

Lineáris Algebra

Pejő Balázs

Tartalomjegyzék

1. Peano-axiomák	2
1.1. 1	2
1.2. 2	2
1.3. 3	2
1.4. 4	2
1.5. 5	2
2. halmazok	2
2.1. félcsoporth	2
2.2. csoport	2
2.3. gyűrű	2
2.4. test	2
3. komplex számok	3
3.1. algebrai alak	3
3.2. trigonometrikus alak	3
3.2.1. szorzás	3
3.2.2. osztás	3
3.2.3. Moivre-formula	3
3.2.4. gyökvonás	3
4. polinomok	3
4.1. nullosztó	3
4.2. oszthatóság	4
4.3. megoldóképletek	4
4.3.1. elsőfokú	4
4.3.2. másodfokú	4
4.3.3. harmadfokú	4
4.3.4. negyedfokú	4
4.4. vieta-formulák	4
4.5. irreducibilitás	5
4.5.1. gaus lemma	5
4.5.2. schönemann-eistein-féle kritérium	5
5. Mátrixalgebra	5
5.1. Determináns	5
5.1.1. cramer szabály	5
5.1.2. lapache	5
5.1.3. kifejtési tétel	6
5.1.4. ferde kifejtési tétel	6
5.2. rang	6

5.3. inverzió	6
6. vektorok	6
6.1. függetlenség	6
6.1.1.	6
6.1.2.	6
6.1.3.	6
6.1.4.	6
6.1.5.	6
6.2. altér	7
6.3. leképezések	7
6.3.1. képtér	7
6.3.2. magtér	7
6.3.3. transzformáció	7
6.3.4. funkcionál	7
6.4. sajátérték/vektor	7
6.4.1. műveletek	7
6.4.2. karakterisztikus polinom	7
6.5. euklideszi terek	8
6.6. görbék	8
6.6.1. kör	8
6.6.2. elipszis	8
6.6.3. hiperbola	8
6.6.4. parabola	8
6.6.5.	8
6.6.6.	8
6.7. bessel-egyenlőtlenség	8
6.8. cauchy-schwarz-bunyakovszki-egyenlőtlenség	8
6.9. komplex euklideszi tér	9
6.9.1. hermite	9
6.10. kvadratikus alak	9

1. Peano-axiomák

1.1. 1

Van 1 természetes szám.

1.2. 2

$\forall n$ természetes szához van 1, és csak 1 $n'(n \neq n')$ természetes szám. (Az n úgynevezett rákövetkezője.)

1.3. 3

Van 1, és csak 1 természetes szám, amely egyetlen számnak sem a rákövetkezője. (jele: $0 \vee 1$)

1.4. 4

Ha $n' = m' \rightarrow n = m$

1.5. 5

Ha N_0 a természetes számok N halmazának olyan részhalmaza, mely tartalmazza az 1-et (vagy 0-át), és $\forall n \in N_0$ esetén $n' \in N$ teljesül, akkor $N_0 = N$
(a teljes indukció)

2. halmazok

2.1. félcsoport

Ha S halmazon értelmezve van egy asszociatív¹ művelet, akkor azt mondjuk, S erre a műveletre félcsoportot alkot.

2.2. csoport

Ha egy G halmazon értelmezve van egy asszociatív, és invertálható² művelet, akkor azt mondjuk, hogy G csoport.

2.3. gyűrű

Ha egy R halmazon értelmezve van két művelet (jelük: $\cdot$; $+$) úgy, hogy az összeadás asszociatív, invertálható és kommutatív³, valamint a szorzásra asszociatív és disztributív⁴ mindkét oldalról az összeadásra nézve, akkor azt mondjuk, hogy R gyűrű.

2.4. test

Egy F kommutatív gyűrűt ($a \cdot$ is kommutatív) testnek nevezünk, ha a $\cdot$ invertálható az $F \setminus \{0\}$ halmazon. 0 =nullelem.

Egy test algebrailag zárt, ha minden legalább elsőfokú polinomjának van legalább egy zérushelye.

¹ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

²Egy S halmazon értelmezett $*$ műveletre azt mondjuk, hogy S -en invertálható, ha $(\forall a, b \in S)(\exists x, y \in S) \rightarrow a * x = b \quad y * a = b$

³ $ab = ba$

⁴ $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c = (b + c) \cdot a$

3. komplex számok

Testet alkotnak.

3.1. algebrai alak

$$a + bi = z \quad \bar{z} = a - bi$$

3.2. trigonometrikus alak

$$\begin{aligned} \bar{z}z &= |z|^2 & r &= \sqrt{a^2 + b^2} & \varphi &= \frac{b}{a} & a &= r \cdot \cos \varphi & b &= r \cdot \sin \varphi & r &= |z| \\ z &= r(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \end{aligned}$$

3.2.1. szorzás

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

3.2.2. osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

3.2.3. Moivre-formula

$$z^n = r^n (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

3.2.4. gyökvonás

$$w^n = z \quad z_k = \sqrt[n]{r} (\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i \cdot \sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

4. polinomok

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

A polinomok halmazás kommutatív gyűrűt alkot. Az összeadásuk, illetve a szorzásuk szintén gyűrűt alkot.

$\cdot$: multiplikatív írásmód, nullelem: 1

$+$: addiktív írásmód, nullelem: 0

4.1. nullosztó

Egy R kommutatív gyűrű valamely a elemét nullosztónak nevezzük, ha van hozzá olyan R -beli $b \neq 0$ elem, hogy $ab = 0$.

Egy kommutatív nullosztómentesnek gyűrűt integrálási tartománynak nevezünk.

4.2. oszthatóság

Egy legalább első fokú polinomot irreducibilisnek nevezünk, ha nem bontható fel nála kisebb fokszámú polinomok szorzatára.

$\forall$ komplex eggyütthatós legalább elsőfokú polinomnak van zérushelye a komplex számok halmazában.

4.3. megoldóképletek

4.3.1. elsőfokú

$$ax + b = 0 \quad x = \frac{-b}{a}$$

4.3.2. másodfokú

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.3.3. harmadfokú

Cardano képlet:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0 \\ x_1 &= \frac{-b}{3a} - \frac{2^{\frac{1}{3}}(-b^2 + 3ac)}{3a(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}} + \\ &\quad \frac{(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}}{32^{\frac{1}{3}}a} \\ x_2 &= \frac{-b}{3a} + \frac{(1 - i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{32^{\frac{2}{3}}a(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}} - \\ &\quad \frac{(1 + i\sqrt{3})(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}a} \\ x_3 &= \frac{-b}{3a} + \frac{(1 + i\sqrt{3})(-b^2 + 3ac)}{32^{\frac{2}{3}}a(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}} - \\ &\quad \frac{(1 - i\sqrt{3})(-2b^3 + 9abc - 27a^2d + \sqrt{4(-b^2 + 3ac)^3 + (-2b^3 + 9abc - 27a^2d)^2})^{\frac{1}{3}}}{62^{\frac{1}{3}}a} \end{aligned}$$

4.3.4. negyedfokú

$\exists$ megoldóképlet. $5 \geq$ -ra nem létezik megoldóképlet.

4.4. vieta-formulák

$$\begin{aligned} (-1)^n \frac{a_0}{a_n} &= z_1 z_2 \dots z_n \\ (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n} &= z_1 \dots z_{n-1} + \dots + z_2 \dots z_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n} &= z_1 z_2 + \dots + z_{n-1} z_n \\ (-1) &= z_1 + \dots + z_n\end{aligned}$$

4.5. irreducibilitás

Ha $Z[x]$ -beli polinom irreducibilis $Q[x]$ felett, akkor $Z[x]$ felett is.
Ha $Z[x]$ -beli polinom irreducibilis $Z[x]$ felett, akkor $Q[x]$ felett is.

4.5.1. gaus lemma

Két primitív polinom⁵ szorzata is primitív.

4.5.2. schönemann-eistein-féle kritérium

Ha egy egész együtthatós, legalább elsőfokú polinomhoz megadható olyan p prím, amely nem osztja a legnagyobb kitevőjű tag együtthatóját, de a többiét igen, és p^2 nem osztja a konstans tagot, akkor a polinom irreducibilis $Z[x]$ felett.

5. Mátrixalgebra

Egy R gyűrű elemeiből képzett $n \times n$ -es mátrix a szorzásra és az osztásra nézve gyűrűt alkot, ha R kommutatív, és nem zárt⁶, akkor kommutatív.

Valós számok halmazán képzett A mátrix akkor szimmetrikus, ha $A = A^T$

Ferdén szimmetrikus, ha $-A = A^T$

Ortogonalis mátrix⁷ inverze is ortogonalis. Ez a szorzatukra is igaz.

5.1. Determináns

$$\det A = \det A^T$$

A szinguláris, ha $\det A = 0$, egyébként reguláris.

5.1.1. cramer szabály

$$Ax = b \quad A : \text{mátrix} \quad x, b : \text{vektor}$$

Ez az egyenlet homogén, ha b összes eleme 0. Ekkor triviális megoldás az, ha $x_1, \dots, x_n = 0$. Egyéb megoldás akkor van, ha az ismeretlenek száma több mint a rang száma, vagy $\det A = 0$.

Akkor oldható meg, ha A rangja megegyezik (A, b) rangjával. Ha ez a rang = az ismeretlenek számával, akkor a megoldások egyértelműek, ha kevesebb, akkor több megoldása van.

Ha c_i jelöli annak a mátrixnak a determinánsát, amelyben az i -edik oszloptól eltekintve megegyezik A -val, az i -edik oszlop pedig b , akkor $x_i = \frac{c_i}{\det A} \quad i = 1, \dots, n$

5.1.2. lapache

Legyen A egy $n \times n$ -es mátrix, és legyen k egy tetszőleges pozitív egész szám úgy, hogy $k < n$. Ha az A mátrixban tetszőleges k sor rögzítése után ezekhez a sorokhoz tartozó összes aldetermináns(k -ad rendűek) megszorozzuk a hozzájuk tartozó adjungált⁸ aldeterminánsokkal, és ezen szorzatokat összeadjuk, akkor eredményként $\det A$ -t kapunk.

⁵Ha egészek a polinom együtthatói, és azok relatív prímek egymáshoz.

⁶ $\forall a \in R \quad ab = 0$

⁷ $A^T = A^{-1} \quad A = \text{mátrix}$

⁸

5.1.3. kifejtési tétel

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Azaz, Ha egy rögzített sorának az elemeihez tartozó előjeles aldeterminánsokat megszorozzuk velük, és összeadjuk őket.

5.1.4. ferde kifejtési tétel

Ha egy $A = (a_{ij}) \in M_n[C]$ mátrix egy sorának (illetve oszlopának) elemeit rendre megszorozzuk egy másik sorhoz (illetve oszlophoz) tartozó előjeles aldeterminánsal és összeadjuk őket, akkor 0-át kapunk.

5.2. rang

Tetszőleges mátrix rangján a mátrixból kiválasztható nem zérus értékű aldeterminánsok rendszámának⁹ maximumát értjük.

5.3. inverzió

Akkor van, ha $\det A \neq 0$.
 $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

6. vektorok

6.1. függetlenség

6.1.1.

Egy vektorrendszer akkor független ha azok lineáris kombinációjaként nem lehet előállítani a nullvektort.

6.1.2.

Ha az $a_1, \dots, a_n \in F^{(n)}$ vektorokból képezett $A_{n \times n}$ mátrix determinánsa nem nulla, akkor a vektorok lineárisan függetlenek.

6.1.3.

Test elemeiből képzett mátrix rangja megegyezik a lineárisan független oszlop/sor-vektorainak maximális számával.

6.1.4.

Generátorrendszernek azt nevezzük, amikor a tér bármely vektora előállítható ezek a vektorok lineáris kombinációjaként. Ha ez a generátorrendszer minimális, akkor bázis, ami egyben a maximálisan független vektorok száma is.

6.1.5.

Ortogonalis vektorrendszer független.

⁹ $n \times m$

6.2. altér

6.3. leképezések

Legyen $V_1 \vee V_2$ ugyanazon F test feletti vektorterek. A V_1 -nek a V_2 -be való valamely φ leképezését lineáris leképezésnek nevezzük, ha $\forall \underline{a}, \underline{b} \in V \vee \alpha \in F$ esetén $\varphi(\underline{a} + \underline{b}) = \varphi(\underline{a}) + \varphi(\underline{b})$, illetve $\varphi(\alpha \underline{a}) = \alpha \varphi(\underline{a})$ teljesül.

Akkor izomorf két vektortér, ha van egy bijektív¹⁰ kölcsönösen egyértelmű leképezés közöttük.

Véges dimenzióterekben két vektortér akkor izomorf, ha dimenziójuk egyenlő.

Szimetrikus egy leképezés, ha $\varphi(\underline{a}; \underline{b}) = \varphi(\underline{b}; \underline{a})$.

6.3.1. képtér

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés esetén a képhalmaz $\text{Im } \varphi := \{\underline{b} \in V_2; \exists \underline{a} \in V_1 : \varphi(\underline{a}) = \underline{b}\}$

6.3.2. magtér

Legyen $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ lineáris leképezés esetén a leképezés magja $\text{Ker } \varphi := \{\underline{a} \in V_1; \varphi(\underline{a}) = 0_2\}$ 0_2 a V_2 tér nullvektora.

6.3.3. transzformáció

Egy vektortér önmagába való leképezését hívjuk így.

6.3.4. funkcionál

Legyen V vektortér F test felett. V vektortérnek F -be való leképezését hívjuk így. Az általuk alkotott vektortereket duálisuknak hívjuk. Jelölésük: V^*

6.4. sajátérték/vektor

$$A\underline{v} = \lambda \underline{v} \rightarrow A\underline{v} = \lambda I \underline{v} \rightarrow |A - \lambda I| = 0$$

Ez azt jelenti hogy A mátrixunk főatlójának az elemeiből kivonjuk a lambdákat.

Egy mátrix $e_1, \dots, e_n$ bázisban akkor diagonális, ha az e_i vektorok mindegyike sajátvektora a mátrixnak.

Szimetrikus mátrix sajátértéke valós. Ferdén szimmetrikusnak képzetes szám(bi).

6.4.1. műveletek

$\underline{a}, \underline{b}$ térbeli vektorok skaláris szorzatán azt a valós számot értjük, hogy $|\underline{a}||\underline{b}| \cos(\beta)$.

Az $R^{(n)}$ vektortér tetszőleges $\underline{a}, \underline{b}$ skalárszorzatán azt értjük, hogy $a_1 b_1 \dots, a_n b_n = (\underline{a}, \underline{b})$.

Egy vektor hossza: $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$

Két vektor szöge radiánban: $\arccos\left(\frac{(\underline{a}, \underline{b})}{|\underline{a}||\underline{b}|}\right)$

Tetszőleges $\alpha \in F$ és $[\underline{a}_1; \underline{a}_2] \in V_1 \times V_2$ esetén legyen $\alpha[\underline{a}_1; \underline{a}_2] := [\alpha \underline{a}_1; \alpha \underline{a}_2]$. Ezzel a skalárral való szorzással $V_1 \times V_2$ vektorteret alkot F test felett. Ezt a vektorteret direkt szorzat nevezzük.

6.4.2. karakterisztikus polinom

A kifejtési tagok sorba λx -edik fokát kapják.

¹⁰injektív(Minden erlemhez különböző elemet rendel) és szürjektív(Minden elemet rendel valamihez az értékkészletben).

6.5. euklideszi terek

Euklideszi térnek (E_n) nevezzük azt, ha egy valós vektortéren értelmezve van egy valós értékű skalárszorzás.

Egy E_n -nek $\underline{a} \wedge \underline{b}$ vektorairól azt mondjuk, hogy ortogonálisak, ha $(\underline{a}; \underline{b}) = 0$.

E_n -nek van ortogonális bázisa.

Euklideszi téren való leképezést ortogonálisnak hívunk, ha $\forall \underline{a} \in E_n$ vektorra igaz, hogy $(\varphi(\underline{a})\varphi(\underline{a})) = (\underline{a}; \underline{a})$.

Egy lineáris leképezés szimmetrikus, ha $\varphi = \varphi^*$.

Egy lineáris leképezés ferdén szimmetrikus, ha $\varphi = -\varphi^*$.

Egy lineáris leképezés ortogonális, ha $\varphi^{-1} = \varphi^*$.

Egy lineáris leképezés normális, ha $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$.

6.6. görbék

síkbeli másodrendű görbén olyan síkgörbét értünk, melynek egyenlete egy rögzített síkbeli x_y koordináta-rendszerben a következő alakú: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

6.6.1. kör

$$x^2 + y^2 = r^2$$

6.6.2. elipszis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6.6.3. hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

6.6.4. parabola

$$y^2 = 2px$$

6.6.5.

(u, v) akkor, és csak akkor szimmetriaközéppont, ha $au + \frac{b}{2}v + \frac{d}{2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{b}{2}u + cv + \frac{e}{2} = 0$.

6.6.6.

Egy másodrendű görbe főtengetytranszformációján az x_y tengely olyan elforgatását értjük, amely után az új koordináta-rendszer tengelyei a sajátvektorai ennek a mátrixnak: $\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$

6.7. bessel-egyenlőtlenség

6.8. cauchy-schwarz-bunyakovszki-egyenlőtlenség

Valós euklideszi tér tetszőleges a és b vektora esetén $(a, b)^2 \leq \|a\|^2 \|b\|^2$.¹¹

¹¹ $\|a\| = \sqrt{(a, a)}$

6.9. komplex euklideszi tér

Legyen V vektortér a komplex számok teste felett. A $V \times V$ -nek C -be való leképezését lineáris funkcionáltnak nevezzük abban az esetben, ha második változója lineáris, az első pedig additív és tetszőleges $a, b \in V$ $\alpha \in C$ esetén $\varphi(\alpha \underline{a}; \underline{b}) = \bar{\alpha} \varphi(\underline{a}; \underline{b})$.

Egy lineáris leképezés önandjugált¹², ha $\varphi = \varphi^*$.

Egy lineáris leképezés ferdén önandjugált, ha $\varphi = \varphi^*$.

Egy lineáris leképezés ortogonális, ha $\varphi = \varphi^*$.

Egy lineáris leképezés normális, ha $\varphi = \varphi^*$.

6.9.1. hermite

Egy komplex vektortéren értelmezett φ lineáris funkcionált Hermite-félének nevezünk, ha minden vektorára teljesül ez: $\varphi(\underline{a}; \underline{b}) = \overline{\varphi(\underline{b}; \underline{a})}$

6.10. kvadratikus alak

Egy leképezés segítségével definiált $g(u) := \varphi(u, u)$ lineáris funkcionált kvadratikus alaknak nevezünk. Egy kvadratikus alak akkor, és csak akkor valós, ha hermite-féle.

12