A KÖZGAZDÁSZ HALLGATÓK MINTAVIZSGÁJÁNAK MEGOLDÁSA

Ebben a (90 perces) Mintavizsgában a teljes feladatok szerepelnek, **nincs még teszt alakúra átírva**. **A vizsgát mindenki teremben írja, és kinyomtatott papír-alapú tesztet kapnak.** A megoldásokat is bekérjük, ellenőrzés céljából, de pontozni csak a bejelölt rubrikák szerint fogunk!

Jegyezzük meg azt is, hogy a vizsgán lehetnek más feladattípusok (a vizsgára kijelölt feladattípusok közül).

1) Számítsa ki az

$$\int_0^\infty \frac{4x+6}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$$

integrált! (10 pont)

Megoldás:

$$\int \frac{4x+6}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{(2x+1)+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} =$$

$$= 2\ln(x^2+x+1) + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = 2\ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1} =$$

$$= 2\ln(x^2+x+1) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + c.$$

A Newton-Leibniz formulát alkalmazva

$$\int_0^\omega \frac{4x+6}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \left[2\ln(x^2+x+1) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]_0^\omega =$$

$$= 2\ln(\omega^2+\omega+1) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\omega+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \left(2\ln 1 + \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

1. típusú improprius integrálunk van, ezért

$$\int_0^\infty \frac{4x+6}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\omega \frac{4x+6}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left[2\ln(\omega^2+\omega+1) + \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\omega+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \infty + \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \infty.$$

2) Határozza meg azt az $\mathbf{X}$ mátrixot, amelyre

$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{X}-\mathbf{B} = 3\mathbf{X}$, ahol $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$ és $\mathbf{B} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\-1 & 1 & 1\\2 & 0 & 0\end{bmatrix}$. (10 pont)

Megoldás:
Mivel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}$ egy (3×3)-as mátrix és $\mathbf{B}$ is (3×3)-as mátrix, ezért amennyiben létezik az X megoldásmátrix, az is csak (3×3)-as lehet.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}.$$

A mátrixegyenlet átírható a következő alakba:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}-3\mathbf{E}_3)\cdot\mathbf{X}=\mathbf{B}.$$

Legyen

$$\mathbf{D}:=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{T}}-3\mathbf{E}_3=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\-2&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&0&1\\0&-3&0\\-2&0&-2\end{bmatrix}.$$

Ekkor $\mathbf{X}=\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{B}$, amennyiben létezik $\mathbf{D}^{-1}$.

$$\det\mathbf{D}=\begin{vmatrix}-5&0&1\\0&-3&0\\-2&0&-2\end{vmatrix}=(-3)\cdot\begin{vmatrix}-5&1\\-2&-2\end{vmatrix}=-36\neq0.$$

A $\mathbf{D}$ adjungált mátrixa

$$\operatorname{adj}\mathbf{D}=\begin{bmatrix}6&0&-6\\0&12&0\\3&0&15\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}6&0&3\\0&12&0\\-6&0&15\end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{D}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{D}}\cdot\operatorname{adj}\mathbf{D}=-\frac{1}{36}\begin{bmatrix}6&0&3\\0&12&0\\-6&0&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac16&0&-\frac1{12}\\0&-\frac13&0\\\frac16&0&-\frac5{12}\end{bmatrix}.$$

Ha nem egyszerűsít, vagy ha másképp számítja ki az inverz mátrixot, akkor is jár a pont.

$$\mathbf{X}=\mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{B}=-\frac{1}{36}\cdot\begin{bmatrix}6&0&3\\0&12&0\\-6&0&15\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\2&0&0\end{bmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{36}\cdot\begin{bmatrix}12&0&-6\\-12&12&12\\24&0&6\end{bmatrix}\left(\text{vagy } \mathbf{X}=\begin{bmatrix}-\frac13&0&\frac16\\\frac13&-\frac13&-\frac13\\-\frac23&0&-\frac16\end{bmatrix}\right).$$

3) Oldja meg Gauss-Jordan módszerrel az alábbi lineáris egyenletrendszert! Mennyi az egyenletrendszer szabadságfoka? Írja fel a hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldását!

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-x_4+2x_5=6\\3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3\\7x_1+x_2-x_3+3x_4=12\\8x_1+4x_2-4x_3+7x_4-5x_5=3.\end{cases}\qquad\text{(10 pont)}$$

Megoldás:
Gauss-Jordan módszerrel $S_2 - 3S_1$; $S_3 - 7S_1$; $S_4 - 8S_1$, majd a következő lépésben $S_3 - 2S_2$ és $S_4 - 3S_2$ sorműveletekkel kapjuk, hogy

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & | & 3 \\ 7 & 1 & -1 & 3 & 0 & | & 12 \\ 8 & 4 & -4 & 7 & -5 & | & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 5 & -7 & | & -15 \\ 0 & 8 & -8 & 10 & -14 & | & -30 \\ 0 & 12 & -12 & 15 & -21 & | & -45 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 5 & -7 & | & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

A tiszta nulla sorokat elhagyva, az $S_2 : 4$, majd $S_1 + S_2$ sorművelettel folytatva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & | & 6 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & | & -\frac{15}{4} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & | & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{5}{4} & -\frac{7}{4} & | & -\frac{15}{4} \end{bmatrix}.$$

Innen már a megoldás is kiolvasható.
Tehát

$$\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = 2 < 5 \Rightarrow \text{ a szabadságfok } = 5 - 2 = 3,$$

és emiatt $x_3 = u$, $x_4 = v$ és $x_5 = w$, ahol $u, v, w \in \mathbb{R}$ szabad ismeretlenek, a többi kötött ismeretlen. Az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van, éspedig

$$\begin{cases} x_1 = & \frac{9}{4} & & -\frac{1}{4}v - \frac{1}{4}w \\ x_2 = & -\frac{15}{4} & + u & -\frac{5}{4}v + \frac{7}{4}w \\ x_3 = & & u & \\ x_4 = & & & v \\ x_5 = & & & w \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ -\frac{15}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v, w \in \mathbb{R}$.
A hozzárendelt homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldása:

$$\mathbf{x}_{hom} = u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ahol $u, v, w \in \mathbb{R}$.

4) Diagonalizálható-e az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrix? Ha igen, adjon meg egy diagonalizáló mátrixot! (10 pont)

Megoldás:
A karakterisztikus polinom

$$p(\lambda) := det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

A determinánst második oszlopa szerint kifejtve kapjuk, hogy

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1).$$

A sajátértékek az $(1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$ karakterisztikus egyenlet megoldásai, azaz $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$ és $\lambda_3 = 1$.

A $\lambda_1 = 1$-hez tartozó $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix}$ sajátvektorokat behelyettesítve a

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ebből $v_{11} = v_{31}$ azaz a $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} t \\ p \\ t \end{bmatrix}$ alakúak, ahol $p, t \in \mathbb{R}$ úgy, hogy nem egyszerre nullák. Ilyenkor például egy reprezentáns

$$\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tekintsük a $\lambda_2 = -1$ sajátértéket. Az ehhez tartozó sajátvektort jelölje $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix}$. Ezt behelyettesítve a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ v_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

mátrixegyenletbe, kapjuk, hogy $v_{12} + v_{32} = 0$ és $v_{22} = 0$. Tehát $\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ -s \end{bmatrix}$, ahol $s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Például egy reprezentáns

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Szimmetrikus az $\mathbf{A}$ mátrix, így a $\lambda_3 = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektor reprezentáns kiszámítható a következőképpen:

$$\mathbf{v_3} = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \mathbf{i} - (-1-1) \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A harmadrendű $\mathbf{A}$ mátrixnak van tehát három lineárisan független sajátvektora, ezért diagonalizálható.
Ebben az esetben egy diagonalizáló mátrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5) Lagrange-szorzók módszerével keresse meg az $f(x,y) = xy$ függvény maximumát az $x^2 + y^2 = 4$ körön! Igazolja, hogy tényleg maximumot kapott! (10 pont)

Megoldás:
Jelölje $g(x,y) := x^2 + y^2 - 4$ a feltételfüggvényt.
1) Külön vizsgálandók azok a pontok, melyekben nem teljesül a regularitási feltétel. Mivel

$$\partial_1 g(x,y) = 2x; \quad \partial_2 g(x,y) = 2y,$$

csak a $(0,0)$ tesz eleget egyszerre mindkét feltételnek, de ez nem lehet megoldás, mert nem teljesíti a $g(x,y) = 0$ feltételt.
2) A Lagrange-szorzók módszeréhez felírjuk az

$$\mathcal{L}(x,y) := f(x,y) - \lambda g(x,y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 4)$$

Lagrange-függvényt.
3) Alkalmazzuk erre a függvényre a feltételes lokális szélsőértékekre tanult elsőrendű szükséges feltételt, azaz megoldjuk a

$$\begin{cases} \partial_1 \mathcal{L}(x,y) = & \partial_1 f(x,y) - \lambda \partial_1 g(x,y) = & y - 2\lambda x = & 0 \\ \partial_2 \mathcal{L}(x,y) = & \partial_2 f(x,y) - \lambda \partial_2 g(x,y) = & x - 2\lambda y = & 0, \\ g(x,y) = & x^2 + y^2 - 4 = & & 0 \end{cases}$$

egyenletrendszert.
Kapjuk, hogy $x = 2\lambda y = 2\lambda \cdot (2\lambda x) = 4\lambda^2 x$, ahonnan $(4\lambda^2 - 1)x = 0$, így a megoldások $x_1 = 0$ vagy $4\lambda^2 - 1 = 0$. De $x_1 = 0$ esetén a $(0,0)$-t kapnánk, amiről már láttuk, nem lehet a feladat megoldása. Így marad a $4\lambda^2 - 1 = 0$, ahonnan a $\lambda = \pm\frac{1}{2}$ értékeket kapjuk.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = x \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, \text{ azaz a } (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ és } (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

helyek jönnek számításba csak.

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -x \Rightarrow 2x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}, \text{ azaz a } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ és } (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

helyek jönnek számításba csak.
4) Kiszámítjuk a Lagrange-függvény másodrendű parciális deriváltjait:

$$\partial_{11}\mathcal{L}(x,y) = -2\lambda;\ \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) = 1 = \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) \text{ és } \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) = -2\lambda.$$

Fel kell írnunk előbb a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ -hez tartozó

$$\mathcal{L}(x,y) := xy - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 4)$$

Lagrange-függvény kibővített Hesse-mátrixát:

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -1 & 1 \\ 2y & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Használjuk a lokális feltételes szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltételt, mely szerint

1) ha $\det \mathbf{H}(x_1, y_1) > 0$, akkor (x_1, y_1) feltételes lokális maximumhely;

2) ha $\det\ \mathbf{H}(x_1, y_1) < 0$, akkor (x_1, y_1) feltételes lokális minimumhely.

$$\det\mathbf{H}(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32 > 0,$$

így a feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltételből következik, hogy $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ feltételes lokális maximumhely, $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ pedig feltételes lokális maximum (érték).

$$\det\mathbf{H}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & -1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & -1 \end{vmatrix} = 32 > 0,$$

így a feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltételből következik, hogy $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ is feltételes lokális maximumhely, $f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})\cdot(-\sqrt{2}) = 2$ pedig szintén feltételes lokális maximum (érték).
Felírjuk most a $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ -hez tartozó

$$\mathcal{L}(x,y) := xy + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 4)$$

Lagrange-függvény kibővített Hesse-mátrixát:

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_1 g(x,y) & \partial_2 g(x,y) \\ \partial_1 g(x,y) & \partial_{11}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{12}\mathcal{L}(x,y) \\ \partial_2 g(x,y) & \partial_{21}\mathcal{L}(x,y) & \partial_{22}\mathcal{L}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 1 & 1 \\ 2y & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det\mathbf{H}(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -32 < 0,$$

így a feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltételből következik, hogy $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ feltételes lokális minimumhely,

$f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2$ pedig feltételes lokális minimum (érték).

$$\det\mathbf{H}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2\sqrt{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -32 < 0,$$

így a feltételes lokális szélsőértékekre vonatkozó másodrendű elégséges feltételből következik, hogy $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ is feltételes lokális minimumhely, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = -2$ pedig feltételes lokális minimum (érték).

A fentiekből következik, hogy $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ és $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ feltételes abszolút maximumhelyek is és

$$f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2$$

pedig feltételes abszolút maximum (érték) is.

6) Tekintsük az

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{xy}, \quad x, y \in (0, \infty)$$

függvényt.

(a) Számítsuk ki a függvény x és y változók szerinti parciális deriváltjait!

(b) Adjuk meg a `grad` $f(1, 2)$ értékét!

(c) Számítsuk ki a másodrendű parciális deriváltakat az $(x_0, y_0) = (1, 2)$ pontban!

(d) Írjuk fel a függvény Hesse-mátrixát! (10 pont) **(Megjegyezzük, hogy ehelyett pl. egy numerikus soros feladat is lehetett volna, vagy bármi a tanult feladattípusokból.)**

Megoldás:

$$(a)\ f'_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{x^2 - 2y^2}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2 - 2y^2) \cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 + 2y^2}{x^2 y} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}.$$

Vagy akár kiszámíthattuk volna a következőképpen is:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{2y}{x}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot 1 - 2y \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2} = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 y}.$$

Az y-szerinti parciális derivált pedig:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left(\frac{x}{y} - \frac{2y}{x}\right)'_y = x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) - \frac{2}{x} = \frac{-x^2 - 2y^2}{xy^2}.$$

(b) A gradiens vektor általában:

$$\nabla f(x,y) = \underline{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right),$$

$$f'_x(1,2) = \frac{1^2 + 2\cdot 2^2}{1^2 \cdot 2} = \frac{1+8}{2} = \frac{9}{2} \text{ és } f'_y(1,2) = \frac{-1^2 - 2\cdot 2^2}{1\cdot 2^2} = \frac{-1-8}{4} = -\frac{9}{4},$$

így a gradiens vektor az $(1,2)$ pontban:

$$\nabla f(1,2) = \underline{grad} f(1,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)\right) = \left(\frac{9}{2}, -\frac{9}{4}\right),$$

(c) A másodrendű parciális deriváltak a következők (most több egyenértékű jelölést használunk, de máskor elég csak egyiket ideírni):

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{x^2+2y^2}{x^2 y}\right)'_x = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2}\right)'_x =$$

$$= 0 + 2y\cdot (x^{-2})'_x = 0 + 2y\cdot(-2)\cdot x^{-3} = 2y\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right) = -\frac{4y}{x^3},$$

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{-x^2-2y^2}{xy^2}\right)'_y = \left(-\frac{x}{y^2} - \frac{2}{x}\right)'_y =$$

$$= -x\cdot(y^{-2})'_y = -x\cdot(-2)y^{-3} = 2xy^{-3} = \frac{2x}{y^3},$$

Young tétele miatt a vegyes másodrendű parciális deriváltak egyenlők, így mindegy, melyiket számítjuk ki:

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \left(\frac{x^2+2y^2}{x^2 y}\right)'_y = \left(\frac{1}{y} + \frac{2y}{x^2}\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{y^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{2y^2 - x^2}{x^2 y^2}.$$

Így ezekbe behelyettesítve az $x = 1$ és $y = 2$ értékeket, kapjuk, hogy

$$f''_{xx}(1,2) = -\frac{4\cdot 2}{1^3} = -8; \quad f''_{yy}(1,2) = \frac{2\cdot 1}{2^3} = \frac{1}{4},$$

míg a vegyes másodrendű parciális deriváltak

$$f''_{xy}(1,2) = f''_{yx}(1,2) = \frac{2\cdot 2^2 - 1^2}{1^2\cdot 2^2} = \frac{8-1}{4} = \frac{7}{4}.$$

(d) Tetszőleges kétváltozós f függvény Hesse-mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix}.$$

Ugyanezt szoktuk még a következőképpen is jelölni (ezt a jelölést is ismernünk kell!):

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x,y) & \partial_{12} f(x,y) \\ \partial_{21} f(x,y) & \partial_{22} f(x,y) \end{bmatrix}.$$

Az f függvény Hesse mátrixa:

$$\mathbf{f}''(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -\frac{4y}{x^3} & \frac{2y^2-x^2}{x^2y^2} \\ \frac{2y^2-x^2}{x^2y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{bmatrix}.$$