Matematika A1a - Analízis, D kurzusok, 2019/2020/1. félév

A 2. Zh témakörei – Feladatok

A zárthelyi dolgozatban lesz egy teljes függvényvizsgálat feladat 10 pontért, ld. például a következő feladatot:

1. **Feladat:** Végezzünk teljes függvényvizsgálatot és ábrázoljuk az alábbi függvényt:

$f(x)=5-\dfrac{10x}{x^2+1}$, $x\in(-\infty,+\infty)$.   **(10 pont)**

Megoldás: Az f függvény kétszer is deriválható az értelmezési tartomány minden pontjában (mivel $\dfrac{10x}{x^2+1}$ racionális törtfüggvény) és

$$f'(x)=-\left(\frac{10\left(x^2+1\right)-10x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}\right)=-\frac{-10x^2+10}{\left(x^2+1\right)^2}=10\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}\ .\quad \textbf{(2 pont)}$$

Az $f'(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x^2-1=0$, $x_{1,2}=\pm 1$. Elkészítjük az elsőrendű derivált előjelét és a monotonitási íveket tartalmazó táblázatot, vagy külön vizsgáljuk f' előjelét és kapjuk a következőt:

Monotonitás és lokális szélsőértékek:

Ha $x\in(-\infty,-1)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő a $(-\infty,-1)$ intervallumon.

Ha $x\in(-1,1)$, akkor $f'(x)<0$, ezért f szigorúan monoton csökkenő a $(-1,1)$ intervallumon.

Ha $x\in(1,\infty)$, akkor $f'(x)>0$, ezért f szigorúan monoton növekvő az $(1,\infty)$ intervallumon.

Az $x_1=-1$ lokális maximumhely, $f(-1)=10$ lokális maximum érték, $x_1=1$ lokális minimumhely, $f(1)=0$ lokális minimum érték.   **(2 pont)**

Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.

Konvexitás, inflexiós pontok:

$$f''(x)=10\left(\frac{2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}\right)=\frac{20x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.\quad \textbf{(2 pont)}$$

Az $f''(x)=0$ egyenlet megoldásai:

$x_3=0$ vagy $x_{4,5}=\pm\sqrt{3}$.

Ha $x\in(-\infty,-\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(-\infty,-\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x\in(-\sqrt{3},0)$, akkor $f''(x)<0$, ezért f konkáv a $(-\sqrt{3},0)$ intervallumon.

Ha $x\in(0,\sqrt{3})$, akkor $f''(x)>0$, ezért f konvex a $(0,\sqrt{3})$ intervallumon.

Ha $x \in (\sqrt{3}, \infty)$, akkor $f''(x) < 0$, ezért f konkáv a $(\sqrt{3}, \infty)$ intervallumon.
Inflexiós pontok: $x_3 = 0$, $x_4 = -\sqrt{3}$ és $x_4 = \sqrt{3}$. **(2 pont)**

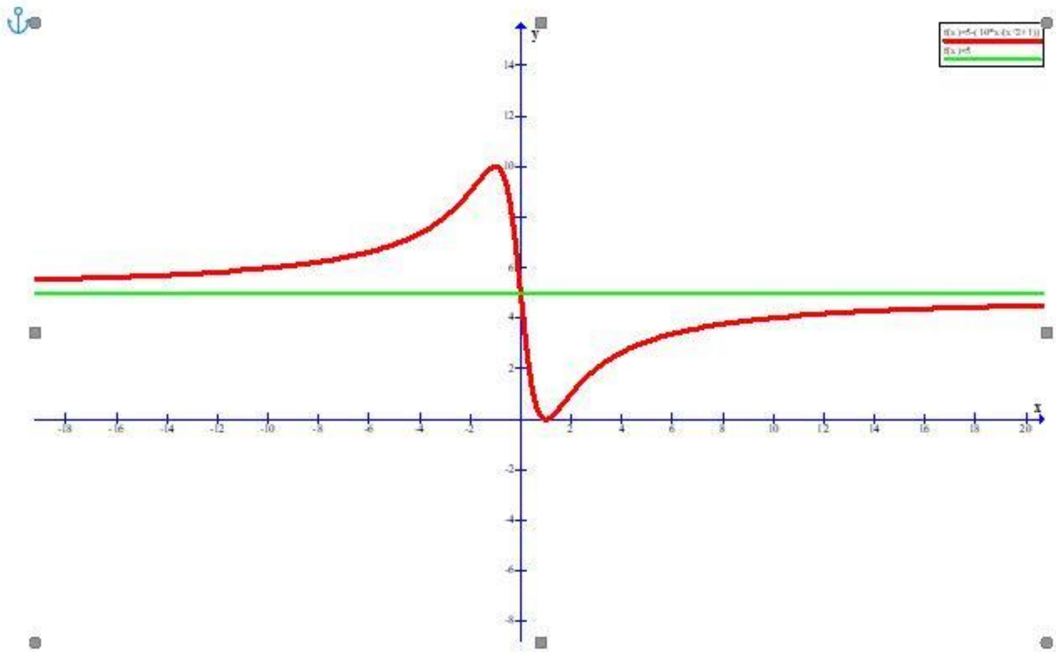
Megjegyzés: ha táblázatos alakban oldotta meg, nem szükséges külön összefoglalni, de akkor a táblázat utolsó sorába jelölésekkel be kell írni mindent, amit előbb felsoroltunk.
(Teljes pontszám csak indoklásért jár, ami vagy táblázat, vagy pedig a függvény másodrendű deriváltjának az előjelére való utalás.)

Határértékek és aszimptoták:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(5 - \frac{10x}{x^2+1} \right) = 5.$$

Tehát $\pm\infty$-ben az $y = 5$ vízszintes aszimptota. **(1 pont)**

Ábra:



(1 pont)

<u>Ezen kívül még 2 feladat lesz a következő típusokból:</u>

2. **<u>Feladat:</u>** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető típus:) $\int \frac{\ln(4x)}{x} dx$, $x > \frac{1}{4}$;
b) (Parciális integrálás bármelyik típusból:) $\int x^2 \cos(4x) dx$ $(x \in R)$ **(2+3 pont)**.

Megoldás:

a) Mivel $(\ln(4x))' = \frac{1}{4x}(4x)' = \frac{4}{4x} = \frac{1}{x}$, így

$$\int \frac{\ln(4x)}{x}\mathrm{dx} = \int [\ln(4x)]'\ \ln(4x)\mathrm{dx} =$$ **(1 pont)**

$$= \frac{[\ln(4x)]^2}{2} + c = \frac{\ln^2(4x)}{2} + c\ .$$ **(1 pont)**

b) Két egymás utáni parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\int x^2\cos(4x)\mathrm{dx} = \int x^2\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right)'\mathrm{dx} = x^2\frac{\sin(4x)}{4} - \frac{2}{4}\int x\sin(4x)\mathrm{dx} =$$

$$= x^2\frac{\sin(4x)}{4} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x\cos(4x)}{4} + \frac{1}{16}\sin(4x)\right] + c =$$

$$= x^2\frac{\sin(4x)}{4} + \frac{1}{8}x\cos(4x) - \frac{1}{32}\sin(4x) + c,$$

ahol az első parciális integrálásnál $f(x) = x^2$ és $g'(x) = \cos(4x)$, $f'(x) = 2x$ és $g(x) = \frac{\sin(4x)}{4}$.

A második parciális integrálásnál $f(x) = x$ és $g'(x) = \sin(4x)$, $f'(x) = 1$ és $g(x) = -\frac{\cos(4x)}{4}$.

Pontozás: *a két szereposztás (f és g' megadása) összesen* ***1 pont****ot ér, a két parciális integrálás helyes elvégzése* ***1-1 pont.***

3. **Feladat:** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

a) (Alapintegrálokra vezető nehezebb típus:)

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(2x)+1}}\mathrm{dx},\quad x \in \left(-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right);$$

b) (Könnyebb parciális integrálás:) $\int \ln(20x)\mathrm{dx}\quad (x > 0)$ **(3+2 pont).**

Megoldás:

a) Mivel $[tg(2x)+1]' = \frac{2}{\cos^2(2x)}$, integráljelen kívül osztunk, belül pedig szorzunk 2-vel és írhatjuk, hogy

$$\int \frac{5}{\left[\cos^2(2x)\right]\sqrt[3]{\mathrm{tg}\,(2x)+1}}\mathrm{dx} = \frac{5}{2}\int (\mathrm{tg}\,(2x)+1)'\left[\mathrm{tg}\,(2x)+1\right]^{-\frac{1}{3}}\mathrm{dx} =$$ **(2 pont)**

$$= \frac{15}{4}\left[\mathrm{tg}\,(2x)+1\right]^{\frac{2}{3}} + c.$$ **(1 pont)**

b) Parciális integrálással oldjuk meg. Szereposztás:

$f(x)=\ln(20x)$, $g'(x)=1$.

Így $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$. **(1 pont)**

$\int \ln(20x)\mathrm{dx}=\int x'\ln(20x)\mathrm{dx}=x\ln(20x)-x+c$. **(1 pont)**

4. **<u>Feladat:</u>** (Nehezebb deriválás, érintő egyenes felírással):

Legyen $f(x):=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})$, $x\in R\setminus\{-1\}$.

Írjuk fel az $x_0=0$ pontban az érintő egyenes egyenletét.

(5 pont).

Megoldás:

A függvény deriválható értelmezési tartományán és a deriváltat a szorzatfüggvény deriválási szabályával, valamint a láncszabály alkalmazásával számítjuk ki:

$$f'(x):=\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\right]'\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\left[\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})\right]'= \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$=3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\frac{(3x^2+\mathrm{e}^{2x})'}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}=$$

$$=3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\frac{6x+2e^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}=$$

$$=6\frac{(x-1)^2}{(x+1)^4}\ln(3x^2+\mathrm{e}^{2x})+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3\frac{6x+2e^{2x}}{3x^2+\mathrm{e}^{2x}}.$$

(**2 pont** – nem felbontható!)

Az érintő egyenes egyenlete: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (**1 pont**, nem felbontható, csak akkor adható meg, ha minden index tökéletes!)

A kért érintő egyenes egyenlete: $y-0=-2(x-0)$, azaz $y=-2x$. (**1 pont**)