

Tartalomjegyzék

1. axiómák	3
2. relációk	3
3. peano	4
4. törvények	4
5. dedekind, chantor, arhimedes	4
6. számosság	4
7. sorozatok	5
7.1. határérték	5
7.2. torlodási pont	6
7.3. bolzano-weierstrass	7
7.4. cauchy	7
7.5. e	7
8. sorok	8
8.1. cauchy	8
9. metrikus terek	8
10.függvények	9
10.1. folytonosság	9
10.1.1. pontban	9
10.1.2. intervallumon	10
10.2. elemi függvények	10
10.3. szakadás	11
11.deriválás	11
11.1. szabályok	12
11.2. elemi függvények deriváltja	12
11.3. közéértéktételek	14
11.4. l'hopital	14
11.5. magasabb rendű differenciálok	14
11.6. diszkusszió	14
11.7. bolzano-darboux	15

12.integrálás	15
12.1. szabályok	15
12.2. primitív függvények	16
12.3. határozott integrál	16
12.3.1. riemann	16
12.3.2. darboux	16
12.3.3. cauchy-schwarz-bunjakovszkij	17
12.3.4. középértéktétel	17
12.3.5. newton-leibniz	17
12.3.6. improprius integrál	17
12.4. racionális törtfüggvény	18

1. axiómák

1. műveleti

(a) kommutatív

$$a + b = b + a \quad ab = ba$$

(b) asszociatív

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a(bc) = (ab)c$$

(c) disztributív

$$a(b + c) = ab + ac$$

(d) egységelem

$$a + 0 = a \quad 1a = a$$

(e) negatív

$$a + b = 0$$

(f) reciprok

$$ab = 1$$

2. rendezési

(a) pozitivitástartás

$$a > 0; b > 0 \quad a + b > 0$$

(b) előjel

$$\forall \setminus \{0\} \quad a \vee -a$$

(c) 0

$$0 \neg + \wedge \neg -$$

(d) valós szám axióma

3. teljességi

Ha S valós, nem üres halmaz, amely felülről korlátos, akkor létezik egy egyértelműen meghatározott valós szám, amely S legkisebb felső korlátja.

2. relációk

1. $a < b$ azt jelenti, hogy $b + (-a)$ pozitív.

2. $a > b$ azt jelenti, hogy $b < a$.

3. $a \leq b$ azt jelenti, hogy $a < b \vee a = b$

4. $a \geq b$ azt jelenti, hogy $b \leq a$

3. peano

1. Van 1 természetes szám.
2. $\forall n$ természetes szához van 1, és csak 1 $n'(n \neq n')$ természetes szám. (Az n úgynevezett rákövetkezője.)
3. Van 1, és csak 1 természetes szám, amely egyetlen számnak sem a rákövetkezője. (jele: $0 \vee 1$)
4. Ha $n' = m' \rightarrow n = m$
5. Ha $\mathbf{N}_0$ a természetes számok $\mathbf{N}$ halmazának olyan részhalmaza, mely tartalmazza az 1-et (vagy 0-át), és $\forall n \in \mathbf{N}_0$ esetén $n' \in \mathbf{N}$ teljesül, akkor $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$
(a teljes indukció)

4. törvények

1. trichotómia

$$a < b \quad a = b \quad a > b \quad \text{csak az egyik teljesülhet}$$

2. tranzitivitás

$$a < b; b < c \rightarrow a < c$$

3. összeadás monotonitása

$$a < b \rightarrow a + c < b + c$$

4. szorzás monotonitása

$$a < b \wedge c \neq 0 \rightarrow ac < bc$$

5. dedekind, chantor, arhimedes

ezek ekvivalensek egymással
folytonossági axiómák

1. dedekind

Ha A és B az egyenes két részhalmaza, melyek közül egyik sem üres, és az egyik halmaz tetszőleges két pontja sohasem választható el a másik osztályba tartozó ponttal, akkor van olyan pont az egyenesen, mely minden olyan pontpárt elválaszt, melyeknek elemei különböző osztályokhoz tartoznak.

2. chantor

Minden valós számok beli, egymásba skatulyázott, zárt intervallumoknak van közös eleme.

3. arhimedes

$\approx$ két szakasz hosszának az összehasonlítása

6. számosság

1. alefnul

Megszámlálhatóan végtelen

2. kontinuum

Megszámlálhatatlanul végtelen

7. sorozatok

Megadás: formula, rekurzió, utasítás

1. korlátos

(a) alulról

Az $\{a_n\}$ sorozat alulról korlátos, ha létezik egy olyan k szám, hogy a sorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő ennél. A legnagyobb ilyen számot a sorozat infimumának hívunk.

(b) felülről

Az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos, ha létezik egy olyan K szám, hogy a sorozat minden tagja kisebb ennél. A legkisebb ilyen számot a sorozat szupremumának hívunk.

2. monoton

(a) növekvő

$$a_n \geq a_{n-1}$$

(b) szigorúan növekvő

$$a_n > a_{n-1}$$

(c) csökkenő

$$a_n \leq a_{n-1}$$

(d) szigorúan csökkenő

$$a_n < a_{n-1}$$

3. rész

Ha egy sorozatból végtelen tagot kiveszünk, az eredeti sorozatban lévő sorrendben, akkor a sorozatunknak egy részsorozatát kaptuk.

7.1. határérték

(a) konvergens

Akkor mondjuk, hogy egy sorozat konvergens, ha létezik olyan határérték, hogy bármely pozitív ϵ -hoz megadható a sorozatnak olyan tagja, hogy a sorozat utána következő elemei a határértéktől való eltérésük legfeljebb ϵ .

Jelölés:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

Tulajdonságok:

- i. Minden konvergens sorozat részsorozata is konvergens, és határértékük megegyezik.
- ii. Véges sok tag elhagyásával, vagy hozzávételével a sorozat konvergens marad, és a határérték nem változik.
- iii. Konvergens sorozat tagjainak felcserélésével is konvergens marad, és a határérték sem változik.
- iv. Két konvergens sorozat bármely összefésülése is konvergens, és a határérték változatlan.
- v. Bármely monoton, és korlátos sorozat konvergens.

Műveletek:

i.

$$a_n \pm b_n \rightarrow a \pm b$$

ii.

$$ca_n \rightarrow ca$$

iii.

$$a_n b_n \rightarrow ab$$

iv.

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Egyenlőtlenségek:

i. Ha $a_n \rightarrow a \wedge b_n \rightarrow b \wedge a < b$ akkor majdnem minden n -re igaz, hogy $a_n < b_n$

ii. Nemnegatív tagú sorozatok határértéke is nem negatív.

iii. rendőrlé

Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$ teljesül majdnem minden n -re, és $a_n \rightarrow a \wedge c_n \rightarrow a$ akkor $b_n \rightarrow a$

(b) divergens

Egy sorozat divergens, ha nincs határértéke.

i. végtelenbe való divergálás(valódi divergálás)

Minden valódi divergens sorozat minden részsorozata is divergens.

A. plusz

Akkor mondjuk, hogy a d_n sorozat a plusz végtelenbe divergál, ha bármely M -hez megadható olyan v index, hogy $n > v$, akkor $d_n > M$.

B. mínusz

Akkor mondjuk, hogy a d_n sorozat a mínusz végtelenbe divergál, ha bármely m -hez megadható olyan v index, hogy $n > v$, akkor $d_n < m$.

Állítások:

A. $d_n \rightarrow \infty$ akkor $-d_n \rightarrow -\infty$

B. $d_n \rightarrow \infty \wedge c_n \rightarrow c$ akkor $d_n \pm c_n \rightarrow \infty$

C. $d_n \rightarrow \infty \wedge c_n \rightarrow c \neq 0$ akkor $d_n c_n \rightarrow \pm\infty$, c előjelétől függ

D. $d_n \rightarrow \infty, |b_n| \leq K$, akkor $d_n \pm b_n \rightarrow \infty$

E. $d_n \rightarrow \infty, |b_n| \leq K$, akkor $\frac{b_n}{d_n} \rightarrow 0$

F. $d_n \rightarrow \infty \wedge e_n \rightarrow \infty$ akkor $d_n \pm e_n \rightarrow \infty \wedge d_n e_n \rightarrow \infty$

(c) oszcilláló

Egy sorozat oszcilláló, ha a tagjai felváltva váltalan előjelet.

7.2. torlódási pont

Az $\{a_n\}$ sorozatnak az α szám a torlódási pontja, ha kiválasztható az $\{a_n\}$ sorozatból egy α -hoz konvergáló részsorozat.

Korlátos sorozatnak van legnagyobb, és legkisebb torlódási pontja.

1. legnagyobb

Legnagyobb torlódási pont neve limesz superior.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

2. legkisebb

Legkisebb torlódási pont neve limesz inferior.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Egy sorozat akkor, és csak akkor konvergál, ha ez a két szám megegyezik.

7.3. bolzano-weierstrass

Korlátos, végtelen sorozatból kiválasztható legalább egy konvergens részsorozat.

7.4. cauchy

A konvergencia szükséges feltétele a korlátosság.

Elegendő is:

Ahoz, hogy egy $\{a_n\}$ sorozat konvergens legyen, szükséges, és elegendő, ha bármely pozitív ϵ -hoz magadható egy olyan $v = v(\epsilon)$ közsőszám, hogy ha $n, m > v$, akkor az $|a_n - a_m| < \epsilon$ egyenlőtlenség teljesüljön.

7.5. e

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Korlátos:

Binomális tétel alapján

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 3$$

Monoton:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1} \frac{1}{n+1} + \dots + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

elég megmutatni minden k -ra, hogy

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}$$

most egyszerűsítsük $k!$ -al az egészet, és a két oldalt külön-külön n -el, illetve $n+1$ -el.

$$1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 1 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Ez nyilvánvaló, mert ugyanannyi tényező van, illetve páronként nagyobbak.

8. sorok

Az $a_1 + \dots + a_n$ valós tagokból álló kifejezést végtelen valós számsornak nevezzük.
A $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ végtelen sor n -edik részletösszegének az $S_n = \sum_{i=1}^n$ véges összeget értjük.
 a_n -t a sor n -edik tagjának hívjuk.

1. konvergens

Egy sort konvergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből képzett sorozat konvergens.

2. divergens

Egy sort divergensnek nevezünk, ha a részletösszegeiből képzett sorozat divergens.

8.1. cauchy

A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor, és csak akkor konvergál, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz megadható olyan $v = v(\epsilon)$ közbübszám, hogy ha $n > m \geq v$, akkor $|\sum_{i=m}^n a_i| < \epsilon$

1. harmonikus

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \text{divergens}$$

2. geometriai

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \text{ geometriai sor konvergens, ha } |q| < 1, \wedge \sum = \frac{1}{1-q} \text{ és divergens, ha } |q| > 1$$

9. metrikus terek

Metrikus tér egy olyan (X, d) pár, ahol X tetszőleges halmaz, $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ pedig olyan nemnegatív valós szám értékű függvény, melyre tetszőleges $x, y, z \in X$ esetén:

1. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$ egyenlőségi tulajdonság
2. $d(x, y) = d(y, x)$ szimmetria
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ háromszög-egyenlőtlenség

1. teljes

Az (X, d) metrikus tér teljes, ha minden Cauchy-konvergens sorozat konvergens, azaz, ha az $x_0, x_1, \dots$ sorozat olyan, hogy $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ ha n és m mindketten végtelenhez tartanak, akkor van olyan $x \in X$ pont, hogy $x_n \rightarrow x$.

Minden metrikus tér izometrikusan beágyazható egy teljes metrikus térbe, és van olyan is, amiben a beágyazott tér képe sűrű¹.

Egy (X, d) metrikus tér lengyel tér, ha szeparábilis² és teljes.

2. diszkrét

Tetszőleges X halmaz metrikus térré tehető a diszkrét metrika segítségével, melyet a következőképp értelmezünk:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = y \\ 1 & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

¹
²

10. függvények

Az $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) függvény akkor, is csak akkor

1. szigorúan konvex

$$\frac{f(x') - f(c)}{x' - c} < \frac{f(d) - f(x'')}{d - x''}$$

2. konvex

$$\frac{f(x') - f(c)}{x' - c} \leq \frac{f(d) - f(x'')}{d - x''}$$

3. szigorúan konkáv

$$\frac{f(x') - f(c)}{x' - c} < \frac{f(d) - f(x'')}{d - x''}$$

4. konkáv

$$\frac{f(x') - f(c)}{x' - c} \leq \frac{f(d) - f(x'')}{d - x''}$$

bármely az $a \leq c < x' \quad x'' < d \leq b$ egyenlőtlenséget teljesítő c, d, x', x'' pontokra teljesül.

10.1. folytonosság

10.1.1. pontban

1. cauchy

Az $f(x)$ függvény folytonos az x_0 pontban, ha bármely pozitív ϵ -hoz megadható olyan pozitív $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

2. heine

Az $f(x)$ függvény folytonos x_0 pontban, ha minden olyan x_n sorozat, amely x_0 -hoz tart az $f(x_n)$ függvényérték sorozata az $f(x_0)$ függvényértékhez tart.

Balról, illetve jobbról való folytonosság:

1. bal

- (a) Az $f(x)$ függvény x_0 pontban balról folytonos, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz megadható olyan pozitív $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, hogy ha $x < x_0$, és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- (b) Az $f(x)$ függvény az x_0 pontban balról folytonos, ha bármely olyan x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén amelynek tagja $x_n < x_0$ teljesül, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

2. jobb

- (a) Az $f(x)$ függvény x_0 pontban jobbról folytonos, ha bármely $\epsilon > 0$ -hoz megadható olyan pozitív $\delta = \delta(\epsilon, x_0)$, hogy ha $x > x_0$, és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$
- (b) Az $f(x)$ függvény az x_0 pontban jobbról folytonos, ha bármely olyan x_0 -hoz konvergáló sorozat esetén amelynek tagja $x_n > x_0$ teljesül, $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Egy függvény x_0 pontban akkor, és csak akkor folytonos, ha balról, illetve jobbról is folytonos.

10.1.2. intervallumon

1. zárt

Egy $f(x)$ függvény zárt intervallumon folytonos, ha az intervallum belső pontjaiban folytonos, és a bal végpontjában jobbról, illetve a jobb végpontjában balról folytonos.

2. nyitott

Az $f(x)$ függvény egy nyitott intervallumon folytonos, ha az intervallum bármely pontjában folytonos.

Két függvény ha folytonos x_0 pontban, akkor az összegük és különbségük, szorzatuk, és hányadosuk is folytonos ott, ha a nevezőfüggvény x_0 pontban nem 0.

10.2. elemi függvények

1. pozitív egész kitevőjű gyökfüggvény

2. negatív egész kitevőjű gyökfüggvény

3. törtkitevős hatványfüggvény

4. exponenciális függvény

(a)

$$a^{x+y} = a^x + a^y$$

(b)

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

(c)

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

5. logaritmusfüggvény

(a)

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

(b)

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

(c)

$$\log_a x^y = y \log_a x$$

6. irracionális kitevőjű függvény

7. trigonometrikus függvény

(a)

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$

(b)

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$$

(c)

$$\tan(x) = \tan(x + \pi)$$

(d)

$$\cot(x) = \cot(x + \pi)$$

8. ciklometrikus függvények

A $\sin, \cos, \tan, \cot$ függvények inverzei.

9. előjelfüggvény

10. törtrészfüggvény

11. egészrészfüggvény

12. abszolútértékfüggvény

13. hiperbólikus függvény

(a)

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(b)

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(c)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(d)

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

10.3. szakadás

1. megszüntethető

Ha létezik x_0 -ban határérték, de az nem egyenlő a helyettesítése értékkel.

2. meg nem szüntethető

(a) 1 fajú

Ha létezik jobb, és bal oldali határérték x_0 -ban, de ezek különbözőek.

(b) 2 fajú

Ha vagy a jobb, vagy a bal, vagy egyik határérték se létezik x_0 -ban.

11. deriválás

1. Legyen $f(x)$ az x_0 pont valamely környezetében értelmezve. Ha az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $x \neq x_0$ differenciálhányados függvénynek létezik a véges az x_0 pontban, akkor az $f(x)$ függvény az x_0 pontban differenciálhatónak nevezzük. Ezt a határértéket az $f(x)$ függvény x_0 belső differenciálhányadosának nevezzük.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x)|_{x=x_0}$$

2. Az $f(x)$ függvény x_0 pontban differenciálható, ha létezik olyan c szám, hogy bármely $x_n \rightarrow x_0, x_n \neq x_0$ sorozat esetén

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \rightarrow c$$

3. Az $f(x)$ x_0 pontban differenciálható, ha van olyan c szám, hogy bármely $\epsilon > 0$ -hoz megadható olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $x \neq x_0$, akkor

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - c \right| < \epsilon$$

szükséges feltétel: folytonosság

11.1. szabályok

1.

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

2.

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

3.

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

4.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

5.

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

11.2. elemi függvények deriváltja

1. trigonometrikus

(a)

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

(b)

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

(c)

$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

(d)

$$(\cot(x))' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$$

2. ciklometrikus

(a)

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b)

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(c)

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

(d)

$$(\operatorname{arccctg})' = \frac{-1}{1+x^2}$$

3. hiperbólikus

(a)

$$(\sinh(x))' = \cosh(x)$$

(b)

$$(\cosh(x))' = \sinh(x)$$

(c)

$$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$$

(d)

$$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = -1 - \coth^2(x)$$

4. inverz hiperbólikus

(a)

$$(\operatorname{arsh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

(b)

$$(\operatorname{arch}(x))' = \frac{\pm 1}{x^2-1}$$

(c)

$$(\operatorname{artg}(x))' = \frac{1}{1-x^2}$$

(d)

$$(\operatorname{arcctg}(x))' = \frac{-1}{1-x^2}$$

5. logaritmus

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

6. exponenciális

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$$

11.3. közéértéktételek

1. lagrange

Ha $f(x)$ differenciálható és folytonos a véges zárt $[a, b]$ -n, és a nyitott $[a, b]$ -n van olyan c belső pont, ahol

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

2. rolle

Ha $f(x)$ folytonos a véges zárt $[a, b]$ -n, és differenciálható, a nyitott $[a, b]$ -n, továbbá ha $f(a) = f(b)$, akkor létezik legalább egy belső pont, ahol a differenciáhányados 0.

11.4. l'hospital

1. Ha $f(x)$ és $g(x)$ folytonos $[a, b]$ -n, és differenciálható (a, b) -n, $f(a) = g(a) = 0$, és ha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

2. Ha $f(x)$ és $g(x)$ deriválható (a, b) -n, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$, és ha $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ is létezik, és

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

11.5. magasabb rendű differenciálok

1. lagrange

Ha $f(x)$ és $g(x)$ n -szer deriválható egy x_0 pontban, akkor $f(x)g(x)$ is n -szer deriválható x_0 -ban, és

$$(f(x)g(x))_{x=x_0}^{(n)} = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} f^{(n-i)}(x)g^{(i)}(x)_{x=x_0}$$

2. taylor

Ha az $f(x)$ az a pont valamely környezetében n -szer deriválható, akkor minden ebbe a környezetbe eső x helyen érvényes a következő állítás:

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!}(x-a)^0 + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$

Hibahatár:

$$\frac{f^{(n)}(a + \vartheta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad 0 < \vartheta = \vartheta(x, n) < 1$$

11.6. diszkusszió

Ha nyitott (a, b) -n, $f'(x) = 0$ akkor (a, b) -n $f(x)$ konstans, azaz bármely $x_1, x_2 \in (a, b)$ -re $f(x_1) = f(x_2)$.

1. növekedés

- (a) Ha $f(x)$ az (a, b) intervallumon deriválható, akkor annak, hogy $f(x)$ (a, b) -n növekvő legyen, szükséges, és elegendő feltétele, hogy $f'(x) \geq 0$ (a, b) -n teljesüljön.

(b) szigorúan

A szigorúan növekedés szükséges, és elégséges feltétele, hogy $f'(x) \geq 0$ legyen, de a derivált (a, b) egyetlen részintervallumán sem lehet azonosan nulla.

2. csökkenés

(a) Ha $f(x)$ az (a, b) intervallumon deriválható, akkor annak, hogy $f(x)$ (a, b) -n csökkenő legyen, szükséges, és elegendő feltétele, hogy $f'(x) \leq 0$ (a, b) -n teljesüljön.

(b) szigorúan

A szigorúan csökkenés szükséges, és elégséges feltétele, hogy $f'(x) \leq 0$ legyen, de a derivált (a, b) egyetlen részintervallumán sem lehet azonosan nulla.

3. pontban növekvő

Ha $f'(x) > 0$, akkor létezik olyan $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallum, hogy ha $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_0 < x_2$ akkor $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, azaz az $f(x)$ függvény x_0 pontnál növekedő.

4. pontban csökkenő

Ha $f'(x) < 0$, akkor létezik olyan $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ intervallum, hogy ha $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x_0 < x_2$ akkor $f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$, azaz az $f(x)$ függvény x_0 pontnál csökkenő.

11.7. bolzano-darboux

Ha egy $f(x)$ deriválható (a, b) -ben, és $x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ továbbá c tetszőes szerinti olyan érték, amelyre ha $f'(x_1) < c < f'(x_2)$, akkor van olyan $\epsilon \in (x_1, x_2)$, hogy $f'(\epsilon) = c$

12. integrálás

12.1. szabályok

1.

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx$$

2.

$$\int (c \cdot f) dx = c \cdot \int f dx$$

3.

$$\int (f \cdot g') dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx$$

4.

$$\int \left(\frac{f'}{f} dx \right) = \ln |f| + C$$

5.

$$\int (f^n \cdot f') dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$$

12.2. primitív függvények

1. triginometrikus

(a)

$$\int \sin(x) = -\cos(x)$$

(b)

$$\int \cos(x) = \sin(x)$$

(c)

$$\int \tan(x) = -\ln |\cos(x)|$$

(d)

$$\int \cot(x) = \ln |\sin(x)|$$

2. hiperbólikus

(a)

$$\int \sinh(x) = \cosh(x)$$

(b)

$$\int \cosh(x) = \sinh(x)$$

(c)

$$\int \tanh(x) = \ln |\cosh(x)|$$

(d)

$$\int \operatorname{ctgh}(x) = \ln |\sinh(x)|$$

12.3. határozott integrál

12.3.1. riemann

A korlátos $f(x)$ függvény az $[a, b]$ véges intervallumon Riemann-integrálhatónak nevezzük, ha ha Darboux-féle alsó integráltja egyenlő a felső integráljával. Ezt a közös értéket nevezzük $f(x)$ függvény $[a, b]$ intervallumon vett Riemann-integráljának.

12.3.2. darboux

Legyen $f(x)$ egy korlátos függvény az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor bármely pozitív ϵ -hoz megadható olyan pozitív $\delta = \delta(\epsilon)$, hogy bármely olyan β beosztásra, amelynek finomsága kisebb, mint δ ($|\beta| < \delta$), teljesülhet a következő egyenlőtlenség:

$$\int_a^b f(x)dx - \underline{s}(f, \beta) < \epsilon \wedge \overline{s}(f, \beta) - \int_a^b f(x)dx < \epsilon$$

12.3.3. cauchy-schwarz-bunyakovszkij

Ha $f(x)$ korlátos, és integrálható függvények $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

12.3.4. középértéktétel

Ha $[a, b]$ intervallumon az $f(x) \wedge g(x)$ integrálható függvény, és $g(x)$ jeltartó is ezen az intervallumon, akkor létezik olyan μ valós szám, amelyre

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad \wedge \quad \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \mu \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

12.3.5. newton-leibniz

Ha az $f(x)$ korlátos, és folytonos az $[a, b]$ nyitott intervallumon, a $\varphi(x)$ függvény pedig ezen az intervallumon a primitív függvénye, továbbá $\varphi(x)$ zárt és folytonos $[a, b]$ -n, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

12.3.6. improprius integrál

1. véges sok pontban nem értelmezett függvény

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ véges intervallumban az $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ pontok kivételével mindenütt értelmezve van, és korlátos. Legyen $\varphi(x)$ egy olyan korlátos függvény, amely $[a, b]$ intervallum minden pontjában értelmezve van, és a fenti $x_i (i = 1 \dots n)$ pontok kivételével $\varphi(x) = f(x)$. Ha $\varphi(x)$ integrálható, akkor az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon improprius értelemben integrálhatónak nevezzük, és $f(x)$ improprius integrálját $\varphi(x)$ integráljával definiáljuk, azaz

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b \varphi(x)dx$$

2. nem korlátos függvény

Tegyük fel, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van az $[a, b]$ intervallumban minden pontjában, de az a pont környezetében nem korlátos. Ha az $f(x)$ függvény bármely $[a + \epsilon, b] (0 < \epsilon < b - a)$ intervallumon integrálható, és a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$ határérték létezik, akkor ezt az $f(x)$ függvény az $[a, b]$ intervallumon improprius integráljának hívjuk, és integrálja definíció szerint ez a határérték, azaz

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

3. végtelen intervallumon vett függvény

Legyen az $f(x)$ függvény bármely $x \geq a$ helyen értelmezve, és tegyük fel, hogy bármely véges $a \leq x \leq b$ intervallumon integrálható. Ha $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ határérték létezik, akkor ezt az $f(x)$ függvénynek az $[a, \infty]$ intervallumon vett improprius integráljának nevezzük. Azaz

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

12.4. racionális törtfüggvény

1.

$$\int \frac{c}{ax+b} dx = \int \frac{c}{a} \frac{1}{x + \frac{b}{a}} dx = \frac{c}{a} \int \frac{1}{y} dy \quad a \neq 0 \quad y = x + \frac{b}{a}$$

2.

$$\int \frac{c}{(ax+b)^n} dx = \int \frac{c}{a} \frac{dy}{y^n} = \frac{cy^{1-n}}{a(1-n)} \quad n \geq 2 \quad a \neq 0 \quad y = ax+b$$