A 2. Zh megoldása

A csoport:

1) A logaritmus azonosságok alkalmazása után számítsa ki az

$$f(x) := \ln \frac{\left(x^2+1\right)^4}{\sqrt{2+x}} \qquad (x > -2)$$

függvény deriváltját.
Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 := -1$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenesének az egyenletét. **(5 pont)**

Megoldás:

$$f'(x) = \left(4\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2+x)\right)' = \frac{8x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2+x} \left(= \frac{15x^2+32x-1}{2(2+x)(x^2+1)}\right).$$ **(1 pont + 2 pont)**

A kért érintő egyenes $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, **(1 pont)**

azaz: $y - 4\ln 2 = -\frac{9}{2}(x+1)$. **(1 pont)**

2) Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \left(\frac{x-4}{x-3}\right)^2 \qquad (x \in R \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját. **(10 pont)**

Megoldás:

a) $f \in D^2\left(R\setminus\{3\}\right)$, sőt, akárhányszor differenciálható az $R\setminus\{3\}$ halmazon, így:

$$f'(x) = 2\left(\frac{x-4}{x-3}\right)\frac{x-3-(x-4)}{(x-3)^2} = \frac{2(x-4)}{(x-3)^3}.$$ **(2 pont)**

b) Monotonitás, szélsőértékek:

$x \in (-\infty, 3)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő,

$x \in (3, 4)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő,

$x \in (4, +\infty)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő. **(1 pont)**

$x = 4$-ben lokális minimuma van, ez a lokális minimum érték pedig $f(4) = 0$. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény deriváltjának az előjelére való utalás.)

c) Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x) = 2\cdot\frac{(x-3)^3 - 3(x-4)(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{2(9-2x)}{(x-3)^4}.$$ **(2 pont)**

$x \in (-\infty, 3)$ esetén az f függvény konvex,

$x \in \left(3, \frac{9}{2}\right)$ esetén az f függvény konvex,

$x \in \left(\frac{9}{2}, +\infty\right)$ esetén az f függvény konkáv. **(1 pont)**

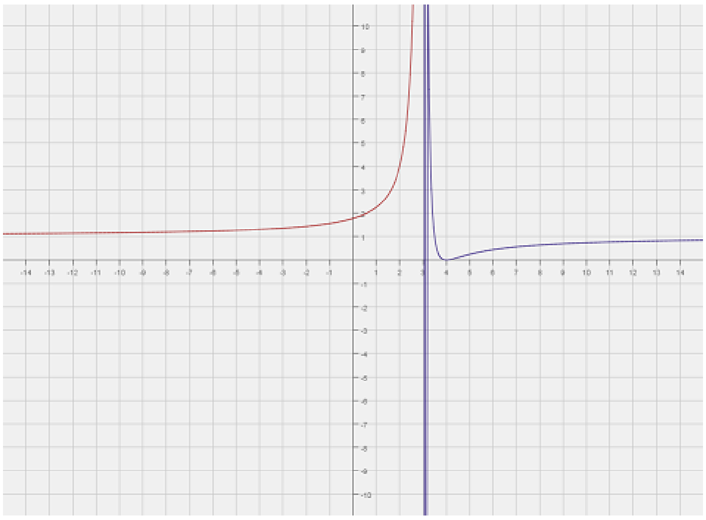
$x = \frac{9}{2}$-ben az f függvénynek inflexiós pontja van. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

d) Határértékek: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 3$ kétoldali függőleges aszimptota.

e) Aszimptoták ∞-ben és $(-\infty)$-ben: a d) pontból következik, hogy $y = 1$ aszimptota $\pm\infty$-ben. **(1 pont)**

f) Ábra:


. **(1 pont)**

3) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+100} dx \quad (x \in R)$,

b) $\int x^2 \cos(3x) dx \quad (x \in R)$ **(2 pont + 3 pont)**.

Megoldás:

a) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+100} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3e^{3x}}{e^{3x}+100} dx = \frac{1}{3} \ln\left(e^{3x}+100\right) + c$. **(2 pont)**

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int x^2\cos(3x)\,dx=\int x^2\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)' dx = x^2\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{2}{3}\int x\sin(3x)dx=$$

$$=x^2\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{2}{3}\left[-\frac{x\cos(3x)}{3}+\frac{1}{9}\sin(3x)\right]+c$$

ahol az első parciális integrálásnál $f(x)=x^2$ és $g'(x)=\cos(3x)$, míg a második parciális integrálásnál $f(x)=x$ és $g'(x)=\sin(3x)$. **(3 pont)**

B csoport:

1) A logaritmus azonosságok alkalmazása után számítsa ki az

$$f(x):=\ln\frac{\left(x^2+1\right)^2}{\sqrt{x-1}} \qquad (x>1)$$

függvény deriváltját.
Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0:=2$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenesének az egyenletét. **(5 pont)**

Megoldás:

$$f'(x)=\left(2\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(x-1)\right)'=\frac{4x}{1+x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\left(=\frac{7x^2-8x-1}{2(x-1)(x^2+1)}\right).$$ **(1 pont + 2 pont)**

A kért érintő egyenes $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, **(1 pont)**

azaz: $y-2\ln 5=\frac{11}{10}(x-2)$. **(1 pont)**

2) Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x):=\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^2 \qquad (x\in R\setminus\{-3\})$$

függvény grafikonját. **(10 pont)**

Megoldás:

a) $f\in D^2\left(R\setminus\{-3\}\right)$, sőt, akárhányszor differenciálható az $R\setminus\{-3\}$ halmazon, így:

$$f'(x)=2\left(\frac{x+4}{x+3}\right)\frac{x+3-(x+4)}{(x+3)^2}=-\frac{2(x+4)}{(x+3)^3}.$$ **(2 pont)**

b) Monotonitás, szélsőértékek:

$x\in(-\infty,-4)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő,

$x\in(-4,-3)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő,

$x \in (-3, +\infty)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő. **(1 pont)**

$x = -4$-ben lokális minimuma van, ez a lokális minimum érték pedig $f(-4) = 0$. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény deriváltjának az előjelére való utalás.)

c) Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{(x+3)^3 - 3(x+4)(x+3)^2}{(x+3)^6} = \frac{2(9+2x)}{(x+3)^4}.$$ **(2 pont)**

$x \in \left(-\infty, -\frac{9}{2}\right)$ esetén az f függvény konkáv,

$x \in \left(-\frac{9}{2}, -3\right)$ esetén az f függvény konvex,

$x \in (-3, +\infty)$ esetén az f függvény konvex. **(1 pont)**

$x = -\frac{9}{2}$-ben az f függvénynek inflexiós pontja van. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

d) Határértékek: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = -3$ kétoldali függőleges aszimptota.

e) Aszimptoták ∞-ben és $(-\infty)$-ben: a d) pontból következik, hogy $y = 1$ aszimptota $\pm\infty$-ben. **(1 pont)**

f) Ábra:

(1 pont)

.

3) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int x^3\left(3x^4+2\right)^{10}dx \quad (x\in R)$,

b) $\int x^2\sin(3x)dx \quad (x\in R)$ **(2 pont + 3 pont)**.

Megoldás:

a) $\int x^3\left(3x^4+2\right)^{10}dx=\frac{1}{12}\int 12x^3\left(3x^4+2\right)^{10}dx=\frac{1}{12}\cdot\frac{\left(3x^4+2\right)^{11}}{11}+c$. **(2 pont)**

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int x^2\sin\left(3x\right)dx=\int x^2\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)'dx=x^2\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)+\frac{2}{3}\int x\cos(3x)dx=$$

$$=-x^2\frac{\cos(3x)}{3}+\frac{2}{3}\left[\frac{x\sin(3x)}{3}+\frac{1}{9}\cos(3x)\right]+c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f\left(x\right)=x^2$ és $g'(x)=\sin(3x)$, míg a második parciális integrálásnál $f\left(x\right)=x$ és $g'(x)=\cos(3x)$. **(3 pont)**

C csoport:

1) A logaritmus azonosságok alkalmazása után számítsa ki az

$$f(x):=\ln\frac{\left(x^2+1\right)^5}{\sqrt{1-x}} \qquad \left(x<1\right)$$

függvény deriváltját.
Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0:=0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenesének az egyenletét. **(5 pont)**

Megoldás:

$$f'(x)=\left(5\ln(x^2+1)-\frac{1}{2}\ln(1-x)\right)'=\frac{10x}{1+x^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}\quad\left(=\frac{-19x^2+20x+1}{2(1-x)(x^2+1)}\right).$$ **(1 pont + 2 pont)**

A kért érintő egyenes $y-f(x_0)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, **(1 pont)**

azaz: $y=\frac{1}{2}\cdot x$. **(1 pont)**

2) Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x):=\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^2 \qquad \left(x\in R\setminus\{-3\}\right)$$

függvény grafikonját. **(10 pont)**

Megoldás:

a) $f \in D^2\left(R\setminus\{-3\}\right)$, sőt, akárhányszor differenciálható az $R\setminus\{-3\}$ halmazon, így:

$$f'(x)=2\left(\frac{x-4}{x+3}\right)\frac{x+3-(x-4)}{(x+3)^2}=\frac{14(x-4)}{(x+3)^3}.$$ **(2 pont)**

b) Monotonitás, szélsőértékek:

$x\in(-\infty,-3)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő,

$x\in(-3,4)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő,

$x\in(4,+\infty)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő. **(1 pont)**

$x=4$-ben lokális minimuma van, ez a lokális minimum érték pedig $f(4)=0$. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény deriváltjának az előjelére való utalás.)

c) Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x)=14\cdot\frac{(x+3)^3-3(x-4)(x+3)^2}{(x+3)^6}=\frac{14(15-2x)}{(x+3)^4}.$$ **(2 pont)**

$x\in(-\infty,-3)$ esetén az f függvény konvex,

$x\in\left(-3,\frac{15}{2}\right)$ esetén az f függvény konvex,

$x\in\left(\frac{15}{2},+\infty\right)$ esetén az f függvény konkáv. **(1 pont)**

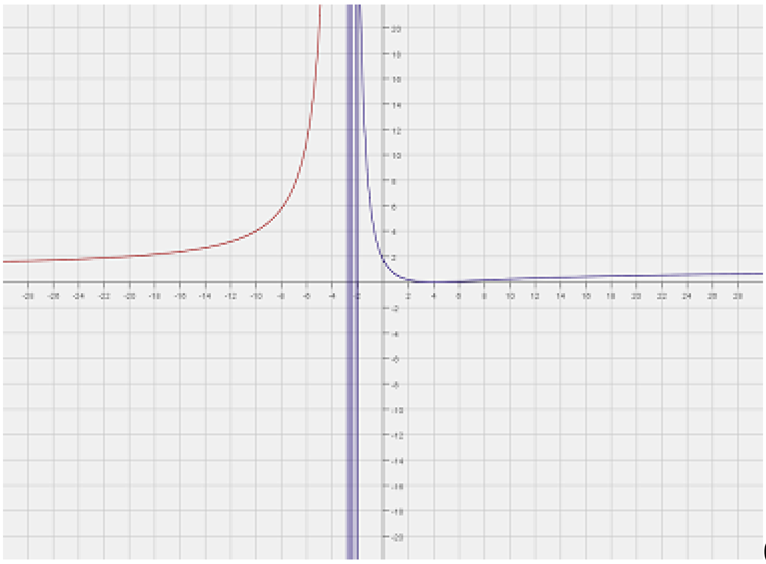
$x=\frac{15}{2}$-ben az f függvénynek inflexiós pontja van. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

d) Határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-3$ kétoldali függőleges aszimptota.

e) Aszimptoták ∞-ben és $(-\infty)$-ben: a d) pontból következik, hogy $y=1$ aszimptota $\pm\infty$-ben.
(1 pont)

f) Ábra:



(1 pont)

.

3) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

   a) $\int \frac{e^{6x}}{e^{6x}+1} dx \quad (x \in R)$,

   b) $\int x^2 \cos(5x) dx \quad (x \in R)$ **(2 pont + 3 pont)**.

Megoldás:

a) $\int \frac{e^{6x}}{e^{6x}+1} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6e^{6x}}{e^{6x}+1} dx = \frac{1}{6} \ln\left(e^{6x}+1\right) + c$. **(2 pont)**

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int x^2 \cos(5x)\, dx = \int x^2 \left(\frac{\sin(5x)}{5}\right)' dx = x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5} \int x \sin(5x) dx =$$

$$= x^2 \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{2}{5}\left[-\frac{x\cos(5x)}{5} + \frac{1}{25}\sin(5x)\right] + c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f(x) = x^2$ és $g'(x) = \cos(5x)$, míg a második parciális integrálásnál $f(x) = x$ és $g'(x) = \sin(5x)$. **(3 pont)**

D csoport:

1) A logaritmus azonosságok alkalmazása után számítsa ki az

$$f(x) := \ln \frac{\left(x^2+1\right)^4}{\sqrt{2-x}} \qquad (x < 2)$$

   függvény deriváltját.

Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 := 1$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő egyenesének az egyenletét. **(5 pont)**

Megoldás:

$$f'(x) = \left(4\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\ln(2-x)\right)' = \frac{8x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-x} \quad \left(= \frac{-15x^2+32x+1}{2(2-x)(x^2+1)} \right).$$ **(1 pont + 2 pont)**

A kért érintő egyenes $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, **(1 pont)**

azaz: $y - 2\ln 4 = \frac{9}{2}(x-1)$. **(1 pont)**

2) Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \left(\frac{x+4}{x-3}\right)^2 \qquad (x \in R \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját. **(10 pont)**

Megoldás:

a) $f \in D^2(R \setminus \{3\})$, sőt, akárhányszor differenciálható az $R \setminus \{3\}$ halmazon, így:

$$f'(x) = 2\left(\frac{x+4}{x-3}\right)\frac{x-3-(x+4)}{(x-3)^2} = -\frac{14(x+4)}{(x-3)^3}.$$ **(2 pont)**

b) Monotonitás, szélsőértékek:

$x \in (-\infty, -4)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő,

$x \in (-4, 3)$ esetén az f függvény szigorúan monoton növekvő,

$x \in (3, +\infty)$ esetén az f függvény szigorúan monoton csökkenő. **(1 pont)**

$x = -4$-ben lokális minimuma van, ez a lokális minimum érték pedig $f(-4) = 0$. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény deriváltjának az előjelére való utalás.)

c) Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x) = -14\cdot\frac{(x-3)^3 - 3(x+4)(x-3)^2}{(x-3)^6} = \frac{14(15+2x)}{(x-3)^4}.$$ **(2 pont)**

$x \in \left(-\infty, -\frac{15}{2}\right)$ esetén az f függvény konkáv,

$x \in \left(-\frac{15}{2}, 3\right)$ esetén az f függvény konvex,

$x \in (3, +\infty)$ esetén az f függvény konvex. **(1 pont)**

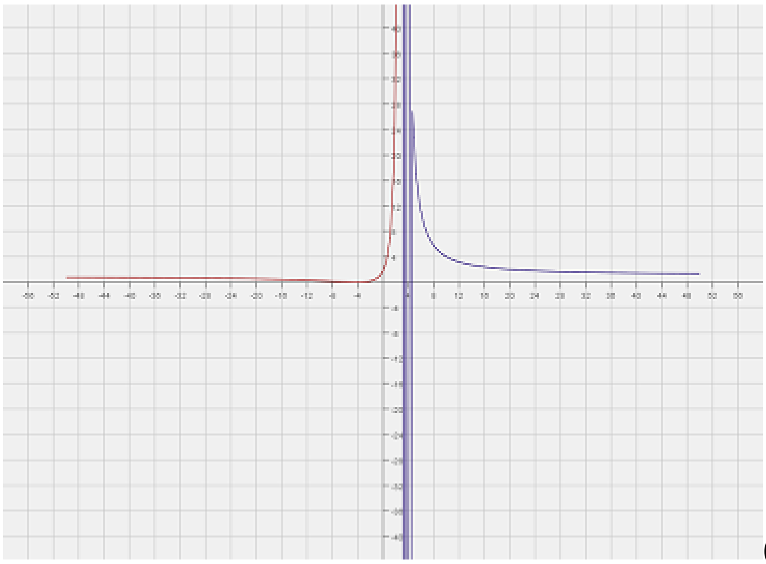
$x = -\frac{15}{2}$-ben az f függvénynek inflexiós pontja van. **(1 pont)**

(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

d) Határértékek: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to3} f(x)=+\infty \Rightarrow$ $x=3$ kétoldali függőleges aszimptota.

e) Aszimptoták ∞-ben és $(-\infty)$-ben: a d) pontból következik, hogy $y=1$ aszimptota $\pm\infty$-ben.
(1 pont)

f) Ábra:


(1 pont)

.

3) Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) $\int x^2\left(3x^3-2\right)^{20}dx \quad (x\in R)$,

b) $\int x^2\sin(5x)dx \quad (x\in R)$ **(2 pont +3 pont)**.

Megoldás:

a) $\int x^2\left(3x^3-2\right)^{20}dx=\frac{1}{9}\int 9x^2\left(3x^3-2\right)^{20}dx=\frac{1}{9}\cdot\frac{\left(3x^3-2\right)^{21}}{21}+c$. **(2 pont)**

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy:

$$\int x^2\sin\left(5x\right)dx=\int x^2\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right)'dx=x^2\left(-\frac{\cos(5x)}{5}\right)+\frac{2}{5}\int x\cos(5x)dx=$$

$$=-\frac{x^2\cos(5x)}{5}+\frac{2}{5}\left[\frac{x\sin(5x)}{5}+\frac{1}{25}\cos(5x)\right]+c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f\left(x\right)=x^2$ és $g'(x)=\sin(5x)$, míg a második parciális integrálásnál $f\left(x\right)=x$ és $g'(x)=\cos(5x)$. **(3 pont)**