadságfoka? Írjuk fel a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását és a megoldáshalmaz egy bázisát!

$$\begin{cases} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & -x_4 & & = & 2 \\ 9x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & -2x_5 & = & 5 \\ x_1 & -x_2 & & -x_4 & +2x_5 & = & 1 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & -3x_4 & +4x_5 & = & 2. \end{cases}$$

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
A lineáris egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$; $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Elkezdjük elemi sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Elöször $S_1 \leftrightarrow S_4$, majd a főátló alá gyártunk le 0-kat balról jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 9S_1$; $S_3 - S_1$, $S_4 - 3S_1$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & -2 & -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 8 & -12 & -4 \end{array}\right] \sim$$

Utána $S_4 : (-2)$, $S_2 \leftrightarrow S_4$, majd $S_3 + 2S_2$, $S_4 + 8S_2$, majd $S_3 \cdot (-1)$ és $S_4 - S_3$ elvégzése után kapjuk, hogy:

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & -8 & 7 & 26 & -38 & -13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 10 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Ennyi kéne, ha csak Gauss-módszert kértünk volna, mert a fenti mátrixból látszik már, hogy csupán ez az egy tiszta nulla sor volt legyártható és készen van a lépcsős alak (az nem kötelező lépcsős alak esetén, hogy minden vezérelem vezéregyes is legyen egyben, de láthatjuk, itt most ez is igaz). Már három vezéregyesünk van, készül a redukált lépcsős alak: elhagyjuk az utolsó tiszta nulla sort, majd a vezérelemek fölé is nullákat gyártunk le jobbról balra (tehát visszafelé) haladva: $S_1 + S_3$, $S_2 + S_3$, majd $S_1 - S_2$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -10 & -3 \end{array}\right].$$

Megkaptuk a redukált lépcsős alakot. Három vezéregyesünk van, így $rang\,\mathbf{A} = rang\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3$, ami kisebb, mint az ismeretlenek száma, ami $n = 5$. A lineáris egyenletrendszerek alaptételéből következik, hogy végtelen sok megoldásunk van, lineáris egyenletrendszerünk szabadságfoka $5 - 3 = 2$, azaz az ismeretlenek száma mínusz a rang. Szabad ismeretlenek $x_4$ és $x_5$ lesznek, mert a negyedik és ötödik oszlopban nincs vezéregyes, így $x_4 = u$ és $x_5 = v$, ahol $u, v \in \mathbb{R}$ a szabad ismeretlenek, a többi kötött ismeretlen:

$$\begin{cases} x_1 = & -u & +2v \\ x_2 = & -1-2u & +4v \\ x_3 = & -3-6u & +10v \\ x_4 = & u & \\ x_5 = & & v \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$.
A hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\mathbf{x_{hom}} = u \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v \in \mathbb{R}$, azaz $\mathbb{R}^5$ egy 2 dimenziós altere. Ennek egy bázisa például

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

**3. Feladat (Paraméteres lineáris egyenletrendszerek):**

A $p, q \in \mathbb{R}$ paraméterek értékétől függően tárgyaljuk és oldjuk meg Gauss-eliminációval a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{cases} x & +y & +z = & 2q \\ 2x & -3y & +2z = & 4q \\ 3x & -2y & +pz = & q. \end{cases}$$

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
Az egyenletrendszer mátrixos alakja

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ahol $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & p \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2q \\ 4q \\ q \end{bmatrix}$, ahol $p, q \in \mathbb{R}$.

Amint a 12. előadás elején is említettük, és a 13. előadás elején konkrét példában láttuk is, paraméteres lineáris egyenletrendszerek tárgyalásakor elegendő Gauss-módszerrel dolgozni: elkezdjük elemi sortranszformációkkal átalakítani a kibővített mátrixot. Elöször a főátló alá gyártunk le 0-kat balról jobbra haladva, tehát először az első oszlopban, a következő lépésben a másodikban, stb.: $S_2 - 2S_1$; $S_3 - 3S_1$, majd $S_3 - S_2$ és $S_2 : (-5)$:

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2q \\ 2 & -3 & 2 & | & 4q \\ 3 & -2 & p & | & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2q \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -5 & p-3 & | & -5q \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2q \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & p-3 & | & -5q \end{bmatrix} \sim$$

- A megoldáshalmaz üres $\Leftrightarrow 2 = rang\,\mathbf{A} < 3 = rang\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}] \Leftrightarrow \begin{cases} p-3 = & 0 \\ -5q \neq & 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} p = & 3 \\ q \neq & 0. \end{cases}$

  Ekkor azt is mondjuk, hogy a lineáris egyenletrendszerünk *inkonzisztens*, vagy *inkompatibilis*, vagy *összeférhetetlen*.

- Pontosan egy megoldás van $\Leftrightarrow rang\,\mathbf{A} = rang\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 3 \Leftrightarrow p-3 \neq 0$, azaz $p \neq 3$ és $\forall q \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor a megoldás nem más, mint az

$$\begin{cases} x+y & +z = & 2q \\ \quad y & = & 0 \\ & (p-3)z = & -5q \end{cases}$$

  lineáris egyenletrendszer megoldása (ez már a lépcsős alak), melyet alulról fölfelé történő helyettesítéssel oldunk meg, azaz $y = 0$, $z = \frac{-5q}{p-3}$ és

$$x = 2q + \frac{5q}{p-3} = \frac{2pq-q}{p-3} = \frac{q(2p-1)}{p-3}.$$

- $\infty$ sok megoldása van a lineáris egyenletrendszernek $\Leftrightarrow rang\,\mathbf{A} = rang\,[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2 < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} p-3 = & 0 \\ q = & 0 \end{cases}$, azaz $p = 3$ és $q = 0$ esetben.

  Ekkor

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix},$$

  amennyiben $S_1 - S_2$. A szabadságfok $3-2 = 1$ és egyedül a $z$ oszlopában nincs vezéregyes, így csak ő lehet a szabad ismeretlen, amit jelöljünk $t$-vel.

  Kapjuk, hogy $z = t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ szabad ismeretlen és $\begin{cases} x+t & =0 \\ y & =0 \end{cases}$,
  ahonnan a megoldáshamaz paraméteres alakja

$$\begin{cases} x = & -t \\ y = & 0, \\ z = & t \end{cases}$$

ahol $t \in \mathbb{R}$. Másképp felírva:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $t \in \mathbb{R}$, azaz a 3 dimenziós térben egy origón átmenő, $(-1, 0, 1)$ irányvektorú egyenes összes pontja a megoldás.

**4. Feladat (Szimmetrikus harmadrendű mátrix sajátértékei, sajátvektorai; diagonalizáló mátrix megadása):**

Diagonalizálható-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Ha igen, akkor adjon meg egy diagonalizáló mátrixot!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

A determinánst első sora szerint kifejtve kapjuk, hogy egyenlő $(-\lambda)(3-\lambda)(-\lambda)+3\cdot(\lambda-3)\cdot 3 = (\lambda-3)(9-\lambda^2)$-tel. A sajátértékek a $(\lambda-3)(9-\lambda^2) = 0$ *karakterisztikus egyenlet* megoldásai, azaz $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_{2,3} = 3$.

A $\lambda_1 = -3$-hoz tartozó $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ sajátvektorokat behelyettesítve a

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = -v_{31}$ és $v_{21} = 0$, azaz a $\lambda_1 = -3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}$ alakúak, ahol $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ilyenkor például egy reprezentáns
$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Most megmutatjuk, hogy a $\lambda_{2,3} = 3$ kétszeres sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, mert egy tetszőleges, 3-hoz tartozó
$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$ sajátvektort behelyettesítve a

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Innen a $v_{12} = v_{32}$ egyenletet kapjuk csak. Előző számításunknál volt 2 különböző egyenletünk, ez most csak egy egyenlet! Szimmetrikus az $\mathbf{A}$ mátrix, így a $\lambda_2 = 3$ dupla sajátértékhez két lineárisan független sajátvektor is tartozik, ilyenek pl. a $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és a $\mathbf{v_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektorok.
A harmadrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak van tehát három lineárisan független sajátvektora, ezért diagonalizálható.
Ebben az esetben egy diagonalizáló mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ennek az oszlopvektorai az $\mathbf{A}$ mátrix sajátvektorai.
(Megjegyezzük, hogy a feladat nem kérte, hogy ortonormált diagonalizáló

mátrixot adjunk. Ha kérte volna, akkor a fenti sajátvektorok egységvektorai lennének az ortonormált diagonalizáló mátrix oszlopvektorai.)

**5. Feladat (Parciális deriváltak, gradiens, másodrendű parciális deriváltak, Hesse-mátrix):**

Tekintsük az

$$f(x,y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}, \quad x, y \in (0, \infty)$$

függvényt.

(a) Számítsuk ki a függvény $x$ és $y$ változók szerinti parciális deriváltjait!

(b) Adjuk meg a `grad` $f(1,2)$ értékét!

(c) Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontban!

(d) Írjuk fel a függvény Hesse-mátrixát!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**

$$(a)\ f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} \cdot \left( \frac{x^2 - 2y^2}{x} \right)'_x = \frac{1}{y} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2y^2) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 2y^2}{x^2 y} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}.$$

Vagy akár kiszámíthattuk volna a következőképpen is:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left( \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} \right)'_x = \frac{1}{y} \cdot 1 - 2y \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}.$$

Az $y$-szerinti parciális derivált pedig:

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left( \frac{x}{y} - \frac{2y}{x} \right)'_y = x \cdot \left( -\frac{1}{y^2} \right) - \frac{2}{x} = \frac{-x^2 - 2y^2}{xy^2}.$$

(b) A gradiens vektor általában:

$$\nabla f(x,y) = \underline{grad} f(x,y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right),$$

$$f'_x(1,2) = \frac{1^2 + 2 \cdot 2^2}{1^2 \cdot 2} = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \text{ és } f'_y(1,2) = \frac{-1^2 - 2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2^2} = \frac{-1-8}{4} = -\frac{9}{4},$$

így a gradiens vektor az $(1,2)$ pontban:

$$\nabla f(1,2) = \underline{grad} f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right),$$

(c) A másodrendű parciális deriváltak a következők (most több egyenértékű jelölést használunk, de máskor elég csak egyiket ideírni):

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{x^2+2y^2}{x^2 y}\right)'_x = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2}\right)'_x =$$

$$= 0 + 2y \cdot (x^{-2})'_x = 0 + 2y \cdot (-2) \cdot x^{-3} = 2y \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right) = -\frac{4y}{x^3},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{-x^2-2y^2}{xy^2}\right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{2}{x}\right)'_y =$$

$$= -x \cdot (y^{-2})'_y = -x \cdot (-2)y^{-3} = 2xy^{-3} = \frac{2x}{y^3},$$

Young tétele miatt a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők, így mindegy, melyiket számítjuk ki:

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{x^2+2y^2}{x^2 y}\right)'_y = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{2y^2 - x^2}{x^2 y^2}.$$

Így ezekbe behelyettesítve az $x = 1$ és $y = 2$ értékeket, kapjuk, hogy

$$f''_{xx}(1,2) = -\frac{4 \cdot 2}{1^3} = -8; \quad f''_{yy}(1,2) = \frac{2 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{4},$$

míg a vegyes másodrendű parciális deriváltak

$$f''_{xy}(1,2) = f''_{yx}(1,2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 1^2}{1^2 \cdot 2^2} = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4}.$$

(d) Tetszőleges kétváltozós $f$ függvény Hesse-mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Ugyanezt szoktuk még a következőképpen is jelölni (ezt a jelölést is ismernünk kell!):

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{11}f(x,y) & \partial_{12}f(x,y) \\ \partial_{21}f(x,y) & \partial_{22}f(x,y) \end{bmatrix}.$$

Az $f$ függvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{4y}{x^3} & \frac{2y^2-x^2}{x^2y^2} \\ \frac{2y^2-x^2}{x^2y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}.$$

**6. Feladat (Iránymenti derivált kiszámítása):**

Számítsuk ki az

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x\mathrm{e}^{xy} - xy$$

függvény $\mathbf{v} = (3,4)$ irány mentén vett iránymenti deriváltját az $(1,0)$ pontban!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
Az $f(x,y)$ függvény $\mathbf{v}$ irány mentén vett *iránymenti deriváltja*

$$\partial_{\mathbf{v}}f(x,y) = f'_{\mathbf{v}}(x,y) = \underline{grad}f \cdot \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}.$$

Ehhez szükségünk van az $f$ függvény parciális deriváltjaira:

$$f'_x(x,y) = (x\mathrm{e}^{xy} - xy)'_x = \mathrm{e}^{xy} + x\mathrm{e}^{xy}\cdot y - y = \mathrm{e}^{xy}(1+xy) - y, \text{ és}$$
$$f'_y(x,y) = (x\mathrm{e}^{xy} - xy)'_y = x\mathrm{e}^{xy}\cdot x - x = x^2\mathrm{e}^{xy} - x,$$

így az $(1,0)$ pont koordinátáit behelyettesítve, kapjuk, hogy

$$f'_x(1,0) = \mathrm{e}^0(1+0) - 0 = 1 \text{ és } f'_y(1,0) = 1\cdot\mathrm{e}^0 - 1 = 0.$$

A $\underline{v} = (3,4)$ vektor egységvektora $\frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$. A gradiens a kért pontban $\underline{grad}f(1,0) = (1,0)$, míg az iránymenti derivált

$$f'_{\underline{v}}(1,0) = (1,0)\cdot\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}.$$

**7. Feladat (Érintősík):**

Mutassuk meg, hogy a $P_0(1,1,3)$ pont rajta van a

$$z = (y + x^2)(y - x^3) + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

egyenletű felületen! Írjuk fel ebben a pontban a felület érintősíkjának az egyenletét! Adjuk meg az érintősík egy normálvektorát!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**
Legyen

$$z = f(x, y) = (y + x^2)(y - x^3) + 3, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A $P_0(1,1,3)$ pont rajta van a felületen $\Leftrightarrow f(1,1) = 3 \Leftrightarrow$
$(1 + 1^2)(1 - 1^3) + 3 = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$, ami igaz.
A $z = f(x, y)$ felület $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontjában az érintősík egyenlete (ha létezik):

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ehhez a következőket kell kiszámítanunk:

$$f'_x(x, y) = [(y + x^2)(y - x^3) + 3]'_x = (y + x^2)'_x(y - x^3) + (y + x^2)(y - x^3)'_x + 0 =$$

$$= 2x(y - x^3) + (y + x^2)(-3x^2) = 2xy - 2x^4 - 3x^2y - 3x^4 = -5x^4 - 3x^2y + 2xy,$$

és

$$f'_y(x, y) = [(y + x^2)(y - x^3) + 3]'_y = (y + x^2)'_y(y - x^3) + (y + x^2)(y - x^3)'_y + 0 =$$

$$= 1 \cdot (y - x^3) + (y + x^2) \cdot 1 = -x^3 + x^2 + 2y.$$

Így

$$f'_x(1,1) = -5 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = -5 - 3 + 2 = -6,$$
$$f'_y(1,1) = -1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 = 2,$$

és az $(1, 1, f(1,1)) = (1,1,3)$ pontban tekintett érintősík egyenlete:

$$z - 3 = -6(x - 1) + 2(y - 1), \text{ azaz } -6x + 2y - z + 7 = 0,$$

ezért ennek az érintősíknak egy normálvektora $\mathbf{n} = (-6, 2, -1)$.

**8. Feladat (Vektor-vektor függvény Jacobi-mátrixa):**

Számítsuk ki az

$$\mathbf{f}(x,y,z) = (1-x^2+y^2-z^2, \mathrm{e}^{2x}-y^2\ln(x^2+z^2+1), 1+x^2+y^2+5xz), \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

háromváltozós vektor-vektor függvény $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$ Jacobi-mátrixát az $\mathbf{a}=(1,2,0)$ pontban!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**

Vektor-vektor függvények Jacobi-mátrixa (derivált mátrixa) a következő:
Legyen $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, azaz $\forall\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in D_{\mathbf{f}}$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x})),$$

ahol $f_i\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ az $i$-edik koordinátafüggvény. Ha $\mathbf{f}\in D\{\mathbf{a}\}$ (azaz $\mathbf{f}$ deriválható az $\mathbf{a}$-ban), akkor $\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ és $\forall j\in\{1,2,\ldots,m\}$ létezik $f_j$-nek $x_i$ szerinti parciális deriváltja $\mathbf{a}$-ban, és ezeket mátrixba rendezve kapjuk az $\mathbf{f}$ *függvény* $\mathbf{a}$*-ban vett derivált mátrixát*, vagy *Jacobi-mátrixát*, azaz

$$\mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \frac{\partial(f_1,f_2,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\ldots,x_n)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \end{bmatrix} \in\mathbb{R}^{m\times n}.$$

Megjegyezzük, hogy a $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ helyett szoktuk a $\partial_i f_j$ jelölést is használni, ezt is ismerni kell.

A mi esetünkben $f_1(x,y,z)=1-x^2+y^2-z^2$, $f_2(x,y,z)=\mathrm{e}^{2x}-y^2\ln(x^2+z^2+1)$ és $f_3(x,y,z)=1+x^2+y^2+5xz$.
A fenti általános képlet miatt a kért Jacobi-mátrix:

$$\mathbf{f}'(1,2,0) = \frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,z)}(1,2,0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,2,0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,2,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2,0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,2,0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,2,0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,2,0) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(1,2,0) \end{bmatrix} \in\mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ehhez szükségünk van az összes $f_i$, $(i = 1, 2, 3)$ összes változó szerinti parciális deriváltra:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_x = -2x, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,0) = -2;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_y = 2y, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,0) = 4;$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = (1 - x^2 + y^2 - z^2)'_z = -2z, \text{ azaz } \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,2,0) = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = (\mathrm{e}^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1))'_x = 2\mathrm{e}^{2x} - y^2 \cdot \frac{1}{x^2 + z^2 + 1} \cdot 2x,$$

azaz $\frac{\partial f_2}{\partial x}(1,2,0) = 2\mathrm{e}^2 - 4;$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = (\mathrm{e}^{2x} - y^2 \ln(x^2+z^2+1))'_y = -\ln(x^2+z^2+1)\cdot 2y = -2y\ln(x^2+z^2+1),$$

azaz $\frac{\partial f_2}{\partial y}(1,2,0) = -4\ln 2;$

$$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = (\mathrm{e}^{2x} - y^2 \ln(x^2 + z^2 + 1))'_z = -y^2 \cdot \frac{1}{x^2 + z^2 + 1} \cdot 2z,$$

azaz $\frac{\partial f_2}{\partial z}(1,2,0) = 0;$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_x = 2x + 5z, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial x}(1,2,0) = 2;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_y = 2y, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial y}(1,2,0) = 4;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = (1 + x^2 + y^2 + 5xz)'_z = 5x, \text{ azaz } \frac{\partial f_3}{\partial z}(1,2,0) = 5.$$

Így a kért Jacobi-mátrix (vagy derivált mátrix)

$$\mathbf{f}'(1,2,0) = \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x,y,z)}(1,2,0) = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 2\mathrm{e}^2 - 4 & -4\ln 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

**9. Feladat (Láncszabály első speciális esete):**

A láncszabály alkalmazásával számítsuk ki a

$$z(t) := F(f(t), g(t)) = F(x, y)$$

függvény $z'(t)$ deriváltját, ahol

$$F(x, y) := (\operatorname{arctg} x) + y, \quad x := \mathrm{e}^{2t} \text{ és } y := \cos(2t).$$

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**

Mivel $F, f(t) = \mathrm{e}^{2t}$ és $g(t) = \cos(2t)$ deriválható függvények, alkalmazzuk a láncszabály első speciális esetét:

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Ehhez kiszámítjuk a következőket:

$$F'_x(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2}; \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x(t), y(t)) = \frac{1}{1 + (\mathrm{e}^{2t})^2} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{4t}};$$

$$F'_y(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 1; \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x(t), y(t)) = 1;$$

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\mathrm{e}^{2t}; \quad y'(t) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\sin(2t).$$

$$z'(t) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{4t}} \cdot 2\mathrm{e}^{2t} + 1 \cdot [-2\sin(2t)] = \frac{2\mathrm{e}^{2t}}{1 + \mathrm{e}^{4t}} - 2\sin(2t).$$

**10. Feladat (Láncszabály második speciális esete):**

A láncszabály második speciális esetével számítsuk ki a

$$z(t, s) := F(f(t, s), g(t, s)) = F(x, y)$$

függvény $\frac{\partial z}{\partial t}$ és $\frac{\partial z}{\partial s}$ parciális deriváltjait, ha

$$F(x, y) := \frac{x - y}{x + y}, \text{ valamint } x := \mathrm{e}^{t+s} \text{ és } y := \mathrm{e}^{t \cdot s}.$$

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**

Mivel $F, f(t,s) = \mathrm{e}^{t+s}$ és $g(t,s) = \mathrm{e}^{ts}$ deriválható függvények, alkalmazzuk a láncszabály második speciális esetét:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Ezekhez kiszámítjuk a következő parciális deriváltakat:

$$F'_x(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_x = \frac{1 \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x(t,s), y(t,s)) = \frac{2\mathrm{e}^{ts}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2};$$

$$F'_y(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{x-y}{x+y}\right)'_y = \frac{(-1) \cdot (x+y) - (x-y) \cdot 1}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x(t,s), y(t,s)) = -\frac{2\mathrm{e}^{t+s}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2};$$

$$x'_t(t,s) = \frac{\partial x}{\partial t}(t,s) = \mathrm{e}^{t+s}; y'_t(t,s) = \frac{\partial y}{\partial t}(t,s) = s\mathrm{e}^{ts};$$

$$x'_s(t,s) = \frac{\partial x}{\partial s}(t,s) = \mathrm{e}^{t+s}; y'_s(t,s) = \frac{\partial y}{\partial s}(t,s) = t\mathrm{e}^{ts}.$$

Így

$$\frac{\partial z}{\partial t}(t,s) = \frac{2\mathrm{e}^{ts}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot \mathrm{e}^{t+s} - \frac{2\mathrm{e}^{t+s}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot s \cdot \mathrm{e}^{ts} = \frac{2\mathrm{e}^{ts+t+s}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot (1-s)$$

és

$$\frac{\partial z}{\partial s}(t,s) = \frac{2\mathrm{e}^{ts}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot \mathrm{e}^{t+s} - \frac{2\mathrm{e}^{t+s}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot t \cdot \mathrm{e}^{ts} = \frac{2\mathrm{e}^{ts+t+s}}{(\mathrm{e}^{t+s} + \mathrm{e}^{ts})^2} \cdot (1-t).$$

**11. Feladat (Lokális szélsőértékszámítás):**

Határozzuk meg az

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

**Megoldás (nagyon részletes magyarázattal):**

Mivel $f$ kétszer deriválható függvény $\mathbb{R}^2$-en (sőt, akárhányszor deriválható $\mathbb{R}^2$-en), lokális szélsőértékhelyei az

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = & 0 \\ f'_y(x,y) = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásai lehetnek (a lokális szélsőértékekre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel miatt).

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6x + 2y = 0;$$

$$f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y = 0.$$

Megoldjuk a

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x + 2y = & 0 \\ 2x + 2y = & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert. A második egyenletből $y = -x$, ezt visszahelyettesítve az első egyenletbe, kapjuk, hogy

$$3x^2 - 6x - 2x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(3x - 8) = 0,$$

ahonnan az egyenletrendszer megoldásai $\begin{cases} x_1 = & 0 \\ y_1 = & 0 \end{cases}$ és $\begin{cases} x_2 = & \dfrac{8}{3} \\ y_2 = & -\dfrac{8}{3} \end{cases}$, azaz a *lehetséges lokális szélsőértékhelyek* $(0,0)$ és $\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$.
Alkalmazzul ezekre a másodrendű elégséges feltételt. Előtte kiszámítjuk a függvény Hesse-mátrixát:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (3x^2 - 6x + 2y)'_x = 6x - 6;$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (2x + 2y)'_y = 2,$$

és Young tétele miatt $= f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, így elegendő csak $f''_{xy}(x,y)$-t kiszámítani:
$$f''_{xy}(x,y) = (3x^2 - 6x + 2y)'_y = 2.$$
A Hesse-mátrix tehát:
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Először azt vizsgáljuk meg, hogy lokális szélsőértékhely-e a $(0,0)$:
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Ennek determinánsa $-16 < 0$, így a $H(0,0)$ mátrix indefinit, azaz $(0,0)$ nem lokális szélsőértékhely. (A $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ nyeregpont.)
$$H\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right) = \begin{bmatrix} 6\cdot\frac{8}{3}-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$
Ennek a determinánsa $10\cdot 2 - 2\cdot 2 = 16 > 0$, és első sorában, első oszlopában lévő eleme $10 > 0$, így a $H(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ mátrix pozitív definit, és a lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel miatt $\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)$ egy lokális minimumhely, az $f(\left(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}\right)) = \left(\frac{8}{3}\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2 + 2\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(-\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 = \left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3} - 3 - 2 + 1\right) = \left(\frac{8}{3}\right)^2\left(\frac{8}{3} - 4\right) = -\frac{256}{27}$ pedig a lokális minimum (érték).