Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2019/2020/1. félév

Az 1. zh témakörei - Feladatok

A zh-n 4 feladat lesz a következő típusokból:

1. Feladat (Függvénykompozíció):

Legyen $f(x) = \sqrt{256 - x^4}$, $D_f = [-4, 4]$ és $g(x) = x^2$, $D_g = \mathbb{R}$. Írjuk fel az $f \circ g$ és $g \circ f$ összetett függvényeket, ha léteznek. (5 pont)

Megoldás:

$\exists f \circ g \Leftrightarrow R_g \cap D_f \neq \emptyset$.
$R_g \cap D_f = [0, \infty) \cap [-4, 4] = [0, 4] \neq \emptyset$.

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \in [-4, 4]\} = [-2, 2]$. $(0,5$ pont$)$

$f \circ g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{256 - x^8}$. (2 pont)
$\exists g \circ f \Leftrightarrow R_f \cap D_g \neq \emptyset$.
$R_f \cap D_g = [0, 16] \cap \mathbb{R} = [0, 16] \neq \emptyset$.

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [-4, 4] \mid \sqrt{256 - x^4} \in \mathbb{R}\} = [-4, 4]$. $(0,5$ pont$)$

$g \circ f : [-4, 4] \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left(\sqrt{256 - x^4}\right)^2 = 256 - x^4$. (2 pont)

2. Feladat (Polinom gyökeinek megkeresése és a gyöktényezős alakjának felírása):

A c valós paraméter mely értékére lesz $x_1 = -1$ gyöke a $p(x) = x^4 - x^3 + cx^2 + x + 6$ polinomnak? Írjuk fel a kapott c érték esetében a $p(x)$ polinom összes egész gyökét és a $p(x)$ polinom $\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakját! (5 pont)

Megoldás:

$x_1 = -1$ gyöke $p(x)$-nek $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow p(-1) = 0 \Leftrightarrow (-1)^4 - (-1)^3 + c(-1)^2 + (-1) + 6 = 0 \Leftrightarrow c = -7$. (1 pont)
$p(-1) = 0$, Bézout-tételből $\Rightarrow p(x)$ osztható $(x + 1)$-gyel.

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6) : (x+1) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\
\underline{x^4 + x^3} \\
\quad -2x^3 - 7x^2 \\
\quad \underline{-2x^3 - 2x^2} \\
\qquad\quad -5x^2 + x \\
\qquad\quad \underline{-5x^2 - 5x} \\
\qquad\qquad\quad 6x + 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{6x + 6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

(1 pont)

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ lehetnek csak $h(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ egész gyökei. $h(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$, így $x_2 = 1$ is gyöke a $p(x)$ polinomnak, Bézout-tételből $\Rightarrow$ $h(x)$ osztható $(x-1)$-gyel

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad -x^2 - 5x \\
\quad \underline{-x^2 + x} \\
\qquad -6x + 6 \\
\qquad \underline{-6x + 6} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

(1 pont)
$x^2 - x - 6 = 0$ egész gyökei $x_3 = -2$ és $x_4 = 3$.
Tehát $p(x)$ $\mathbb{Z}$-beli gyökei: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ és $x_4 = 3$, (1 pont)
$\mathbb{R}$-beli gyöktényezős alakja pedig

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-3). \text{ (1 pont)}$$

3. Feladat (Függvényhatárérték számítások):

Számítsuk ki a következő függvények határértékét:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}$; (2 pont)

b) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x$. (3 pont)

(Itt bármilyen, előadáson vagy gyakorlaton vett függvényhatárérték típus lehet, nem csak a fenti kettő.)

Megoldás:

a) $\frac{0}{0}$ esetünk van, ilyen típusnál bővítünk a "konjugálttal" és használjuk az $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ képletet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+9}-3)(\sqrt{x^2+9}+3)}{x(\sqrt{x^2+9}+3)}= \text{ (1 pont)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x(\sqrt{x^2+9}+3)}=\frac{0}{6}=0. \text{ (1 pont)}$$

b) 1^∞ esetünk van $\Rightarrow$ felírjuk az alapban levő kifejezést $(1+u)$ alakba, ahol $u\to 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{3x-2}\right)^{\frac{3x-2}{4}}\right]^{\frac{4x}{3x-2}}=$$
$$=\mathrm{e}^{\frac{4}{3}}, \text{ (2 pont)}$$

mert $\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{3x-2}=\frac{4}{3}$. (1 pont)

4. Feladat (Szakadási hely vizsgálata):

Vizsgáljuk az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(8x)}{\sin(4x)}, \text{ ha } x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)\setminus\{0\}\\ -1, \text{ ha } x=0\end{cases}$$

függvény szakadási helyét és adjuk meg ennek típusát is! (5 pont)

Megoldás:

Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), így f folytonos az $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\setminus\{0\}$ halmazon. Lehetséges szakadási hely csupán $x_1=0$. (1 pont)

$x_1=0$-ban:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(8x)}{\sin(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(8x)}{8x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\cdot\frac{8x}{4x}=\frac{8}{4}=2, \text{ (2 pont)}$$

mert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(8x)}{8x} = 1$ és $\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$ (nevezetes függvényhatárértékek) (1 pont).

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \neq -1 = f(0),$$

így $x_1 = 0$ megszüntethető szakadási helye (tehát elsőfajú szakadási helye) f-nek.

5. Feladat (Szakadási helyek vizsgálata):

Vizsgáljuk az

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-20}{x^2-x-12}, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\} \\ 0, \text{ ha } x \in \{-3; 4\} \end{cases}$$

függvény szakadási helyeit és adjuk meg azok típusát is! (5 pont)

Megoldás:

A racionális törtfüggvény nevezőjének megoldásai -3 és 4, a számláló megoldásai -5 és 4. Az elemi függvények folytonosak (értelmezési tartományukon), a racionális törtfüggvény pedig elemi függvény, így f folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$ halmazon. Lehetséges szakadási helyek: $x_1 = -3$ és $x_2 = 4$. (1 pont)

$x_1 = -3$-ban:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+x-20}{x^2-x-12} = \infty,$$

mert $\frac{-14}{-0}$ esetünk van, míg

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+x-20}{x^2-x-12} = -\infty,$$

mert $\frac{-14}{+0}$ esetünk van, így $x_1 = -3$ másodfajú szakadási hely. (2 pont)

$x_2 = 4$-ben:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4} f(x) &= \lim_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12} = \\ &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+5)}{(x-4)(x+3)} = \\ &= \lim_{x\to 4}\frac{x+5}{x+3} = \frac{9}{7} \neq 0 = f(4),\end{aligned}$$

így f-nek megszüntethető, azaz elsőfajú szakadása van $x_2 = 4$-ben. (2 pont)
(Megjegyezzük, hogy amennyiben pl. $f(4) = \frac{9}{7}$ lett volna, akkor $x_2 = 4$-ben f-nek nem lenne szakadása.)

6. Feladat (Derivált függvény kiszámítása):

Határozza meg $f'(x)$-et és hozzuk egyszerűbb alakba, ha

a) $f(x) = \frac{3x^4}{\sqrt{x+1}\cos x}$, $\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; (3 pont)

b) $f(x) = \sin\left(\frac{e^x+1}{e^{2x}}\right)$, $\quad x \in \mathbb{R}$. (2 pont)

Megoldás:

a)

$$\begin{aligned}\left(\frac{3x^4}{\sqrt{x+1}\cos x}\right)' &= \frac{(3x^4)'\sqrt{x+1}\cos x - 3x^4(\sqrt{x+1}\cos x)'}{(x+1)\cos^2 x} = \text{(1 pont)} \\ &= \frac{12x^3\sqrt{x+1}\cos x - 3x^4\left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cos x + \sqrt{x+1}(-\sin x)\right]}{(x+1)\cos^2 x} = \text{(1 pont)} \\ &= \frac{21x^4\cos x + 24x^3\cos x - 3x^4\cos x + 6x^4(x+1)\sin x}{2\sqrt{x+1}(x+1)\cos^2 x} \text{ (1 pont)}\end{aligned}$$

minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén.

b)

$$\left[\sin\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\right]' = \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)' =$$
$$= \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\frac{(\mathrm{e}^x+1)'e^{2x}-(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x})'}{\mathrm{e}^{4x}} = \text{ (1 pont)}$$
$$= \cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\cdot\frac{\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{4x}} =$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^x+2}{\mathrm{e}^{2x}}\cos\left(\frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^{2x}}\right),$$

minden $x\in\mathbb{R}$ esetén. (1 pont)

7. Feladat (Derivált kiszámítása, érintő egyenes egyenletének felírása):

Deriváljuk a következő függvényt és írjuk fel a függvény grafikonjának $x_0=0$ abszcisszájú pontjában az érintő egyenes egyenletét:

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x+5},\quad x>-5. \text{ (5 pont)}$$

Megoldás:

$$f'(x)=\frac{(\sqrt{2x^2+1})'(x+5)-\sqrt{2x^2+1}(x+5)'}{(x+5)^2} = \text{ (1 pont)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2\sqrt{2x^2+1}}\cdot 4x(x+5)-\sqrt{2x^2+1}\cdot 1}{(x+5)^2} =$$
$$=\frac{2x(x+5)-(2x^2+1)}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2} =$$
$$=\frac{10x-1}{\sqrt{2x^2+1}(x+5)^2}. \text{ (2 pont)}$$

$D_{f'}=(-5,\infty)$.
f grafikonjához az $x=x_0$ abszcisszájú pontban húzott érintő egyenes egyenlete:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0), \text{ (1 pont)}$$

$f'(0) = -\frac{1}{25}$, $f(0) = \frac{1}{5}$,
így a kért érintő egyenes egyenlete:

$$y - \frac{1}{5} = -\frac{1}{25}(x - 0), \text{ vagy } y = -\frac{1}{25}x + \frac{1}{5}. \text{ (1 pont)}$$

8. Feladat (Implicit függvény deriválása):

Számítsuk ki $y'(0)$ értékét a következő implicit függvény esetén:

$$x^3 + xy + y^3 = 27,\ x \in (0, \infty).\ \text{(5 pont)}$$

Megoldás:

Nem áll módunkban kifejezni y-t x függvényében, de mivel $0^3 + 0 \cdot y(0) + (y(0))^3 = 27$, az látható, hogy $y_0 = 3$. (1 pont)

Deriváljuk a képlet bal-, majd a jobb oldalát is (mindkét oldal akárhányszor differenciálható), végig szem előtt tartva, hogy $y = y(x)$, majd kifejezzük az $y'(x)$-et.

$$3x^2 + y + xy' + 3y^2y' = 0 \text{ (2 pont)}$$
$$y'(x + 3y^2) = -(3x^2 + y)$$
$$y' = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2}, \text{ (1 pont)}$$

azaz

$$y'(0) = -\frac{3 \cdot 0^2 + 3}{0 + 3 \cdot 3^2} = -\frac{1}{9}. \text{ (1 pont)}$$