

Kombinatorika és gráfelmélet

Pejő Balázs

Tartalomjegyzék

1. leszámolási problémák	2
1.1. permutáció	2
1.1.1. ismétlés nélküli	2
1.1.2. ismétléses	2
1.2. variáció	2
1.2.1. ismétlés nélküli	2
1.2.2. ismétléses	2
1.3. kombináció	2
1.3.1. ismétlés nélküli	2
1.3.2. ismétléses	2
1.3.3. binomális tétel	2
1.3.4.	2
1.3.5.	3
1.3.6.	3
1.3.7.	3
1.3.8.	3
1.4. skatulya-elv	3
1.5. szita-módszer	3
2. gráfelmélet	4
2.1. kneser gráf	4
2.2. feszítő részgráf	4
2.3. feszített részgráf	4
2.4. prüfer-kód	4
2.4.1. cayley-tétel	4
2.5. kruskal algoritmus	4
2.6. euler-kör	4
2.6.1.	4
2.6.2. kínai postás-probléma	4
2.7. hamilton-kör	5
2.7.1. dirac	5
2.7.2. pósa	5
2.7.3. chvatal	5
2.7.4. ore	5
2.8. párosítások	6
2.8.1. hall	6
2.8.2. frobenius	6
2.8.3. gallai	6
2.8.4. könig	7
2.8.5. tutte	7

2.8.6.	petersen	7
2.8.7.	stabil párosítás	7
2.8.8.	gale-shapley	7
2.9.	pontszínezés	8
2.9.1.	brooks	8
2.9.2.	mycielski konstrukció	8
2.10.	élszínezés	8
2.10.1.	vizing	8
2.11.	hálózatok	9
2.11.1.		9
2.11.2.	ford-fulkerson	9
2.11.3.	edmonds-karp	9
2.11.4.	egészértékűségi lemma	9
2.12.	mengere	9
2.12.1.		9
2.12.2.		9
2.13.	összefüggések	10
2.13.1.		10
2.13.2.	mengere	10
2.13.3.	dirac	10
2.13.4.	petersen	10

1. leszámolási problémák

1.1. permutáció

1.1.1. ismétlés nélküli

$$n!$$

1.1.2. ismétléses

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

1.2. variáció

1.2.1. ismétlés nélküli

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

1.2.2. ismétléses

$$n^k$$

1.3. kombináció

1.3.1. ismétlés nélküli

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

1.3.2. ismétléses

$$\binom{n+k-1}{k}$$

1.3.3. binomális tétel

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot x^{n-i} \cdot y^i$$

1.3.4.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

1.3.5.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

1.3.6.

$$\sum_{i=0}^n 2^i \cdot \binom{n}{i} = 3^n$$

1.3.7.

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+n}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$

1.3.8.

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$$

1.4. skatulya-elv

Ha n darab dolgot kell $n-1$ helyre tenni, akkor biztos lesz olyan, ahol 2 db van.

1.5. szita-módszer

PL.:
első 1000 számban hány db osztható 2,3,5 el?

2. gráfelmélet

2.1. kneser gráf

$KG_{n,k}$ $V(K) = \binom{n}{k}$ $E(K) =$ diszjungt halmazok vannak összekötve

2.2. feszítő részgráf

G gráf összes pontját tartalmazza.

2.3. feszített részgráf

G gráf egy részgráfja akkor feszített, ha a részgráf pontjai által meghatározott összes él (ami G gráfnak is éle) eleme a részgráfnak.

2.4. prűfer-kód

Címkézett pontokon, mindig a legkisebb szomszédját írjuk le.

2.4.1. cayley-tétel

n címkézett ponton n^{n-2} fa adható meg.

BIZ.:

A kód definíciójából adódik, hogy minden fához tartozik kód, illetve hogy az egyértelmű. Minden kodhoz tartozik egy gráf, mert a pontcímkék visszafejtéséből tudunk egyet rajzolni. az hogy ez a gráf fa azért van, mert ha lenne benne kör, akkor mikor a kör utolsó pontját íránk fel, az már volt, így ezt az algoritmus nem engedi.

2.5. kruskal algoritmus

Mohó algoritmus: Mindig a legkisebb súlyú, az eddigiekkel kört nem alkotó élt választjuk ki. Ez az algoritmus minimális súlyú feszítőerdőt ad.

BIZ.:

Tegyük fel hogy van kisebb minimális feszítőerdő G gráfon (Legyen T_{opt}). Az algoritmusunk által meghatározott erdő legyen T_{alg} . Ha van éle t_{opt} -nak, T_{alg} -on kívül (tehát nem ugyanaz a két gráf), nevezzük ezt b -nek, és adjuk hozzá t_{alg} -hoz. Így ebben a gráfban keletkezett egy kör, viszont ebből akkor el lehet hagyni egy élt, ami az algoritmus miatt kisebbnek kéne lennie b -nél, de nagyobb, mint T_{opt} miatt, így $T_{alg} < T_{opt}$.

2.6. euler-kör

G gráf $\forall$ élét tartalmazó kör.

2.6.1.

Akkor, és csak akkor van, ha G gráf $\forall$ fokszáma páros.

2.6.2. kínai postás-probléma

Tegyük fel, hogy minden fokszám páratlan. Ekkor minden élt meg kell duplázni, így ez az utvonat maximális hossza $2 \cdot E(G)$.

2.7. hamilton-kör

G gráf $\forall$ pontját tartalmazó kör.
SZÜKSÉGES FELTÉTEL:

Ha G gráfban létezik k olyan pont, amelyeket elhagyva a gráf több mint k komponensre esik szét, akkor nincs Hamilton-kör. ($k+1$ -el hamilton-út)

BIZ.:

Ha van benne hamilton kör, és más él nem, akkor k pontot elhagyva a kör $k-1$ komponensre esik szét. Tehát ha k -ra szeretnénk hogy széttessen, az lehetetlen, vagy nincs benne Hamilton-kör.

ELÉGSÉGES FELTÉTELEK:

2.7.1. dirac

$\forall$ pont foka min. $\frac{n}{2}$ akkor van.

2.7.2. posa

$d_1 < d_2 < \dots < d_n$ $k := 0, 1, \dots, n$ ha $\forall k < \frac{n}{2}$ -re igaz hogy $d_k > k+1$ akkor van.

posa $\rightarrow$ ore.:

Azaz ore feltételéből következik a posa feltétel. Tegyük fel hogy van egy gráf mire ore feltétele igaz, de posaé nem. Tehát $d_1 < d_2 < \dots < d_k < k < \frac{n}{2}$. Tehát bármely kettő fokösszege kisebb mint n . Mivel az ore feltétel igaz a gráfra ezért ezek mind összekötött pontok. Tehát ezek össze vanna kötve -1 csuccsal, azaz legfeljebb egy csucs mehet a másik részgráfba. Mivel a k -nál kisebb fokú csucok kevesebben vanna mint $\frac{n}{2}$ ezért a másik részgráfban mindenépp lesz egy ezekkel összeköttetlen pont. Legyen ez y . $d(y) \leq n - k - 1$. Bármely kis fozámú csúccsal ennek a fokösszege $d(y) + d(x) = n - k - 1 + k = n - 1$ ami nemlehet, ugyanis a gráfban igaz az ore feltétel. Vagyis ha egy gráfra teljesül az ore feltétel, akkor a posa is.

2.7.3. chvatal

A:

Ha $\forall d_k < k < \frac{n}{2}$ -re igaz hogy $d_{n-k} \geq n - k$ akkor van.

B:

Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor van olyan G' gráf amire aminek a fokszámai $d'_1 \leq d'_2 \dots$, és $d'_i \geq d_i$ akkor nincs benne hamilton kör.

BIZ.:

A:

Nézzünk egy ellenpéldát. Adjunk hozzá éleket addig, míg épphogy nem lesz benne Hamilton-kör. E gráf bármely két pontja között lesz hamilton-út. Nézzük azt az $\{x, y\}$ pontpárt, melyek nincsenek összekötve, és maximális a fokszámuk. x -ből vezet út y -ba, és ez az út bármely pontjával össze van kötve x , akkor $d(y) \leq n - 1 - d(x) \rightarrow d(x) + d(y) \leq n - 1$.

Legyen $d(x) \leq d(y)$ $d(x) := h$. Állítás: $d_h \leq h < \frac{n}{2}$. Ez azért igaz, mert y -nak van h darab nemszomszédja, amelyek kisebbek, mint $d(x)$, mert különben x helyett az választottuk volna. Ha ez igaz, akkor $d_{n-h} \geq n - h$ -nak is igaznak kell lennie a tétel alapján. $h+1$ csúcs fokszáma nagyobb mint $n-h$. Mivel x nek h szomszédja van, így ezek közül az egyik biztos nem az. Nevezzük ezt z -nek. Tehát $h + d(z) \geq n$, ami ellentmondás, két összeköttetlen csúcs fokösszege maximum $n-1$. Tehát az állítást igazoltuk.

B:

Ha a feltétel nem teljesül, akkor van egy k , hogy $d_k < \frac{n}{2} \wedge d_{n-k} \leq n - k - 1$.

2.7.4. ore

Ha $\forall$ szomszédos pontpárra igaz hogy $d(x) + d(y) \geq n$ akkor van.

BIZ.:

Indirekten tegyük fel, hogy a feltételek igazak, de nincs a gráfban Hamilton-kör. Vegyünk még éleket a gráfhoz úgy, hogy továbbra se legyen ham. kör, de még egy él felvételével már lenne. Erre a G' gráfra továbbra is igaz a feltétel. Mivel egy él hozzávételével lenne hamilton-kör, így G' -ben van hamilton út. Legyen ez $z_1, z_2, \dots, z_k$ $x = z_1, y = z_k$. Ha x szomszédos z_k valamely pontjával, akkor y nem ldhet összekötve z_{k-1} -el, mert hamilton-kört adna. Így tehát nem lesz összekötve legalább $d(x)$ pontal, azaz $d(y) \leq n - 1 - d(x)$, ami viszont ellentmondás.

2.8. párosítások

G gráf akkor és csak akkor páros, ha $\forall$ köre páros hosszúságú.
teljes páros gráf: ha minden A -beli pont össze van kötve minden B -beli pontal.

2.8.1. hall

$G = (A, B)$ gráfban akkor és csak akkor van A -t lefedő párosítás, ha $\forall X \subseteq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$.
BIZ.:

Fordítva is igaz. Tf. hogy van egy $M \subset A$ párosításunk, és egy $u \notin M$. Ha u -nak van szomszédja $B \setminus M'$, akkor ezt az élet hozzávesszük M párosításhoz. Ha csak M belső pontal van összekötve, akkor keresnünk kell egy alternáló utat, aminek első és utolsó eleme $\notin M$ -nek, és $\forall 2$. éle M belső. Ha ez nem lehetséges, akkor az új párosításunk lefoglalja A -t, mert ha u nem lenne benne M -ben, de lenne egy pont ami u szomszédja, és $\in T'$, és $T' \in M'$, akkor $N(T') = N(M \cup \{u\}) \geq T$ nem lenne igaz.

2.8.2. frobenius

$G = (A, B)$ gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha $|A| = |B|$ és $|N(X)| \geq |X| \forall X \subseteq A$ -ra.

2.8.3. gallai

$\nu(G)$: (nú) legnagyobb független élhalmaz
 $\tau(G)$: (tau) legkisebb lefoglaló ponthalmaz
 $\alpha(G)$: (alfa) legnagyobb független ponthalmaz
 $\rho(G)$: (ró) legkisebb lefoglaló élhalmaz

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

BIZ.:

Legyen M egy maximális méretű független élhalmaz. M éleinek a lefoglalásához már $\nu(G) = M$ pontra van szükség, ezért $\tau(G) \geq |M|$

$$\alpha(G) \leq \rho(G)$$

BIZ.:

Legyen M egy maximális méretű független ponthalmaz. M pontjaimak a lefoglalásához már $\alpha(G) = M$ pontra van szükség, ezért $\rho(G) \geq |M|$

$$\tau(G) + \alpha(G) = |V(G)|, \text{ minden hurokmentes gráfban}$$

BIZ.:

Egy X halmaz pontjai csak akkor függetlenek, ha $|V(G)| - X$ lefoglaló ponthalmaz. Tehát $\tau(G) \leq |V(G) - X| \rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \leq |V(G)|$. Hasonlóan be lehet látni $\alpha(G) \geq |V(G) - Y|$ minden lefoglaló ponthalmazra. $\rightarrow \tau(G) + \alpha(G) \geq |V(G)|$

$$\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|, \text{ ahol nincs izolált pont}$$

BIZ.:

$\nu(G)$ darab független élhalmaz $\nu(G)$ pontot fog le. A többi pont legfeljebb $|V(G)| - 2\nu(G)$ éllel lefoglalható.

Tehát, $|V(G)| - \nu(G) \geq \rho(G)$. Azt is tudjuk, hogy ha A egy minimális lefogó élhalmaz, akkor A k darab csillagból áll. Ezért $\rho(G) = |V(G)| - k$. Ebből kaphatunk úgy egy független élhalmazt, hogy minden csillagból kiválasztunk egy élet. Tehát $\nu(G) \geq k = |V(G)| - \rho(G)$.

2.8.4. köning

$\nu(G) = \tau(G)$
 $\alpha(G) = \rho(G)$, akkor ha nincs izolált pont.
 BIZ.:

A hall tételénél láttuk, hogy $N(T \cup \{u\}) = T$, ugyanis u benne van T' -ben, így $T \cup M' \setminus T$ minden élet lefog. $T \cup M' \setminus T = |M| = \rho(G)$. Innen $\rho(G) \geq \tau(G)$, de minden gráfra pon az ellenkezője igaz, így páros gráfnál egyenlőség áll fent. A gallai azonosságokból rögtön látszik a másik egyenlőség is.

2.8.5. tutte

G -ben akkor és csak akkor létezik teljes párosítás ha $\forall X \subseteq A$ -ra $c_p(G - X) \leq |X|$
 (x pontot elhagyva a gráfból kevesebb mint x páratlan komponensre esik szét, akkor van teljes párosítás)
 BIZ.:

Indirekten tegyük fel, hogy igaz a feltétel, de nincs teljes párosítás. Legyen G egy ilyen minimális pontszámú ellenpéllda. $Y \subseteq V(G)$ gátnak hívunk ha $c_p(G - Y) = |Y|$. Legyen Y_0 egy maximális elemszámú ilyen halmaz.

1. Belátjuk hogy nincs páros komponens. Ha lenne, egy elemet kivéve belőle és Y_0 ba téve lenne egy nagyobb gátunk, ami a feltétel szerint lehetetlen.

2. Belátjuk, hogy minden páratlan komponensben egy tetszőleges pontot elhagyva van teljes párosítás. Tudjuk, hogy $c_p(W \setminus (X \cup \{y\})) \geq |x| + 2$, ahol W egy páratlan komponens, X ennek egy maximális párosítása, y pedig az a pont amek Y_0 hoz van párosítva. Tehát $c_p(G - (Y_0 \cup X \cup \{y\})) \geq |Y_0| - 1 + |X| + 2 = |Y_0| + |X| + 1 = |Y_0 \cup X \cup \{y\}|$, tehát lenne egy nagyobb gát.

3. Belátjuk, hogy a páratlan komponensekből egy pont párosítható Y_0 -ból az egyik elemhez. Hagyuk el az Y_0 on belül futó éleket. Így egy páros gráfunk marad. A hall feltétel teljesül, ugyanis minden pontból fut egy él legalább Y_0 -ba, mert ha nem, akkor Y_0 -nak p pontját elhagyva p darab páratlan komponens keletkezne az eredeti gráfban.

2.8.6. petersen

Ha G 3-reguláris és 2-szeresen élöszefüggő, akkor létezik benne teljes párosítás.
 BIZ.:

Tutte bizonyítását használjuk. Minden Y_0 és páratlan komponens között legalább 3 él fut, mert 1 nem futhat az összefüggőség miatt, 2 sem, mert akkor a komponensen belül futó élet összesen páratlan sokan vannak, amit 2 szer levölva is páratlan szám marad ami lehetetlen. Tehát $t \geq 3c_p(G - Y_0)$, és mivel 3 reguláris a gráf, így $c_p(G - Y_0) \leq |Y_0|$. Innen tutte tételéből következik.

2.8.7. stabil párosítás

Egy G gráf $M \subseteq E(G)$ stabil, ha nem létezik olyan $e \in E(G) \setminus M$, amely e két végpontjára igaz, hogy ők egymás preferencialistáin mint aktuális párjuk.

2.8.8. galey-shapley

Páros gráf tetszőleges preferencialisták esetén is stabil.
 BIZ.:

Algoritmus: A beli elemen menek B beli elemekhez, a listájuk sorrendjében, B -k félreteszik a legjobb ajánlatot, köv. körbe A -k mennek tovább, stb...

2.9. pontszínezés

klikkszám($\omega(G)$):(omega)
 egy maximálisan nagy olyan részgráf, ami teljes .
 kromatikus szám($\chi(g)$):(kí)
 a gráf színezésénél használt színek minimális száma
 $\forall \omega(G) < \chi(g)$, ha perkekt akkor egyenlő

2.9.1. brooks

$$\chi(G) \leq \Delta$$

Δ :maximális fokszám, ha G gráf nem egy páratlan hosszú kör, vagy teljes gráf.

BIZ.:

$\Delta = 2$, ekkor igaz. Tegyük fel hogy $\delta > 2$. elég 2-szeresen összefüggő gráfokkal foglalkoznunk, ugyanis ha az x pontot elhagyva 2 komponensre esik, ott a fokszámok nem nőhetnek, illetve x -nek is csak csökkent. Így a feltétel miatt ki tudjuk színezni Δ színnel a két gráfot külön-külön, és ezt jól permutálva együtt is. Csak a 3 szorosan összefüggő gráfokkal kell törődnünk, ugyanis ugyanazt az elvet követve mint az előbb csak egy problémába ütközhetünk. A két elhagyott pont, x, y , és ezek színe különböző. Ekkor mindkét gráfban behúzzuk az (x, y) élt, de így továbbra is teljesül rájuk a fokszámkritérium. Ekkor vagy kiszínezhetőek a gráfok Δ színnel, vagy teljes gráfot kaptunk valahol. (páratlan kör nem gond ugyanis $\Delta \geq 3$) Ha mindkét rész kiszínezhető, akkor különböző színe van x, y -nak. Ha viszont egyik gráfunk teljes, az azt jelenti hogy egy szomszédja van x, y -nak is, tehát ha x' -t hagyjuk ez az elején x helyett akkor is szétesik a gráfunk, és így már egy helyes színezést fogunk kapni. Tehát a 3 szorosan összefüggő gráfok maradtak. Jelöljük meg a pontokat úgy, hogy legyen olyan v_1, v_2, v_n amikre igaz hogy $\{v_1, v_2\} \notin E(G), \{v_1, v_n\} \in E(G), \{v_2, v_n\} \in E(G)$. A többi pontot úgy jelöljük meg, hogy $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$, és minden legyen nagyobb indexű szomszédja. Haggyuk el $\{v_1, v_2\}$ élt, így biztosan összefüggő marad a gráfunk. A maradék gráfnak van feszítőfája, és egy v_n -től különböző elsőfokú pontja. Legyen ez v_3 . Ha elhadjuk a $\{v_1, v_2, v_3\}$ -at, akkor a gráf még összefüggő marad. Ha ezt folytatjuk, kapunk egy jó színezést, mert v_1 és v_2 ugyanolyan színű, így marad szín v_n -nek is.

2.9.2. mycielski konstrukció

$$\forall k \geq 2 \exists G_k \text{ gráf, hogy } \omega(G_k) = 2 \wedge \chi(G_k) = k$$

BIZ.:

A gráfunkat páros gráffá alakítjuk $V(G)$ pont hozzáadásával. Az eddigi pontok u_i -k, az újjak v_i -k. Minden v_i össze van kötve az összes u_i szomszédjával, és z össze van kötve összes v_i -vel. Így minden v_i pont u_i színű lesz, és z egy $k + 1$ -edik szín.

2.10. élszínezés

2.10.1. vizing

$$\text{Ha } G \text{ gráf egyszerű akkor } \chi_e(G) \leq \Delta + 1$$

BIZ.:

Minden ponthoz rendelünk egy szint($c(v)$), mivel Δ lehet maximum egy pont éle ezért $\Delta + 1$ pontal ez lehetséges. $\{x, y_1\}$ él még nincs kiszínezve. ha $(x) = c(y_1)$ akkor az élet erre a színre színezzük. Ha x -ből nem indul ki $c(y_1)$ színű él, akkor $c(y_1)$ színűre színezzük. tehát feltehetjük, hogy van x -nek olyan y_2 szomszédja, hogy ennek az élnek a színe $c(y_1)$. Ha x -ből nem indul ki $c(y_2)$ él, akkor $\{x, c(y_2)\}$ -t $c(y_2)$ -re cseréljük, ekkor viszont x -ből nem indul ki $c(y_1)$ színű él. Ellenkező esetben feltehetjük, hogy x -nem van olyan y_3 szomszédja, melyek közti él $c(y_2)$. a gondolatmenetet folytatva kapjuk $y_4, y_5, \dots$

Csak akkor akadunk el ha van olyan h , hogy $\{x, y_h\}$ színe $c(y_h)$, és valamik $1 \leq i < h$ $c(y_h) = c(y_i)$ igaz. Ekkor tekintsük G -nek egy részgráfját, amelyet $c(x)$ és $c(y_h)$ alkotnak (G'). G' -ben minden pont foka maximum 2, és mivel x ből nem indul ki $c(x)$ színű és, úgy mint y_h vagy y_i -ből sem $c(y_h)$ illetve $c(y_i)$ színű,

tehát ezek a pontok első fokúak. G' utakból, illetve izolált körökből, esetleg még kör komponensekből áll. x tehát az egyik ut végpontja, tehát y_h vagy y_i más komponensbe esik. A másik komponensbe a színeket cseréljük fel úgy, hogy $c(x) = c(y_{i \vee h})$, és így már ki tudjuk színezni a gráfunkat.

2.11. hálózatok

2.11.1.

Egy hálózatban nem létezik javító út, ha a folyam maximális.

BIZ.:

Legyen $A \subseteq V(G)$, azon csúcsok halmaza, s -ből még elérhetők, egy részleges javítóúton. Tekintsük azt a vágást, melyet azon élek alkotnak, melyen egyik vége A -ban másik pedig nem A -ban van. Ekkor $f(e) = c(e)$, egyébként $s \rightarrow a$ meghosszabbítása eljutna b -be, ez ellentmondás. Ha $b \in A$, és $a \notin A$, akkor ugyanezért $f(e) = 0$. Tehát az élek mindig telítettek.

2.11.2. ford-fulkerson

a maximális folyam értéke egyenlő a minimális vágás értékével.

BIZ.:

A minimális folyam nyilván nem lehet nagyobb a minimális vágás értékénél. Az előző tételből láttuk, hogy a maximális folyam értéke megegyezik egy vágás kapacitásösszegével. A javítóút módszerrel mindig elérjük a maximális folyamot, ha mindig a legrövidebb javítóút mentén javítunk.

2.11.3. edmonds-karp

Ha mindig a legrövidebb javító utat nézzük, akkor a maximális folyam meghatározása szükséges lépések száma mindig felülről becsülhető a pontok számának polinomjával.

2.11.4. egészértékűségi lemma

Ha egy hálózat minden kapacitása egész szám, akkor létezik olyan maximális folyam, aminek minden éle egész.

2.12. mengere

2.12.1.

ha egy gráf irányított, $s, t \in V(G)$, akkor az s -ből t -be vezető páronként élidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes irányított $s - t$ utak lefoglaló minimális számával. (ha irányítatlan, akkor is igaz)

BIZ.:

Az utak száma $\geq$ az éldiszjung utakéhoz képest. Minden kapacitás legyen 1. Tekintsünk egy maximális folyamot, aminek minden éle egész. Ilyen van. Egy minimális vágás minden utból le kell fogjon, így az utak száma. Az összes utat lefoglaló élek száma $\leq$ mint az éldiszjung utak száma (ford-fulkerson), és mivel kevesebb és több nem lehet, ezért egyenlő. Ha irányítatlan, akkor felcseréljük 2 irányított éle.

2.12.2.

Ha egy irányított gráf $s, t \in V(G)$, két nem szomszédos pont, akkor az s -ből t -be vezető végpontoktól eltekintve pontidegen irányított utak maximális száma megegyezik az összes $s - t$ utat s és t felhasználása nélkül lefoglaló pontok minimális számával. (ha irányítatlan, akkor is igaz)

BIZ.:

Egy pontot helyettesítünk egy éllel, úgy hogy az odafutó élek a kezdőpontján lesznek, az onnan indulók pedig a végpontján, és alkalmazzuk rá az előbbi tételt. Ha irányítatlan, akkor felcseréljük 2 irányítottá.

2.13. összefüggések

2.13.1.

$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ κ = összefüggőségi szám λ = élösszefüggőségi szám δ = minimum fokszám
A minimális fokszámhoz tartozó éleket elhagyva a gráf szétesik. $\rightarrow \lambda \leq \delta$,
Tegyük fel hogy $\lambda = k$. Legyen $E' \subseteq E(G)$ $|E'| = k$. Egy vágás $e \in E$ egyik végpontját elhagyva G vagy szétesik, vagy $\delta(G) \leq k$ izolált pont lesz. a vannak további pontok, akkor $|V(G)| \leq k + 1$, akkor a gráf szétesik $\rightarrow \kappa \leq k$
 G gráf szorosan összefüggő, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k pontot, még összefüggő marad.

2.13.2. mengere

Legalább 3 pontú gráf 2-szeresen összefüggő, ha ha bármeik két élén vagy pontján vezet át kör.

2.13.3. dirac

Ha $k \geq 2$ és G gráf k -szorosan összefügg, akkor bármely $x_1, x_2, \dots, x_k$ pontján át vezet kör.
BIZ.:
Tegyük fel hogy k -ig igaz, vagyis C kör már tartalmazza $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ -et, de x_k -t még nem. Vegyünk fel egy z pontot, melyet C minden pontjával összekötünk, és $z \wedge x_i$ között (végpontokat kivéve) a pont-diszjunkt utak maximális száma t . Legyen $y_1 \dots y_t$ azon pontok halmaza ahol először találkozik az út a C körrel. Ha $t \geq k$ akkor van olyan $x_i \wedge x_{i+1}$ hogy közülök kettő y_j kerül. Ezek legyenek $y_1 \wedge y_2$. Ekkor $x_1 \dots x_i \dots y_1 \dots x_k \dots y_2 \dots x_{i+1} \dots x_1$ körön minden rajta van. Ha $t < k$ akkor az új gráf t pont elhagyásával szétesik, (menger tétel) $\rightarrow x_k \wedge z$ külön komponensbe kerül, mivel az eredeti gráf k szorosan összefüggő, z egyedüli komponens, azaz a kör minden pontját elhagytuk, tehát $t = k - 1$ és $V(G) = x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Ekkor minden x_i -ből halad út x_k -ba.

2.13.4. petersen

$2k$ reguláris gráfban létezik 2 faktor. (faktor: olyan részgráf, melyben az összes csúcs benne van, és azok foka k)

BIZ.:

Elég összefüggőkre nézni. Van benne euler-kör, nézzük irányítva: Duplázzuk meg a csúcsokat, legyen $v^+ \wedge v^-$ a v -ből. Minden fokszám a G' -ben $\frac{2k}{2} = k \rightarrow$ Tehát G' egy k reguláris páros gráf, tehát van benne teljes párosítás. Ha egy ilyen rögzítünk, akkor ezt visszafejtve G -be kaptunk egy 2 faktort.